Hervé LESTIENNE

www.lesmathsdherve.net

Sommaire

LES NOMBRES RELATIFS

Les nombres négatifs sont apparus après le 0. Ce n'est qu'en 456, dans un traité de cosmologie en sanscrit qu'on trouve pour la première fois un mot qui représente le zéro. Au VIIème siècle, le mathématicien indien Brahmagupta énoncé des règles pour opérer sur trois sortes de nombres : « biens », « dettes » et « zéro ».
Les hommes furent longtemps réticents à accepter les nombres négatifs. Les mathématiciens ne commencent à travailler avec qu'au XVème siècle, et ils les appellent numeri absurdi ("les nombres absurdes"), en leur refusant le statut de solution d'une équation. Au XVIIème siècle, René DESCARTES, qualifiait encore de "fausses" ou "moindres que rien" les solutions négatives d'une équation. A cette même époque, John WALLIS osa attribuer des coordonnées négatives aux points d'une courbe. A la fin du 18ème siècle, on peut lire ceci dans un livre de Lazare CARNOT : « Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que zéro, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres ».

Définitions

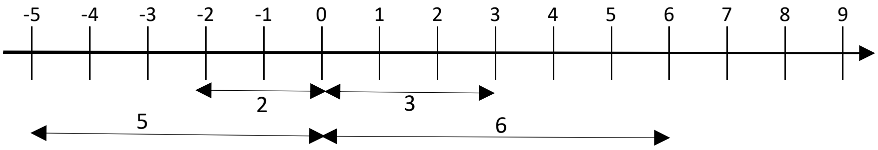
Un *nombre relatif* est un nombre précédé d'un signe.
Si ce signe est "+", le nombre est dit *positif*.
Si ce signe est "-", le nombre est dit *négatif*.
La *distance à zéro* d'un nombre relatif est la distance séparant ce nombre de 0.

Astuce

La distance à zéro d'un nombre est le nombre privé de son signe.

Exemples

La distance à zéro de -5 est 5.
La distance à zéro de -2 est 2.
La distance à zéro de +3 est 3.
La distance à zéro de +6 est 6.



Convention

Les mathématiciens ont décidé de ne pas mettre de signe devant les nombres positifs.

Propriété admise

Pour additionner deux nombres relatifs (a + b), on procède comme suit :

Les 2 nombres (*a et b*) ont le même signe ?

oui : On additionne les distances à zéro

non : On soustrait les distances à zéro

Le résultat est du même signe que le nombre (*a ou b*) qui avait la plus grande distance à zéro.

Exemples

5 + 3 = 8	5 et 3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.
(-5) + (-3) = -8	-5 et -3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.
5 + (-3) = 2	5 et -3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.
(-5) + 3 = -2	-5 et 3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

Définition

L'opposé d'un nombre a est le nombre noté – a tel que a + (-a) = 0.

Astuce

Pour prendre l'opposé d'un nombre, il suffit de changer son signe.

Exemples

L'opposé de 2 est noté -2 et vaut -2
L'opposé de -2 est noté - (-2) et vaut 2 donc - (-2) = +2.

Définition

Soustraire, c'est additionner l'opposé.

Exemples	**Astuce**
Soustraire 2 c'est additionner –2.	- 2 = + (-2)
Soustraire 5 c'est additionner –5.	- 5 = + (-5)
Soustraire -4 c'est additionner 4.	- (-4) = + 4
Soustraire -7 c'est additionner 7.	- (-7) = +7

Exemples de soustractions

5 – 2 = 5 + (-2) = 3 4 – 5 = 4 + (-5) = -1 5 – (-4) = 5 + 4 = 9 6 – (-7) = 6 + 7 = 13

Comment calculer une somme algébrique ?

On supprime les parenthèses, puis on effectue le travail précédent en additionnant les positifs et les négatifs (veiller à bien garder le signe qui se trouve devant un nombre lors du "réarrangement").

Exemple

(-5) + 3 – 4 + 5 + (-3) – 4 + 7 = -5 + 3 - 4 + 5 - 3 - 4 + 7 = -5 - 4 - 3 - 4 + 3 + 5 + 7 = -16 + 15 = -1

Propriété règle des signes admise

Le produit de deux nombres de même signe est positif

Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

La règle des signes s'applique aussi pour les divisions.

×	+	-
+	+	-
-	-	+

Comment multiplier deux nombres relatifs ?

1. On multiplie leurs distances à zéro.
2. On détermine le signe en utilisant la règle des signes.

Exemples de produits ou quotients

5 × 2 = +10	5 × (-2) = -10	(-5) × 2 = -10	(-5) × (-2) = +10
Les 2 nombres ont le même signe, le résultat est positif.	Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le résultat est négatif.	Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le résultat est négatif.	Les 2 nombres ont le même signe, le résultat est positif.
10 ÷ 2 = +5	10 ÷ (-2) = -5	(-10) ÷ 2 = -5	(-10) ÷ (-2) = +5

Propriété admise

Pour déterminer le signe d'une expression numérique dans laquelle n'interviennent que des multiplications et des divisions, il suffit de compter le nombre de facteurs négatifs.

Si ce nombre de facteurs négatifs est pair (0, 2, 4, 6, 8 …), le produit est positif.

Si ce nombre de facteurs négatifs est impair (1, 3, 5, 7, 9…), le produit est négatif.

Exemples

2 × 5 × (- 4) × 3 × (- 4) × (- 4) × 5 est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.

2 × (- 5) × (- 4) × 3 × (- 4) × (- 4) × 5 est positif car il y a un nombre pair (4) de facteurs négatifs.

Remarque

Peu importe le nombre de facteurs positifs ou s'il y a plus de facteurs positifs que négatifs ; seul compte le nombre de facteurs négatifs.

ATTENTION, la propriété précédente ne "marche" que s'il y a des multiplications et des divisions. Il ne faut surtout pas l'utiliser lorsqu'il y a des additions ou des soustractions.

Propriété priorités opératoires admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On effectue les multiplications et divisions (de gauche à droite).
3. On termine toujours par les additions et soustractions (de gauche à droite).

Exemple

10 + 5 × (3 – (3 + 5 × 7)) = 10 + 5 × (3 – (3 + 35)) = 10 + 5 × (3 – (38)) = 10 + 5 × (- 35) = 10 + (- 175) = - 165

Astuce

Dans le cas de parenthèses imbriquées, il peut être utile de mettre en couleur les paires de parenthèses pour repérer les calculs à effectuer.

FRACTIONS : additions et soustractions

Définitions

Un nombre en *écriture fractionnaire* s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l}\leftarrow \text{le numérateur} \\ \leftarrow \text{le dénominateur}\end{array}$$

On parle de *fraction* lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

On parle de *fraction décimale* lorsque l'on a une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, 10000 ...

Propriété d'égalité de fractions - admise

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

Exemples

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35} \qquad \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \qquad \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

Définitions

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la distance à zéro de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

Exemples

$$\frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4} \qquad \frac{45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

Remarque

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

Propriétés admises : Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

- 186 se divise par 2 car il est pair (il se termine par 6).
- 187 ne se divise pas par 2 car il est impair.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 237 est divisible par 3 car 2+3+7=12 et 12 est divisible par 3.
- 238 n'est pas divisible par 3 car 2+3+8=13 et 13 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

- 25 292 est divisible par 4 car 92 est divisible par 4, car 92=40+40+12 et 12 est divisible par 4.
- 45 267 n'est pas divisible par 4 car 67 n'est pas divisible par 67=40+27 et 27 n'est pas divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

- 185 se divise par 5 car il se termine par 5.
- 190 se divise par 5 car il se termine par 0.
- 187 ne se divise pas par 5.

Un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 ET par 3, donc s'il est pair ET si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 894 se divise par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - ET il se divise par 3 car 8+9+4=21 qui se divise par 3.
- 165 ne se divise pas par 6 car
  - il ne se divise par 2 (il est impair),
  - même si il se divise par 3 car 1+6+5 = 12 qui se divise par 3.
- 898 ne se divise pas par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - mais il ne se divise pas par 3 car 8+9+8=25 qui ne se pas divise par 3.

- 77 ne se pas divise par 6 car
  - il ne se divise par 2 (il est impair),
  - il ne se divise par 3 car 7+7=14 qui ne se divise pas par 3.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

- 567 est divisible par 9 car 5+6+7=18 et 18 est divisible par 9.
- 123 456 789 est divisible par 9 car 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 et 45 est divisible par 9 car 4+5=9 qui est divisible par 9.
- 238 n'est pas divisible par 9 car 2+3+8=13 et 13 n'est pas divisible par 9.

Remarque

Un nombre divisible par 9 est obligatoirement divisible par 3.

Définition

Un nombre est dit premier s'il n'a que 1 et lui-même comme diviseur (un nombre premier a exactement 2 diviseurs).

Exemples

Le nombre 3 est premier car ses diviseurs sont 1 et 3.
Le nombre 6 n'est pas premier car il se divise par 1, 2, 3 et 6.
Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Astuce pour trouver tous les nombres premiers en partant de 2 : crible d'Ératosthène (c'est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec : -276 à -194).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On écrit tous les nombres de 1 à 100.

1 n'est pas premier donc on le barre

Le premier nombre non barré est 2 donc c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 2 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 2 est 3 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 3 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 3 est 5 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 5 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 5 est 7 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 7 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 7 est 11 ; c'est un nombre premier.

On s'arrête ici car $11^2 = 11 \times 11 > 100$.
Tous les nombres non barrés sont premiers.

Les nombres premiers jusqu'à 100 sont : ❤ **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23**, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Comment décomposer un nombre en produits de facteurs premiers.

On veut décomposer 450.

450		On réécrit le nombre à gauche de la ligne verticale
225	2	2 est le plus petit nombre premier qui divise 450 450 = 225 × 2 On écrit 225 à gauche et 2 à droite
75	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 225 225 = 75 × 3 On écrit 75 à gauche et 3 à droite
25	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 75 75 = 25 × 3
5	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 25 25 = 5 × 5
1	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 5 5 = 1 × 5 On s'arrête lorsqu'il y a 1 dans la colonne de gauche.

$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

Exemples de décomposition en facteurs premiers

Décomposons 180

180	
90	2
45	2
15	3
5	3
1	5

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Décomposons 380

380	
190	2
95	2
19	5
1	19

$380 = 2^2 \times 5 \times 19$

Utilisation de la calculatrice

Décomposons 180

CASIO FX92	CASIO FX 92 classwiz	TI COLLEGE PLUS
1 8 0 EXE SECONDE ⊦	180 Format Facteur premier EXE	180 SECONDE ▶ SIMP

On obtient : $2^2 \times 3^2 \times 5$

Trouver le plus petit multiple commun à 34 et 51 : *PPCM(34 ; 51)*

CASIO FX92	CASIO FX 92 classwiz	TI COLLEGE PLUS
SECONDE Y 34 SECONDE 3 51) EXE	CATALOG puis Calcul numérique puis PPCM EXE 34 ; 51)	système maths 2 34 2nde ; , 51 ▸norm) entrer =

On obtient : 102

Exemple de simplification de fraction

Simplifier la fraction $\dfrac{21000}{29700}$

Décomposons 21000

21000	
10500	2
5250	2
2625	2
875	3
175	5
35	5
7	5
1	7

$21000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7$

Décomposons 29700

29700	
14850	2
7425	2
2475	3
825	3
275	3
55	5
11	5
1	11

$29700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$

$$\frac{21000}{29700} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 11} = \frac{70}{99}$$

Comment transformer une écriture fractionnaire en fraction ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateur entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, …).

Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

Exemples

$$\frac{5{,}2}{2}=\frac{5{,}2\times 10}{2\times 10}=\frac{52\div 2}{20\div 2}=\frac{26\div 2}{10\div 2}=\frac{13}{5} \qquad \frac{4{,}51}{3{,}7}=\frac{4{,}51\times 100}{3{,}7\times 100}=\frac{451}{370}$$

Propriété d'addition de fractions de même dénominateur - admise

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$$

Exemples

$$\frac{3}{4}+\frac{6}{4}=\frac{3+6}{4}=\frac{9}{4} \qquad \frac{1}{3}-\frac{8}{3}=\frac{1-8}{3}=\frac{-7}{3} \qquad \frac{-1}{5}-\frac{8}{5}=\frac{-9}{5} \qquad \frac{-15}{6}-\frac{-8}{6}=\frac{-15-(-8)}{6}=\frac{-15+8}{6}=\frac{-7}{6}$$

Définition

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

Remarque

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

Comment additionner deux fractions de dénominateurs différents ?

On se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

Exemples

$$\frac{7}{2}+\frac{5}{3}=\frac{7\times 3}{2\times 3}+\frac{5\times 2}{3\times 2}=\frac{21}{6}+\frac{10}{6}=\frac{31}{6} \qquad \frac{5}{34}+\frac{8}{51}=\frac{5\times 51}{34\times 51}+\frac{8\times 34}{51\times 34}=\frac{255}{1734}+\frac{272}{1734}=\frac{527}{1734}$$

Remarque

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici, $\frac{527}{1734}=\frac{31}{102}$

Astuce

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs (ici 34 et 51).

Méthode 1	Méthode 2
On décompose les deux nombres. Décomposons 34 : 34 | ; 17 | 2 ; 1 | 17 ; 34 = 2 × 17 Décomposons 51 : 51 | ; 17 | 3 ; 1 | 17 ; 51 = 3 × 17 On cherche un nombre qui contient tous les facteurs ci-dessus : 2 × 3 × 17 = 102.	On écrit les multiples des 2 nombres jusqu'à ce que l'on en trouve un en commun. 34 | 51 68 | 102 102 | On peut aussi donner tous les multiples du plus grand nombre jusqu'à ce que l'on obtienne un multiple du plus petit : 51, 102, …

$$\frac{5}{34}+\frac{8}{51}=\frac{5\times 3}{34\times 3}+\frac{8\times 2}{51\times 2}=\frac{15}{102}+\frac{16}{102}=\frac{31}{102}$$

Propriété admise

Prendre une quantité d'une fraction c'est multiplier le nombre par la fraction.

Exemples

Prendre $\frac{3}{4}$ de 126 € c'est prendre $\frac{3}{4}\times 126$ €.

Rouler $\frac{2}{5}$ de 800 km c'est rouler $\frac{2}{5}\times 800$ km.

Remarque

Le mot « de » en français se traduit par « × » en mathématiques.

Comment multiplier un nombre par une fraction ?

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$	$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$	$\frac{a}{b} \times c = a \times (c \div b)$
$\frac{12}{6} \times 7 = (12 \div 6) \times 7 = 2 \times 7 = 14$	$\frac{2}{3} \times 9 = (2 \times 9) \div 3 = 18 \div 3 = 6$	$\frac{5}{7} \times 21 = 5 \times (21 \div 7) = 5 \times 3 = 15$

Notation

La fraction $\frac{p}{100}$ est notée p %

La fraction $\frac{15}{100}$ est notée 15 %

Exemple de problème

Sébastien achète un pull. Le prix affiché est de 65€, mais il bénéficie d'une remise de 15%.
Combien va-t-il payer ?

Calculons le montant de la remise

$15\ \%$ de 65 € = $\frac{15}{100}$ de 65

$$= \frac{15}{100} \times 65 = (15 \times 65) \div 100 = 975 \div 100 = 9{,}75$$

La remise est de 9,75 €.

Je calcule le prix réduit.

65 – 9,75 = 55,25

Le prix réduit est de 55,25 €.

FRACTIONS : multiplications et divisions

Propriété du signe des fractions

Une fraction est une division, donc la règle des signes s'applique pour déterminer le signe d'une fraction (on compte le nombre de termes négatifs).

Exemples

$$\frac{-3}{4}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}=-\frac{-3}{-4}=-0{,}75$$

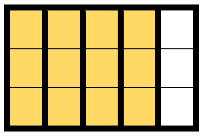
Il y a 1 (ou 3) terme(s) négatif(s), donc le résultat est négatif.

$$\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}=+0{,}75$$

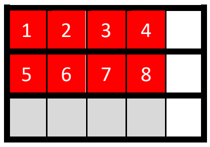
Il y a 2 termes négatifs, donc le résultat est positif.

Remarque

Quatre cinquièmes valent



Deux tiers de quatre cinquièmes valent huit quinzièmes



Deux tiers de quatre cinquièmes s'écrit $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ et on voit que $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5}=\frac{8}{15}$

Propriété de multiplication de fractions - admise

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Astuce

Pour déterminer le signe, on utilise la règle des signes.

Exemples

$$\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}=\frac{5\times 9}{7\times 11}=\frac{45}{77}$$

$$\frac{-5}{3}\times\frac{-8}{-4}=-\frac{5\times 8}{3\times 4}=-\frac{40}{12}=-\frac{10}{3}$$

Il y a 3 termes négatifs, donc le résultat est négatif.

$$2\times\frac{3}{5}\neq\frac{2\times 3}{2\times 5}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\quad\text{mais}\quad 2\times\frac{3}{5}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times 3}{1\times 5}=\frac{6}{5}$$

Définition

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a vaut 1. L'inverse de a est noté : a^{-1}.

Propriété

L'inverse du nombre *a* vaut $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ vaut $\frac{b}{a}$.

Démonstrations

$$a\times\frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$$

Exemples

Nombre	5	-3	$\frac{2}{7}$	$\frac{-3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
Inverse	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	N'existe pas

Ne pas confondre inverse et opposé.
L'opposé de 2 est -2
L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$

Définition

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

Exemples

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{-2}{3} \div \frac{4}{9} = -\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{3} \div 2 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$8 \div \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5}$$

On inverse uniquement le nombre se trouvant après le symbole de division et on ne change pas celui qui est avant.

Remarques

$\frac{3}{5}$ est une notation de 3 ÷ 5 et vaut 0,6

Il n'est pas possible de donner une valeur décimale exacte pour toutes les fractions, par exemple : $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$

Attention à la position du signe d'égalité lorsqu'il y a des fractions à "étages".

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \approx 0{,}17$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Exemple de calcul « complexe »

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{-1} = \frac{20}{-4} = -5$$

PUISSANCES

La première mention, de carrés ou de cubes, remonte à l'époque babylonienne, au 23ème siècle avant J C. $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$

Le terme exposant est dû au mathématicien allemand Stifel (1487 – 1567) qui généralisent la notation aux exposants négatifs. L'auteur de l'*Arithmética intégra* était un moine, disciple du Luther, qui calcula la fin du monde pour le 18 octobre 1533 …

La notation scientifique est inventée par René Descartes (vers 1637) dans *La géométrie*. Il y invente aussi le symbole $\sqrt{}$.

5^2 se lit exposant 2 et 5_2 se lit 5 indice 2

Définition

Le nombre noté a^n qui se lit « a exposant n » est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$$

Exemples

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ $\quad$ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ $\quad$ $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

Remarques

a^2 se lit "a exposant 2" ou "a au carré"

a^3 se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

Astuce

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de a^n est positif si :

- a est positif
- ou a est négatif et n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 …).

Le signe de a^n est négatif si : a est négatif et n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 …).

Exemples

4^5 est positif

$(-4)^5$ est négatif car il y a **5** facteurs négatifs.

$(-10)^8$ est positif car il y a **8** facteurs négatifs.

Propriété de priorité opératoire - admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On calcule les puissances.
3. On effectue les multiplications et divisions.
4. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple

$4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3)$

$= 4 \times 5^2 \times (5 - 12)$

$= 4 \times 5^2 \times (-7)$

$= 4 \times 25 \times (-7)$

$= 100 \times (-7)$

$= -700$

Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances

$(-2)^4 = 16$ car $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$

$-2^4 = -16$ car $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction.

On calcule d'abord la puissance.

Propriété 1 - admise

$x^a \times x^b = x^{a+b}$ $\quad$ S'il y a le même nombre en bas, on additionne les puissances

Exemples

$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$ $\quad$ $3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$ $\quad$ $(-2)^3 \times (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10}$

"Justification"

$2^3 \times 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{3+7} = 2^{10}$

⚠ Attention à la consigne car on peut attendre deux résultats différents.

Calcule	Mettre $2^3 \times 2^5$ sous la forme d'une seule puissance
$2^3 \times 2^5 = 8 \times 32$ $= 256$ *Le résultat est un nombre (entier ou décimal) ou une fraction*	$2^3 \times 2^5$ $= 2^8$ *Le résultat est **une** puissance*

Propriété 2 - admise

$x^a \times y^a = (x \times y)^a$ S'il y a le même nombre en haut, on multiplie les nombres du « bas »

Exemples

$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$ $3^5 \times 7^5 = (3 \times 7)^5 = 21^5$

"Justification"

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$

Propriété 3 - admise

$(x^a)^b = x^{a \times b}$ Si les puissances sont imbriquées, on multiplie les exposants.

Exemples

$(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$ $((-3)^2)^4 = (-3)^{2\times 4} = (-3)^8$

"Justification"

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12}$$

Remarque

← ÷ 2 — / — × 2 → (between each consecutive column)

2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^1}$					

$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ $2^{-1} = \frac{1}{2^1}$

Propriété 4 - admise

Si $x \neq 0$ alors $x^0 = 1$

Exemples

$4^0 = 1$ $(-4)^0 = 1$ $\pi^0 = 1$ $2,7^0 = 1$ $(-4,8)^0 = 1$ $-9^0 = -1$

Propriété 5

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ L'exposant négatif devient « 1 sur … » ou l'inverse.

Exemples

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$

Démonstration

$n + (-n) = 0$

$x^{n + (-n)} = x^0$

$x^n \times x^{(-n)} = 1$

x^n et x^{-n} sont inverses l'un de l'autre

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Propriété 6 - admise

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Lorsqu'on divise des puissances du même nombre, on soustrait les exposants.

Exemples

$$\frac{5^{12}}{5^8} = 5^{12-8} = 5^4 \qquad \frac{5^{15}}{5^{18}} = 5^{15-18} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} \qquad \frac{5^7}{5^{-8}} = 5^{7-(-8)} = 5^{15}$$

Propriété 7 - admise

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

L'exposant se distribue sur le numérateur et sur le dénominateur

Exemples

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \qquad \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{5^3}{4^3} = -\frac{125}{64} \qquad \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4} = \frac{16}{625}$$

Propriété - admise

Soit n un entier positif.
10^n s'écrit avec un "1" suivi de n "0".
10^{-n} s'écrit "0,0…01" avec n "0" au total en comptant celui avant la virgule.

Exemples

10^7 = 1**0000000** (7 zéros) $\qquad$ 10^{-8} = **0,0000000**1 (8 zéros)

Définition

Un nombre est dit **sous la forme scientifique** (ou en **notation scientifique**) s'il s'écrit sous la forme : $a \times 10^n$

↙ ↘

a est un nombre décimal dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10).

n est un entier relatif (positif ou négatif)

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique

15	10^3	15×10^4	10×10^4	$0,8 \times 10^4$	$1,5 \times 10^{4,2}$
Il manque ×10…	Il manque un nombre devant	Le nombre devant est supérieur à 10.	Le nombre devant est égal à 10.	Le nombre devant n'est pas supérieur ou égal à 1.	L'exposant n'est pas entier

Exemples de nombres étant en notation scientifique

1×10^4 $\qquad$ $1,5 \times 10^{-5}$ $\qquad$ $-1,5 \times 10^{42}$ $\qquad$ $-9,5 \times 10^{-12}$ $\qquad$ $-1,7 \times 10^0$ $\qquad$ $1,5 \times 10^0$

Rappels

Si n est positif, multiplier par 10^n c'est décaler la virgule de *n* rangs vers la droite.
Si n est positif, multiplier par 10^{-n} c'est décaler la virgule de *n* rangs vers la gauche.

Exemples de passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$4,52 \times 10^4 = 45200$ $\qquad$ $-6 \times 10^4 = -60000$ $\qquad$ $4,52 \times 10^{-4} = 0,000452$

Exemples de passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$123,45 = 1,2345 \times 10^2$ $\qquad$ *$10^2 = 100$*

$0,012345 = 1,2345 \times 10^{-2}$ $\qquad$ *$10^{-2} = 0,01$*

$123,45 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^2 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^7$

Remarque

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique (où apparaissent uniquement des quotients ou produits), on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

Exemples

$12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8 = 12 \times 55 \times 10^4 \times 10^8 = 660 \times 10^{12} = 6{,}6 \times 10^2 \times 10^{12} = 6{,}6 \times 10^{14}$

$25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^8 = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^8 = -10000 \times 10^{-6} = -1 \times 10^4 \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$

$0{,}0055 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 0{,}0055 \times 2 \times 10^7 \times 10^8 = 0{,}011 \times 10^{15} = 1{,}1 \times 10^{-2} \times 10^{15} = 1{,}1 \times 10^{13}$

$$\frac{45 \times 10^{23} \times 24 \times 10^{-4}}{18 \times 10^5} = \frac{45 \times 24}{18} \times \frac{10^{23} \times 10^{-4}}{10^5} = \frac{1080}{18} \times \frac{10^{19}}{10^5} = 60 \times 10^{14} = 6 \times 10^1 \times 10^{14} = 6 \times 10^{15}$$

Utilisation de la calculatrice

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{\blacksquare^{\blacksquare}}$ $\boxed{x^{\blacksquare}}$ $\boxed{x^{y}}$ $\boxed{x^{n}}$ $\boxed{y^{x}}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\uparrow}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{x^{\blacksquare}}$ cette touche.

Pour calculer $5^3 \times 2 - (2 - 5)^4$ on tape 5 $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 3 × 2 - (2 - 5) $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 4 et on trouve 169.

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

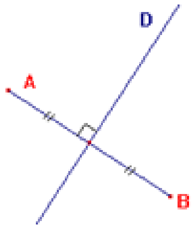
$\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ $\boxed{\times 10^{x}}$ $\boxed{\times 10^{n}}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{\text{EE}}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ cette touche. Elle remplace l'appui sur les touches $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{x^{\blacksquare}}$

Pour calculer $12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8$ on tape 12 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 4 × 55 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 8 et on trouve $6{,}6 \times 10^{14}$.

SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS et ROTATIONS

I – Symétrie axiale

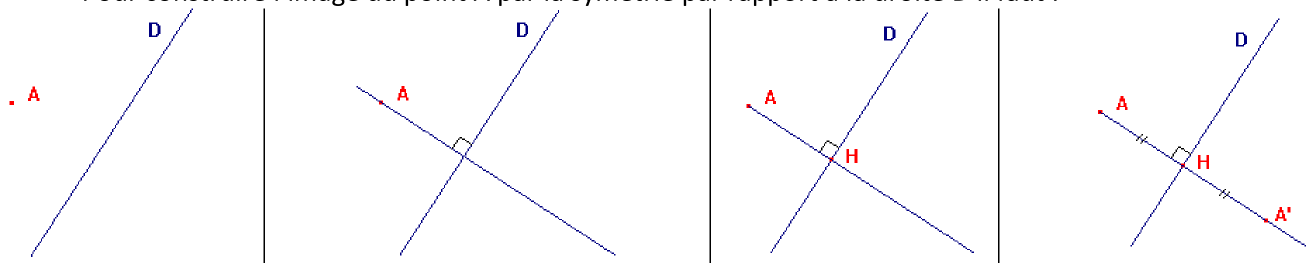


Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport à la droite D si D est la médiatrice de [AB].

Construction avec la réquerre

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :

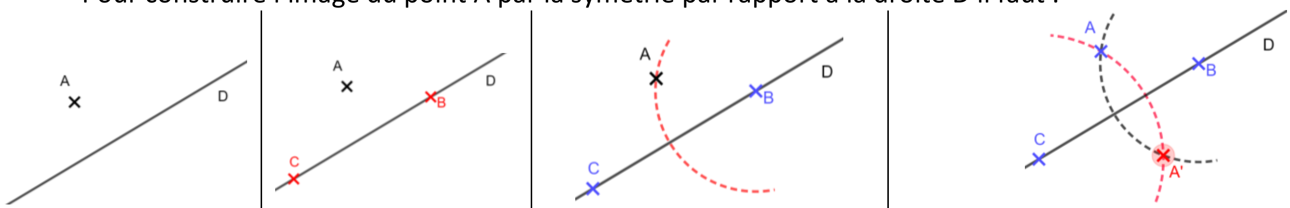


Tracer la droite perpendiculaire à D qui passe par A. | Elle coupe D en H. | Placer le point A' tel que H soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie d'axe D.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie d'axe D.

Construction avec le compas et la règle non graduée

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :



Placer deux points (B et C) sur D. | Tracer le cercle de centre B qui passe par A. | Tracer le cercle de centre C qui passe par B ; il coupe le cercle précédent en A'.

Propriété admise

La symétrie axiale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

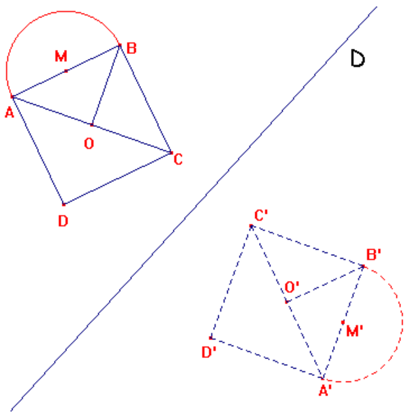


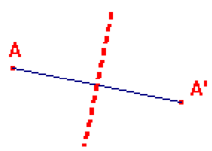
Image par la symétrie d'axe D.

Pour mémoire

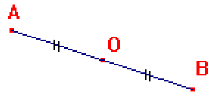
La symétrie axiale « correspond » à un miroir.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie axiale, il faut donner son axe.
Pour retrouver son axe, il suffit de connaître un point et son image.
L'axe de symétrie est la médiatrice du segment formé par ces 2 points.



II – Symétrie centrale

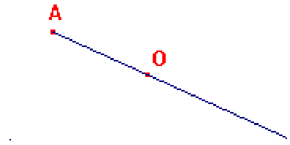


Définition

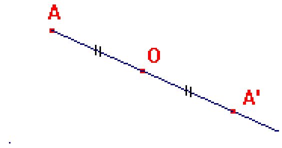
Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O si O est le milieu de [AB].

Construction

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport au point O il faut :



Tracer la demi-droite [AO).



Placer le point A' sur [AO) tel que O soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie de centre O.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie de centre O.

Propriété admise

La symétrie centrale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

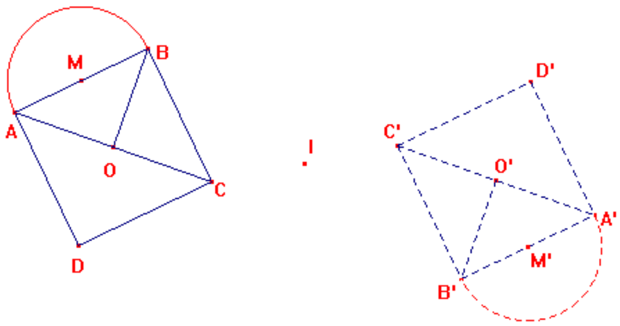


Image par la symétrie de centre I.

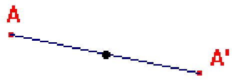
Pour mémoire

La symétrie centrale « correspond » à un demi-tour autour du centre de symétrie.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie centrale, il faut donner son centre.

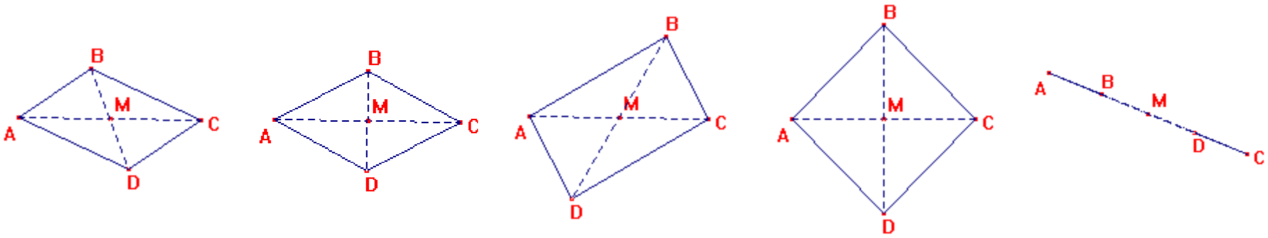
Pour retrouver son centre, il suffit de connaître un point et son image. Le centre de symétrie est le milieu du segment formé par ces 2 points.



III – Translation

Définition

ABCD est un *parallélogramme* si ces diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.



Dans tous les cas ci-dessus, ABCD est un parallélogramme car M est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

Définition

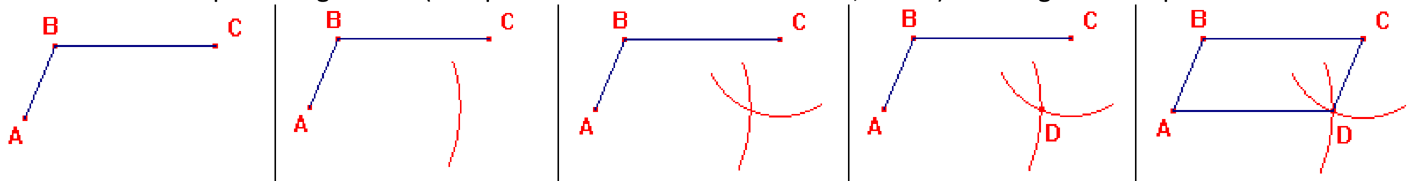
On dit que l'image du point D est le point C par la *translation* qui envoie A sur B si ABCD est un parallélogramme.

Construction

Pour construire l'image du point C dans la translation qui envoie A sur B il faut construire le parallélogramme ABC'C.

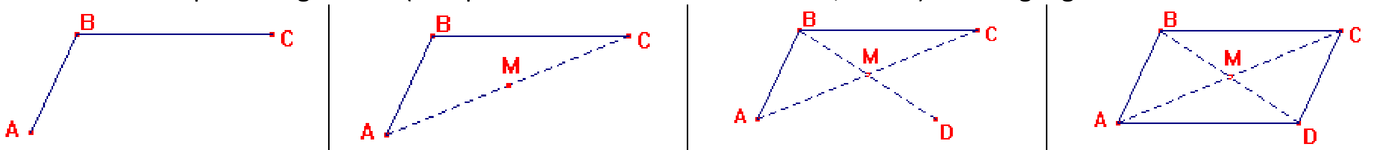
C' est le *translaté* de C par la translation qui envoie A sur B.
On dit aussi que C' est l'*image* de C par la translation qui envoie A sur B.

Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle et compas



	Tracer un arc de cercle de centre A et de rayon BC.	Tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB.	Les deux demi-cercles se coupent en D.	Tracer les segments [CD] et [AD]

Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle graduée



Tracer le segment [AC]	Construire le point M, milieu de [AC]	Tracer le point D, symétrique de B par rapport au point M.	Tracer les segments [CD] et [AD].

Propriété admise

La translation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

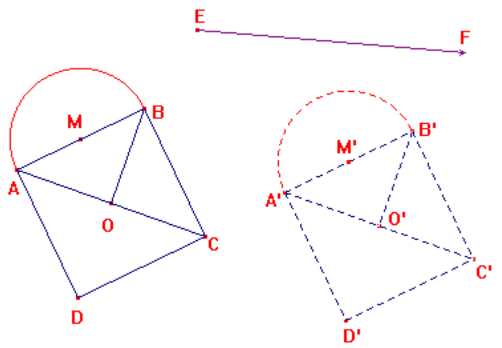


Image par la translation qui envoie E sur F.

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

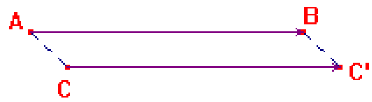
Pour mémoire

La translation « correspond » à un glissement sans tourner.

Caractériser

Pour caractériser une translation, il faut donner un point et son image ou le vecteur dont les extrémités sont ces points.

Dans l'exemple, on peut parler de la translation qui envoie A sur B ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut aussi parler de la translation qui envoie C sur C' ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{CC'}$.

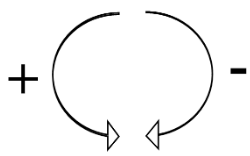


IV – Rotations

Définition

Un angle est dit :

- positif s'il tourne dans le sens trigonométrique (l'inverse de la montre)
- négatif s'il tourne dans le sens chronométrique (la montre).



Remarque

Pour définir une rotation, il faut donner un angle. Pour définir le sens de rotation, on donne un signe à l'angle.

Si l'on dit rotation d'angle –50°, il faut comprendre qu'il faut tourner dans le sens chronométrique (montre).

Si l'on dit rotation d'angle +50° (ou 50°), il faut comprendre qu'il faut tourner dans le sens trigonométrique (inverse de la montre).

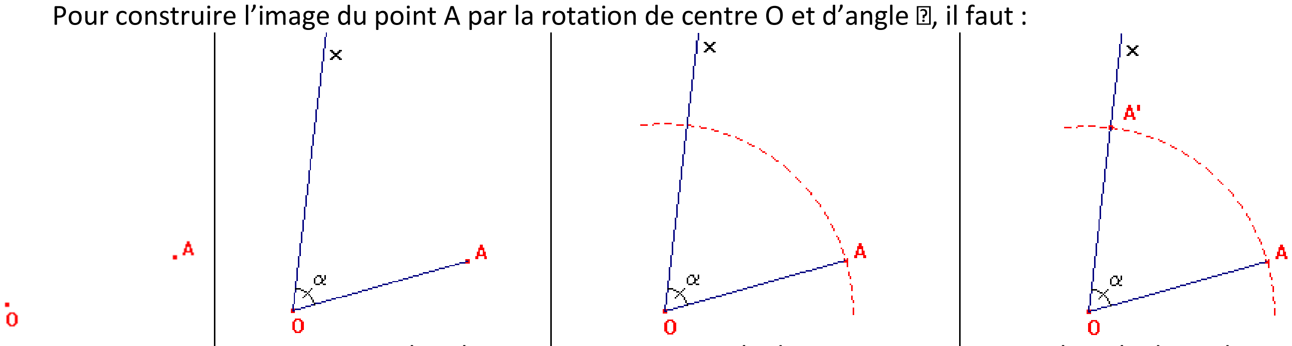
Définition

Le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle α si :

- OA = OA'
- $\widehat{AOA'} = \alpha$

Construction avec le rapporteur et le compas

Pour construire l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle α, il faut :



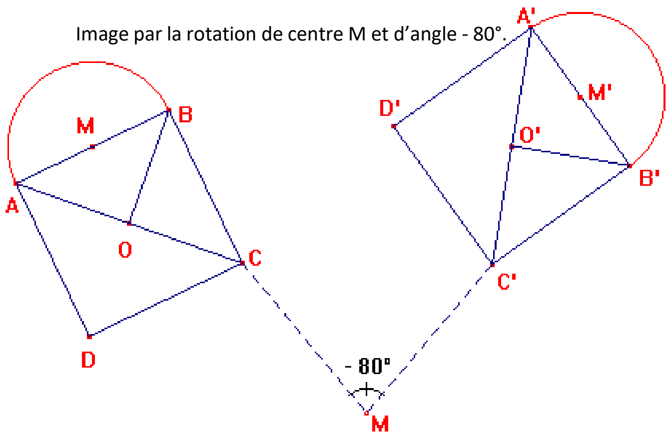
Tracer un angle tel que $\widehat{AOx} = \alpha$	Tracer un cercle de centre O et de rayon OA.	Le cercle et la demi-droite [Ox] se coupent en A'.

A' est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle α.

Propriété admise

La rotation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Image par la rotation de centre M et d'angle - 80°.



Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour mémoire

Pour une rotation, on tourne autour d'un point

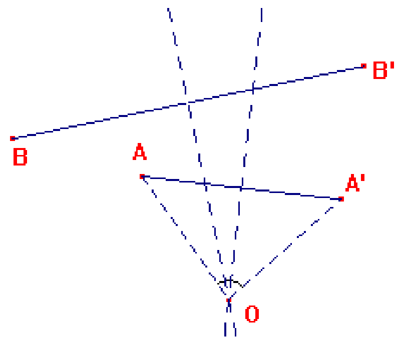
Caractériser

Pour caractériser une rotation, il faut trouver son centre et son angle.

Pour retrouver le centre O, on trace la médiatrice de deux segments formés par deux points et leurs images (médiatrices de [AA'] et [BB']). Le point d'intersection de ces médiatrices est le centre de rotation O.

Si les segments [AA'] et [BB'] sont à supports parallèles, les médiatrices ne seront pas concourantes. Il faut choisir un autre segment [CC'] tel que (AA') et (CC') ne soient pas parallèles.

L'angle de la rotation est l'angle $\widehat{AOA'}$ ou $\widehat{BOB'}$.



EQUATIONS du premier degré à une inconnue – DEVELOPPER

I – Développer

Rappels sur la réduction des produits

On peut toujours réduire les produits.

$2\,x \times 3\,x$	$-\,5 \times 3\,x$	$3\,x^2 \times 7\,x$
$= \;6\,x^2$	$= \;-\,15\,x$	$= \;21\,x^3$

Rappels sur la réduction de sommes

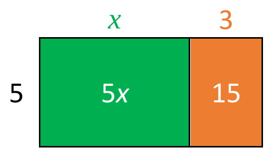
$3\,x + 2\,x$	$15\,x - 8\,x$	$4\,x - 12\,x$	$15\,x^2 - 8\,x^2$	$33\,x - 5\,x^2 + 7\,x + 11\,x^2$
$= 5\,x$	$= 7\,x$	$= -8\,x$	$= 7\,x^2$	$= 40\,x + 6\,x^2$

$5\,x^2 + 3\,x$ ne peut pas se réduire

Remarque

Dans tous les exercices, il faudra réduire les expressions (*même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé*).

Remarque calcul de $5 \times (x + 3)$

Géométrique	" Répétitif "	Avec la simple distributivité
 $5 \times (x + 3) = 5\,x + 15$	$5 \times (x + 3) = \;x \;+\; 3$ $+\,x \;+\; 3$ $+\,x \;+\; 3$ $+\,x \;+\; 3$ $+\,x \;+\; 3$ $= 5 \times x + 5 \times 3$ $= 5\,x \;+\; 15$	$5 \times (x + 3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5\,x + 15$

Rappel simple distributivité - admise

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

Exemples

$5 \times (2x + 7) = 10\,x + 35$ $\quad$ $8 \times (x - 3) = 8\,x – 24$ $\quad$ $-\,6 \times (x + 7) = -6\,x - 42$ $\quad$ $-\,4 \times (x - 7) = -4\,x + 28$

Remarque gestion du signe « - »

$-\;(2x + 7) = -\,2x - 7$ $\quad$ $-\;(x - 3) = -\,x + 3$ $\quad$ $-\;(-3x + 7) = +3\,x - 7$ $\quad$ $-\;(-6x - 7) = +6x + 7$

Exemples complexes

$3\,(x + 5) + 7\,(x + 4) = 3x + 15 + 7x + 28 = 10x + 43$

$5\,(x + 7) + 8\,(x - 3) = 5x + 35 + 8x - 24 = 13x + 11$

$6\,(x - 4) - 9\,(x + 2) = 6x - 24 - 9x - 18 = -3x - 42$

$6\,(x - 7) + 9x\,(3x - 2) = 6x - 42 + 27x^2 - 18x = 27x^2 - 12x - 42$

II – Equations

Rappel

$$\overbrace{\underbrace{5x + 5}_{\text{Membre de gauche}} = \underbrace{3x - 17}_{\text{Membre de droite}}}^{\text{Une équation}}$$

Remarque

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

Définition

On dit qu'un nombre est une solution d'une équation l'égalité entre les deux membres est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples

Pour l'équation $5x + 5 = 3x - 17$, tester si 2 et -11 sont des solutions.

<table>
<tr><th>Méthode « littéraire »</th><th>Méthode en ligne</th><th colspan="2">Méthode en colonne</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Lorsque $x = 2$ alors
le membre de gauche devient $5 \times 2 + 5 = 15$
et le membre de droite devient $3 \times 2 - 17 = -11$
Donc 2 n'est pas une solution.</td><td rowspan="3">Si $x = 2$ alors $5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15$
et $3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11$
Donc 2 n'est pas une solution.</td><td colspan="2">Si $x = 2$ alors</td></tr>
<tr><td>$5x + 5$
$= 5 \times 2 + 5$
$= 15$</td><td>$3x - 17$
$= 3 \times 2 - 17$
$= -11$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Donc 2 n'est pas une solution.</td></tr>
<tr><th>Méthode « littéraire »</th><th>Méthode en ligne</th><th colspan="2">Méthode en colonne</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Lorsque $x = -11$ alors
le membre de gauche devient $5 \times (-11) + 5 = -50$
et le membre de droite devient $3 \times (-11) - 17 = -50$
Donc -11 est une solution.</td><td rowspan="3">Si $x = -11$
alors $5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50$
et $3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50$
Donc -11 est une solution.</td><td colspan="2">Si $x = -11$ alors</td></tr>
<tr><td>$5x + 5$
$= 5 \times (-11) + 5$
$= -50$</td><td>$3x - 17$
$= 3 \times (-11) - 17$
$= -50$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Donc -11 est une solution.</td></tr>
</table>

Définition

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

Exemples

Equation n'ayant pas de solution	Equation ayant une seule solution	Equation ayant une infinité de solution
$2x + 3 = 2x + 5$	$5x + 5 = 3x - 17$	$2(x + 5) - 2 = 2x + 8$
On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution.	La solution de cette équation est –11.	On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie. Quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace x, l'égalité sera vraie.

Remarque

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

Propriété - admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

1. On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
2. On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

Exemple de résolution d'une équation

Résoudre l'équation $2(x + 5) = 6x + 7$.

<table>
<tr><td colspan="2">$2(x + 5) = 6x + 7$</td><td>On réécrit l'équation</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2x + 10 = 6x + 7$</td><td>On simplifie l'écriture de chacun des membres en développant et réduisant</td></tr>
<tr><td colspan="2">$-6x \quad -10 \qquad -6x \quad -10$
$-4x = -3$</td><td>On isole les inconnues dans un membre et les nombres dans l'autre en utilisant le point 1 de la propriété ci-dessus.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\div(-4) \qquad \div(-4)$
$x = 0,75$</td><td>Pour trouver x, on divise par le nombre devant x en utilisant le point 2 de la propriété ci-dessus.</td></tr>
<tr><td>Si $x = 0,75$ alors
$2(x + 5)$
$= 2 \times (0,75 + 5)$
$= 11,5$</td><td>$6x + 7$
$= 6 \times 0,75 + 7$
$= 11,5$</td><td>On teste si le nombre trouvé est bien une solution de l'équation en remplaçant dans l'équation du départ.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La solution de l'équation est $\boxed{0,75}$.

On peut aussi noter : $\boxed{S = \{0,75\}}$</td><td>On conclue par une phrase.</td></tr>
</table>

En contrôle, il faut écrire tout ce qui est en noir ci-dessus.

III – Problèmes

Exemple 1

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des poules et des lapins. J'ai compté 174 têtes et 400 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

Soit L le nombre de lapins.

Expliciter l'inconnue.
C'est souvent la question qui nous indique quelle inconnue choisir.

	Lapins	Poules	Total
Têtes	L	174 - L	174
Pattes	4 × L	2 × (174 – L)	400

4 × L + 2 × (174 – L) = 400

Ecrire l'équation

4L + 258 – 2L = 400
2L + 348 = 400
  - 348   - 348
2L = 52
÷ 2   ÷ 2
L = 26

Résoudre l'équation

Il y a **26 lapins** et 174-26 = **148 poules**.

Interpréter le résultat

Vérification :
Têtes : 26 + 148 = 174
Pattes : 4×26 + 2×148 = 400
C'est bon

Vérifier sur les données du problème

Exemple 2

Jules à 8 ans et son père a 42 ans.
Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

Soit x le nombre d'années à attendre.

Expliciter l'inconnue. Ici on choisit toujours le temps à attendre.

	Jules	Père
Aujourd'hui	8	42
Dans x années	$8 + x$	$42 + x$

Père = 3 × Jules
$42 + x = 3 \times (8 + x)$

Ecrire l'équation

$42 + x = 24 + 3x$
- 24 $-x$ - 24 $-x$
$18 = 2x$
÷ 2   ÷ 2
$9 = x$

Résoudre l'équation

Il faut attendre **9 ans**.

Interpréter le résultat

Vérification : dans 9 ans
Jules : 8 + 9 = 17 ans
Père : 42 + 9 = 51 ans
3 × 17 = 51
C'est bon

Vérifier sur les données du problème

Exemple 3

Un kilogramme de poire coûte un euro de plus qu'un kilogramme de pommes.
Marion a acheté trois kilos de pommes et cinq kilos de poires. Elle a payé vingt-cinq euros.
Quel est le prix d'un kilo de pommes ? de poires ?

Soit x le prix d'un kilogramme de pommes.

	Pommes	Poires	Total
Quantité en kg	3	5	
Prix au kg	x	$x + 1$	
Prix à payer	$3 \times x$	$5 \times (x + 1)$	25

$3 \times x + 5 \times (x + 1) = 25$

$3x + 5x + 5 = 25$

$8x + 5 = 25$

$\quad -5 \quad -5$

$8x = 20$

$\div 8 \quad \div 8$

$x = 2{,}5$

Les pommes coûtent **2,5 €** au kilo
et les poires coûtent 2,5 + 1 = **3,5 €** au kilo.

Vérification :

Pommes : 3 × 2,5 = 7,5
Poires : 5 × 3,5 = 17,5
Total : 7,5 + 17,5 = 25

C'est bon

Exemple 4

Marina et Karima pensent au même nombre.
Marina ajoute 8 et multiplie le résultat par 3.
Karima multiplie le résultat par 5 et ajoute 6.
Curieusement, elles trouvent le même résultat.
A quel nombre ont-elles pensé au départ ?

Soit x le nombre pensé au départ.

	Marina	Karima
Départ	x	x
Après calcul	$3 \times (x + 8)$	$5 \times x + 6$

$3 \times (x + 8) = 5 \times x + 6$

$3x + 24 = 5x + 6$

$-3x \quad -6 \quad -3x \quad -6$

$18 = 2x$

$\div 2 \quad \div 2$

$9 = x$

Elles ont pensé au nombre **9**.

Vérification :

Marina : 9 → 9 + 8 = 17 → 17 × 3 = 51
Karima : 9 → 9 × 5 = 45 → 45 + 6 = 51

C'est bon

Exemple 5

Kassandra et Arthur ont le même nombre de billes.
Si Arthur donne 10 billes à Kassandra, elle en aura alors deux fois plus que lui.
Combien ont-ils de billes au départ ?

Soit x le nombre de billes au départ.

	Kassandra	Arthur
Départ	x	x
Après calcul	$x + 10$	$x - 10$

Kassandra = 2 × Arthur

$x + 10 = 2 \times (x - 10)$

$x + 10 = 2x - 20$

$30 = x$

Ils avaient chacun **30 billes**.

Vérification :

Kassandra : 30 → 30 + 10 = 40
Arthur : 30 → 30 – 10 = 20
2 × 20 = 40

C'est bon

Exemple 6

Nathan a déjà eu 4 notes en français : 16, 9, 12 et 5.
Quelle doit être sa prochaine note s'il veut avoir 10 de moyenne ?

Soit x la prochaine note.

$$\frac{16 + 9 + 12 + 5 + x}{5} = 10$$

$$\frac{42 + x}{5} = 10$$

$42 + x = 50$

$x = 8$

Il doit avoir **8** à son prochain devoir.

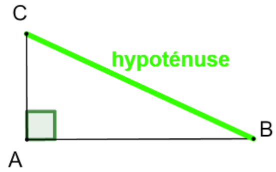
Vérification :

$$\frac{16+9+12+5+8}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

C'est bon

Triangles rectangles : PYTHAGORE

I – PYTHAGORE



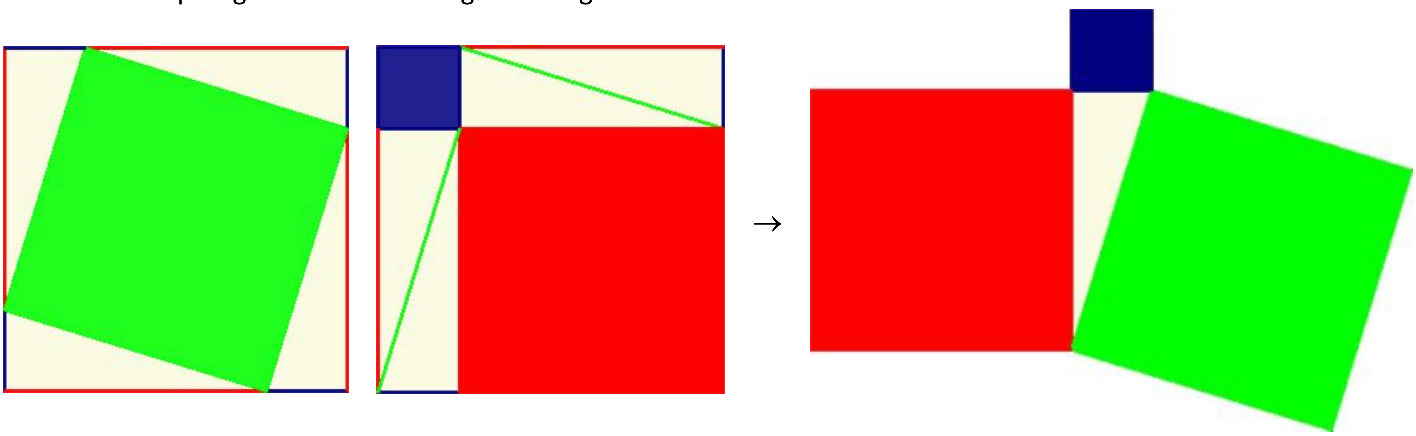
Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.

Hypoténuse vient du latin *hypotenusa* qui vient lui-même du grec *hupoteinousa* qui signifie « cele qui sous-tend ». Ce terme désigne le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit.
Les côtés adjacents à l'angle droits étaient appelés cathètes.

Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

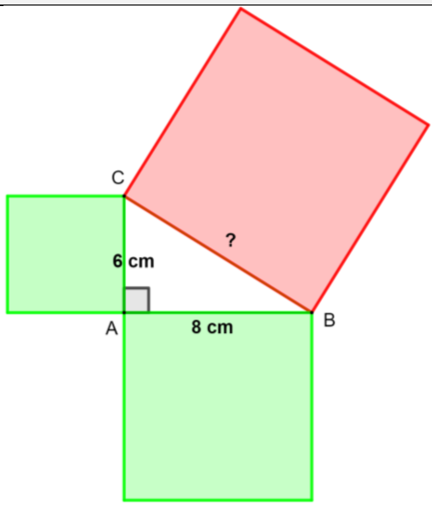
⚠ ***Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.***

Le théorème d'Al Kashi est une extension de ce théorème de Pythagore dans les triangles quelconques.

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que
- AB = 8 cm
- AC = 6 cm

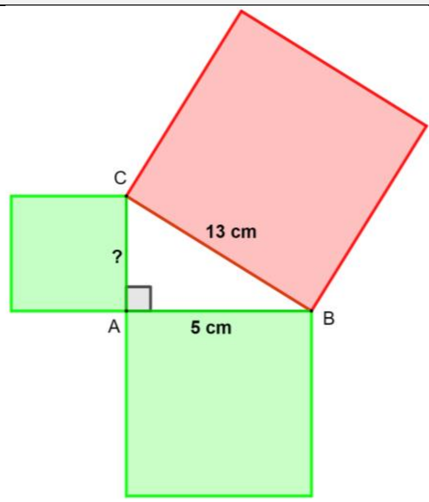
Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AC^2 + AB^2$
$BC^2 = 6^2 + 8^2$
$BC^2 = 36 + 64$
$BC^2 = 100$
$BC = \sqrt{100} = \mathbf{10\ cm}$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que
- AB = 5 cm
- BC = 13 cm

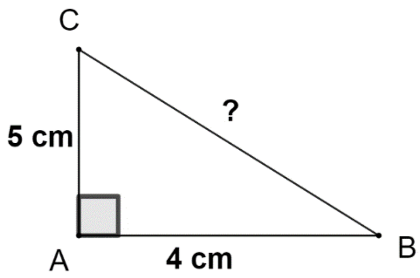
Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$13^2 = 5^2 + AC^2$
$169 = 25 + AC^2$
$-25 \quad -25$
$144 = AC^2$
$AC = \sqrt{144} = \mathbf{12\ cm}$

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que AB = 4 cm et AC = 5 cm.
Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 5^2$
$BC^2 = 16 + 25$
$BC^2 = 41$
$BC = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ cm

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	TI collège
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape		
6 x^2 + 8 x^2 EXE	6 ■ ^{2} + 8 ■ ^{2} EXE	6 x^2 + 8 x^2 =
CASIO FX92	**CASIO FX92 classwiz**	**TI collège**
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape		
SECONDE x^2 100 EXE	$\sqrt{■}$ 100 EXE	SECONDE x^2 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 3 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm. *Quelle est la nature de ABC ?*	*Soit ABC un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 7 cm et AC = 6 cm.* *Quelle est la nature de ABC ?*
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté. $AC^2 = 5^2 = 25$ | $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, **ABC est rectangle en B** *(car [AC] est l'hypoténuse).*	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté. $BC^2 = 7^2 = 49$ | $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors **ABC n'est pas rectangle**.

II – RACINES CARREES et RACINES CUBIQUES hors programme en France mais nécessaire pour le collège en Suisse

Remarque ♥

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$
$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$

$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$
$6^3 = 216$	$7^3 = 343$	$8^3 = 512$	$9^3 = 729$	$10^3 = 1000$

Définitions

La *racine carrée* de a est le nombre **positif** noté $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a}^2 = a$

La *racine cubique* de a est le nombre noté $\sqrt[3]{a}$ tel que $\sqrt[3]{a}^3 = a$

Remarques sur la racine carrée

$$5 \quad \underset{\leftarrow \sqrt{\blacksquare} \leftarrow}{\overset{\rightarrow \blacksquare^2 \rightarrow}{\rightleftharpoons}} \quad 25$$

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\sqrt{-1}$ n'existe pas

$\sqrt{-4}$ n'existe pas

Au lycée, une solution sera proposée pour ces racines carrées : les nombres complexes.

Remarques sur la racine cubique

$$5 \quad \underset{\leftarrow \sqrt[3]{\blacksquare} \leftarrow}{\overset{\rightarrow \blacksquare^3 \rightarrow}{\rightleftharpoons}} \quad 125$$

$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$\sqrt[3]{216} = 6$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$\sqrt[3]{729} = 9$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$\sqrt[3]{-1} = -1$	$\sqrt[3]{-8} = -2$	$\sqrt[3]{-27} = -3$	$\sqrt[3]{-64} = -4$	$\sqrt[3]{-125} = -5$
$\sqrt[3]{-216} = -6$	$\sqrt[3]{-343} = -7$	$\sqrt[3]{-512} = -8$	$\sqrt[3]{-729} = -9$	$\sqrt[3]{-1000} = -10$

Propriétés admises

Soient *a* et *b* deux nombres positif avec *b* non nul.

$$\sqrt{a}^2 = a$$
$$\sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pour tous les nombres *a* et *b* avec *b* non nul.

$$\sqrt[3]{a}^3 = a$$
$$\sqrt{a^3} = a$$
$$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$$
$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Exemples de calculs

$\sqrt{5}^2 = 5$

$\sqrt{3^2} = 3$

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

$\sqrt{1,2}^2 = 1,2$

$\sqrt{5,2^2} = 5,2$

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt[3]{7}^3 = 7$

$\sqrt{11^3} = 11$

$\sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \times 20} = \sqrt[3]{1000} = 10$

$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3}$

$\sqrt[3]{-8}^3 = -8$

$\sqrt{(-4)^3} = -4$

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Définition

Simplifier une racine s'est transformer une racine en produit d'un entier par une racine d'un nombre dont la distance à zéro est plus petite.

Astuce
Pour simplifier la racine d'un entier, il faut écrire l'entier sous la forme du produit d'un carré (ou cube) par un entier

Exemples de simplification de racines carrées

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

$\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{72} = \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$$7\sqrt{50} - 4\sqrt{18} = 7 \times \sqrt{25 \times 2} - 4 \times \sqrt{9 \times 2} = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2}$$
$$= 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 23\sqrt{2}$$

Exemples de simplification de racines cubiques

$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$

$$11\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{-375} = 11\sqrt[3]{8 \times 3} + 7\sqrt[3]{-125 \times 3} = 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + 7 \times \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{3}$$
$$= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} + 7 \times (-5) \times \sqrt[3]{3} = 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3} = -13\sqrt[3]{3}$$

Remarques

Les racines doivent être simplifiées.
Les calculatrices simplifient automatiquement les racines carrées.

Exemple avec décomposition en produit de facteurs premiers

$31104 = 2^7 \times 3^5$

$$\sqrt{31104} = \sqrt{2^7 \times 3^5} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3}$$
$$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3}$$
$$= 72\sqrt{6}$$

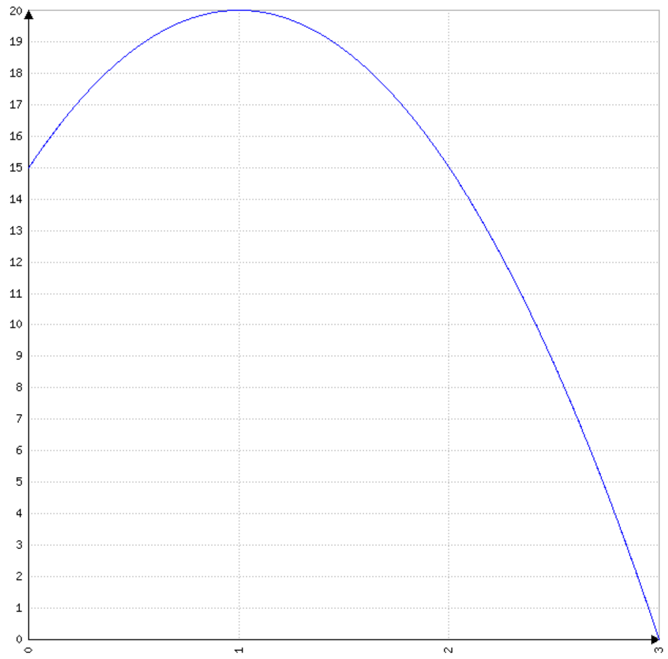
$$\sqrt[3]{31104} = \sqrt[3]{2^7 \times 3^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times 3 \times \sqrt[3]{3^2}$$
$$= 12\sqrt[3]{18}$$

FONCTIONS généralités

Exemple de la balle

On a lancé une balle en l'air.
Sur l'axe des abscisses se trouve le temps en secondes et sur l'axe des ordonnées se trouve la hauteur de la balle en mètres.

La hauteur de la balle dépend du temps ; on dit qu'on peut donner la hauteur de la balle en fonction du temps. On appelle x le temps et f la hauteur de la balle en fonction du temps. On dit qu'on peut exprimer f en fonction de x.



Après 0 seconde (au départ), la hauteur de la balle est de 15 m.
On dit que 15 est l'image de 0 par f et on note f(0) = 15, qui se lit *f de 0 égal 15*.

Après 1 seconde, la hauteur de la balle est à son maximum ; elle est de 20 m.
On dit que 20 est l'image de 1 par f et on note f(1) = 20.

Après 2 secondes, la hauteur de la balle est de 15 m.
On dit que 15 est l'image de 2 par f et on note f(2) = 15.

Après 3 secondes, la hauteur de la balle est de 0 m.
On dit que 0 est l'image de 3 par f et on note f(3) = 0.

On a déterminé (par un calcul de physique) que la hauteur en fonction du temps était donnée par la formule : $-5x^2 + 10x + 15$.

On notera :

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

ou

$$f : x \to -5x^2 + 10x + 15$$

On a vu qu'on pouvait lire l'image d'un nombre sur le graphique. Il est aisé de calculer cette image en utilisant la forme algébrique de la fonction.

Par exemple, on cherche la hauteur de la balle après 1,5 s. On va calculer f(1,5) :

$$f(1{,}5) = -5\times1{,}5^2 + 10\times1{,}5 + 15 = 18{,}75.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la hauteur de la balle après 1,5 s est de 18,75 m.

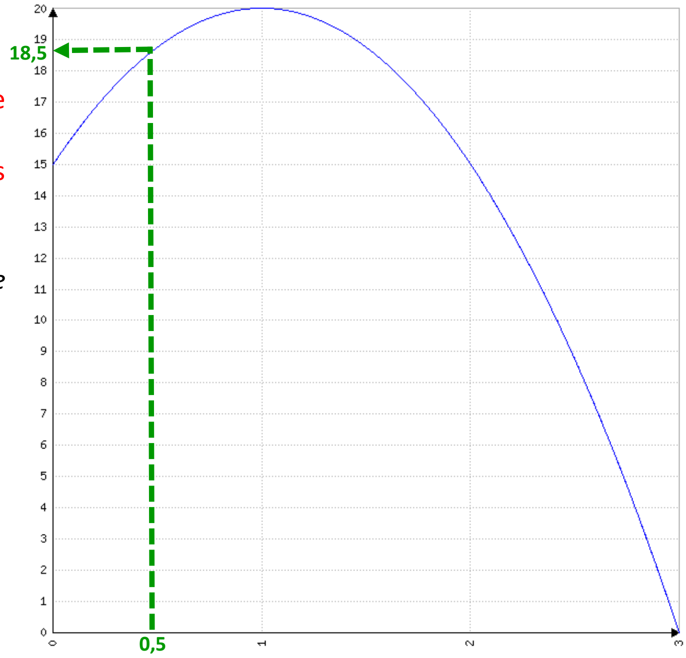
On a vu que la hauteur de la balle après 0 ou 2 secondes était la même (15 m). On dira que 0 et 2 secondes sont des antécédents de 15 m.
Le nombre 20 a un seul antécédent 1.
Le nombre 22 n'a pas d'antécédent car la balle n'est jamais montée jusqu'à 22 m.

Remarque

Un nombre a toujours une et une seule image par une fonction.
Un nombre peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents par une fonction.

Comment déterminer l'image d'un nombre par une fonction ?

Par exemple, on cherche l'image de 0,5 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.



1er cas : méthode graphique

On se positionne à 0,5 sur l'axe des abscisses.

On « monte » (ou « descend ») jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « part horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées et on lit la valeur.

On trouve ici que $f(0,5) \approx 18,5$.

Par lecture graphique, on trouve une valeur dont on ne sait pas si elle est exacte.

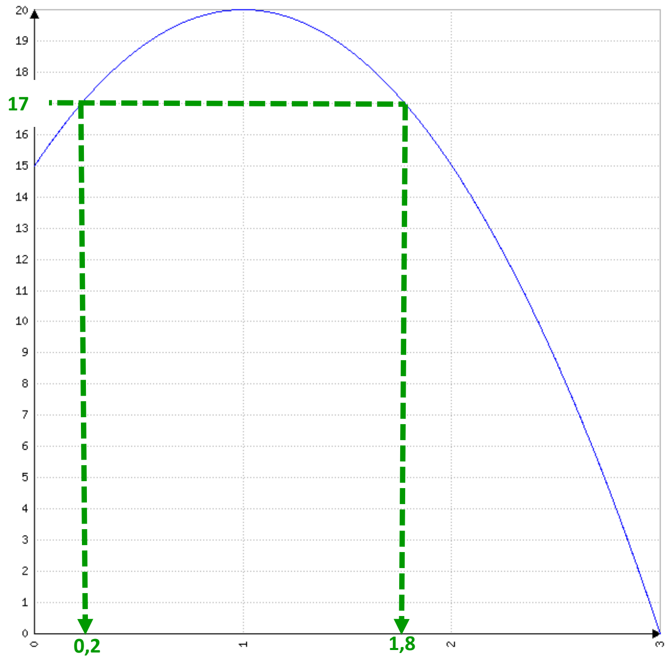
2ème cas : par le calcul

Il suffit de remplacer x par 0,5 dans la formule $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

$f(0,5) = -5\times0,5^2 + 10\times0,5 + 15 = 18,75$.

On trouve une valeur exacte.

Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction ?



1er cas : méthode graphique

Par exemple, on cherche les antécédents de 17 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

On se positionne à 17 sur l'axe des ordonnées.

On « part horizontalement » jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « monte » (ou descend) jusqu'à l'axe des abscisses et on lit les valeurs.

On trouve ici que les antécédents de 17 sont environ 0,2 et 1,8.

Par lecture graphique, on trouve des valeurs dont on ne sait pas si elles sont exactes.

Bien penser à chercher tous les antécédents.

2ème cas : par le calcul

Par exemple, on cherche les antécédents de 15 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

Il faut résoudre une équation. ***ATTENTION, ce n'est pas toujours possible***.

Au lycée, on verra comment trouver une valeur approchée avec la calculatrice graphique.

On cherche les nombres x tels que $f(x) = 15$

donc $-5x^2 + 10x + 15 = 15$

donc $-5x^2 + 10x = 0$

donc $x(-5x + 10) = 0$

Or « si un produit est nul, alors l'un, au moins, des facteurs est nul »

donc $x = 0$ ou $-5x + 10 = 0$

$-5x = -10$

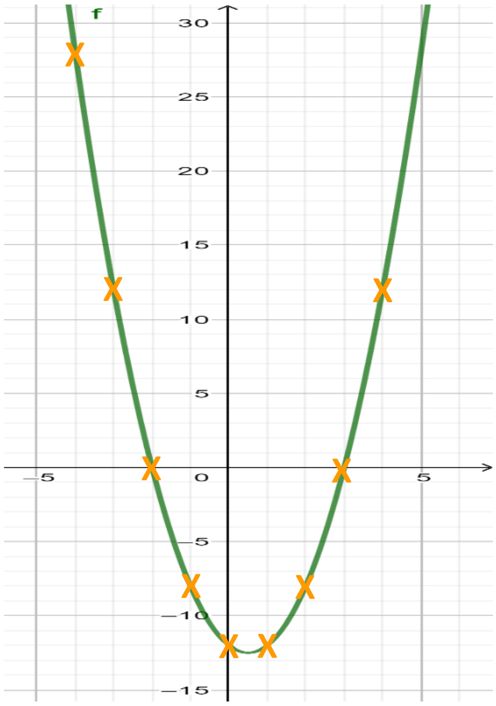
$x = 2$

Les antécédents de 15 sont 0 et 2.

Comment construire la représentation graphique d'une fonction ?

1. On construit un « tableau de valeurs ».
2. On construit un repère et on place les points dans le repère.
3. On relie les points.

Attention, les points ne sont pas obligatoirement alignés ; il faut donc les relier en formant une courbe et non pas nécessairement une droite.



Exemple

On veut construire la représentation graphique de la fonction f définie par la formule $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$ pour x appartenant à l'intervalle [-4 ; 4]

On prend n'importe quels nombres.
En général, on prend les bornes de l'intervalle (ici, -4 et 4) et on place des valeurs régulièrement. Ici, le pas (l'écart entre deux nombres) est 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	28	12	0	-8	-12	-12	-8	0	12

On calcule les images de la première ligne avec la formule
$f(x) = 2x^2 - 2x - 12$

Ce tableau de valeur peut être calculé avec la machine.

Sur la CASIO, taper

MODE 4 :table	*Place la calculatrice en mode tableau de valeur*
f(X)= 2X² - 2X – 12 EXE	*On rentre la fonction en utilisant la touche X de la calculatrice.*
Début ? -4 EXE	*On rentre le point de départ du tableau de valeur.*
Fin ? 4 EXE	*On rentre le point d'arrivée du tableau de valeur.*
Pas ? 1 EXE	*On rentre le pas du tableau de valeur (l'écart entre deux nombres).*
	On obtient le tableau de valeur
MODE 1 :comp	*Pour revenir au mode « normal »*

PROPORTIONNALITE et HOMOTHETIES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

$\downarrow \times 1{,}52$

Propriété admise

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b$ $\qquad$ $départ \xrightarrow{\times \frac{arrivée}{départ}} arrivée$

Exemples

$5 \xrightarrow{\times 3} 15$ $\qquad$ $5 \xrightarrow{\times 13} 65$ $\qquad$ $5 \xrightarrow{\times \frac{645}{5} \text{ ou } \times 129} 645$ $\qquad$ $5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7$ $\qquad$ $7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.

2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5{,}1}{3} = 1{,}7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11{,}9}{7} = 1{,}7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$\frac{4{,}80}{3} = 1{,}6$ $\qquad$ $\frac{8{,}00}{5} = 1{,}6$ $\qquad$ $\frac{11{,}00}{7} \approx 1{,}57$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix :

$65 \times 161 = 10\,465$

et $91 \times 115 = 10\,465$

donc $65 \times 161 = 91 \times 115$ donc $\frac{65}{91} = \frac{115}{161}$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix :

$7 \times 17 = 119$

et $13 \times 9 = 117$

donc $7 \times 17 \neq 13 \times 9$ donc $\frac{7}{13} \neq \frac{9}{17}$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\frac{5}{4} = \frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

5 × ? = 4 × 7 *On effectue les produits en croix*

5 × ? = 28 *On simplifie chaque membre*

? = 5,6 *On divise par 5*

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$\frac{5}{4} = \frac{7}{a}$ $\quad a = \frac{4 \times 7}{5} = 5{,}6$

$\frac{5}{4} = \frac{b}{3}$ $\quad b = \frac{3 \times 5}{4} = 3{,}75$

$\frac{c}{4} = \frac{7}{2}$ $\quad c = \frac{4 \times 7}{2} = 14$

$\frac{5}{d} = \frac{7}{3}$ $\quad d = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7}$

Exemple 5

Trouve le nombre manquant $\frac{6}{4} = \frac{5 + a}{a}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$6 \times a = 4 \times (5 + a)$ *On effectue les produits en croix*

$6a = 20 + 4a$ *On simplifie chaque membre*

$-4a \quad -4a$

$2a = 20$ *On isole les inconnues dans un membre*

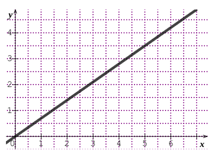
$a = 10$ *On divise les deux membres par 2*

Propriété – admise

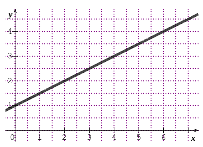
La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

- une droite
- qui passe par l'origine du repère

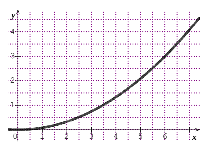
Exemples



Une droite qui passe par l'origine
Situation de proportionnalité



Une droite qui ne passe pas par l'origine



Pas une droite

Pas une situation de proportionnalité

II – Vitesse, distance et temps

3,4h ≠ 3h 40 min
3,4 h = 3h + 0,40h = 3h 24min
× 60

3h 18min ≠ 3,18h
3h 18 min = 3h + 0,30h = 3,3h
÷ 60

Conversions avec la calculatrice

Pour convertir 3,15h, je tape

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	Texas Instruments
3,15 [EXE] [°''']	3,15 [EXE] [Format] [Sexagésimal]	3,15 [2nde] [π] [→DMS] [entrer]

3,15 h = 3h 9min

Pour convertir 3h 12min, je tape

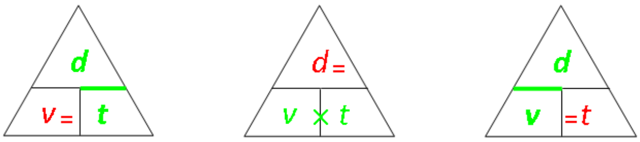
CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	Texas Instruments
3 [°'''] 12 [°'''] [EXE] [°''']	3 [↑] [+] 12 [↑] [+] [EXE] [Format] [Décimal]	3 [2nde] [π] [°] 12 [2nde] [π] [′] [entrer]

3h 12min = 3,2h

Propriétés admises

Si *d* est la distance, *t* le temps et *v* la vitesse moyenne on a alors

$v = \dfrac{d}{t}$ $\qquad d = v \times t$ $\qquad t = \dfrac{d}{v}$



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{183}{3} = 61$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

↓ ÷3

$? = \dfrac{183 \times 1}{3} = 61$

Sa vitesse moyenne est de $\boxed{61\text{ km/h}}$.

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

↓ ×3

$? = \dfrac{43 \times 3}{1} = 129$

La distance parcourue est $\boxed{129\text{ km}}$.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4{,}5} = \frac{8}{3}$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

$\rightarrow \div 4{,}5$

$? = 12 \div 4{,}5 = \frac{8}{3}$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$h = $\boxed{\text{2h 40min}}$.

Exemple 4 : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km = 135 000 m	1 h = 3 600 s
?	1 s

$\downarrow \div 3\,600$

? = 135 000 ÷ 3 600 = 37,5

135 km/h = 37,5 m/s

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
? m = ? km	3 600 s = 1h

$\downarrow \times 3600$

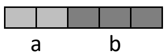
? = 15 × 3600 = 54 000 m = 54 km

15 m/s = 54 km/h

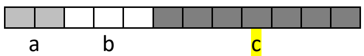
III – Ratios

Définitions

Deux nombres a et b sont dans le *ratio* 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$



Trois nombres a, b, c sont dans le *ratio* 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$



Exemple d'application 1

Les ingrédients de la pâte brisée sont dans le ratio 1 : 1 : 2

Cela signifie qu'il faut 1 part de beurre pour 1 part de sucre et 2 parts de farine.

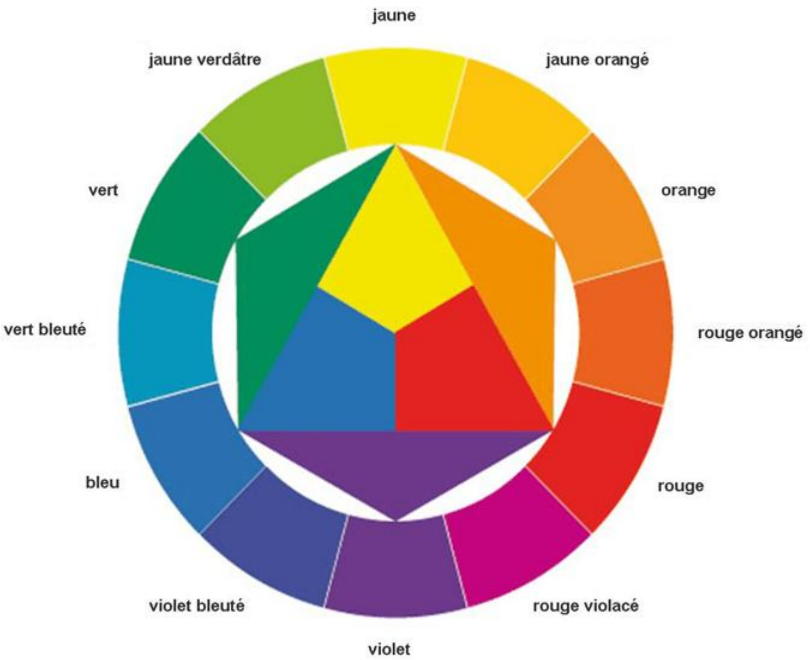
	Beurre	Sucre	Farine
	1 part	1 part	2 parts
Pour une pâte à tarte	125 g	125 g	250 g

Exemple d'application 2

Les couleurs secondaires (vert, orange et violet) sont dans le ratio 1:1. Par exemple, pour obtenir du vert, on prend 1 part de jaune et 1 part de bleu.

Pour obtenir le jaune verdâtre, on prend 1 part de vert et une part de jaune. On dit qu'il est dans le ratio 1:1 avec le vert et le jaune.

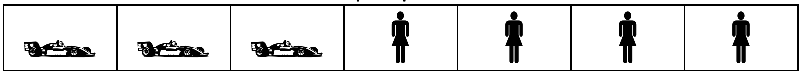
Pour obtenir le jaune verdâtre, on peut aussi pendre 1 part de bleu et 3 parts de jaune. On dit alors qu'il est dans la ration 1:3 avec le bleu et le jaune.



https://www.cours-de-peinture.net/technique-de-melange-en-peinture-acrylique/

Exemple d'application 3

Julien a rangé ses jouets dans des petites boites en carton.
Il a 3 boites de voitures et 4 boites de poupées.



On peut dire que ses jouets sont dans le ration 3:4 pour les voitures et les poupées.

Il y a $\frac{3}{7}$ de boites de voitures et $\frac{4}{7}$ de boites de poupées.

Voitures	Poupées	Total
3	4	7

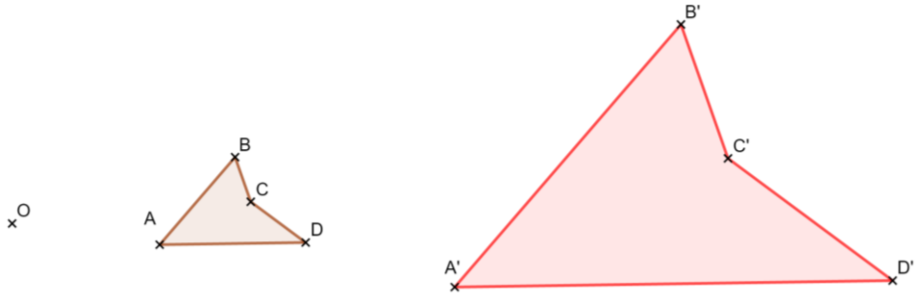
IV – Agrandissement/réduction - Homothéties

Définition

Le point A' est l'image du point A par l'*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

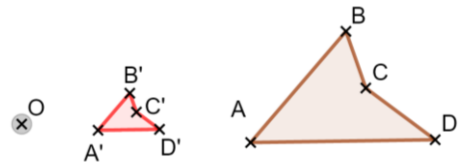
- A' $\in$ (OA)
- OA' = k × OA

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'*agrandissement*.



Le quadrilatère A'B'C'D' est agrandissement de ABCD de centre O et de coefficient 3.

Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.

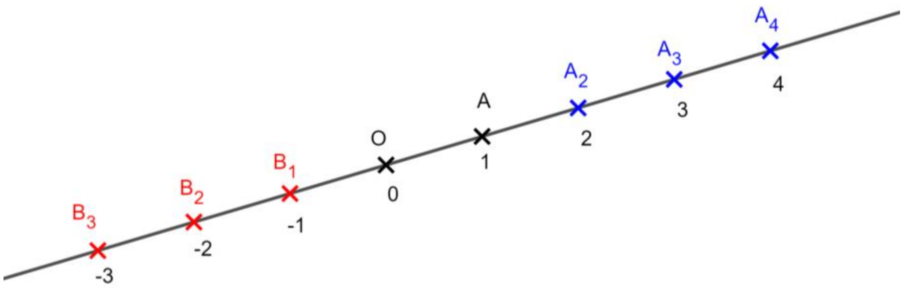


Le quadrilatère A'B'C'D' est la réduction de ABCD de centre O et de coefficient $\frac{1}{3}$.

Construction

Pour construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si k>0, tracer [OA) puis mesurer [OA] et placer A' sur [OA) tel que OA' = k × OA
- Si k<0, tracer [AO) puis mesurer [OA] et placer A' sur [AO) tel que OA' = (*distance à zéro de* k) × OA



- A_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d'agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l'année).

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu E'.
6. Tracer le segment [B'E'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

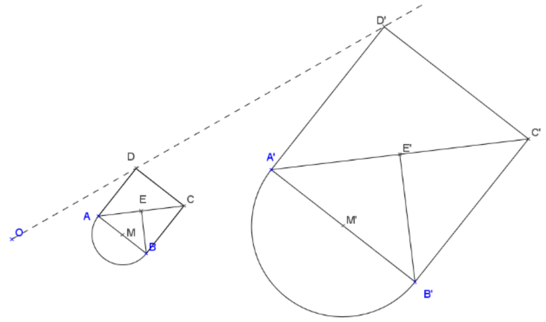


Image par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Caractériser

Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites [A'A) et [B'B) ; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer [OA] et [OA'].

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.