

ARITHMETIQUE

Exemple

Les diviseurs de 45 sont : 1, 3, 5, 9, 15 et 45.

Définition

Un *diviseur commun* à deux nombres entiers est un nombre entier qui divise chacun d'eux.

Exemples

- ▶ 2 est un diviseur commun à 6 et à 10
- ▶ Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.
Les diviseurs de 18 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18.
Donc les diviseurs communs à 12 et 18 sont 1 ; 2 ; 3 et 6.

Définition

Le *plus grand des nombres parmi les diviseurs communs à plusieurs nombres entiers* est appelé le *plus grand diviseur commun*, noté **PGCD**.

Exemple

Le PGCD de 12 et 18 est 6.
On note : **PGCD (12 ; 18) = 6**.

Définition

Le *plus petit des multiples à plusieurs nombres entiers* est appelé le *plus petit multiple commun*, noté **PPCM**.

Exemple

Les multiples de 15 sont 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ...
Les multiples de 20 sont 20 ; 40 ; 60 ; 80 ; 100 ...
Le plus petit multiple commun à 15 et 20 est 60
On note : **PPCM (15 ; 20) = 60**.

Remarque

C'est ce que l'on a intérêt à faire lorsque l'on cherche un dénominateur commun lors de l'addition (ou la soustraction de deux fractions).

Exemple

$$\frac{7 \times 4}{15 \times 4} + \frac{11 \times 3}{20 \times 3} = \frac{28}{60} + \frac{33}{60} = \frac{61}{60}$$

Comment trouver le PGCD et le PPCM de deux entiers ?

Par exemple, je veux calculer le PGCD et le PPCM de 1620 et 4704.

Je décompose 1620

1620	
810	2
405	2
135	3
45	3
15	3
5	3
1	5

$$1620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$$

Je décompose 4704

4704	
2352	2
1176	2
588	2
294	2
147	2
49	3
7	7
1	7

$$4704 = 2^5 \times 3 \times 7^2$$

Je décompose les 2 nombres en produits de facteurs premiers.
Voir la page 7.

$$1620 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$4704 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$$

$$\text{PGCD (1620 ; 4704)} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$1620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$$

$$4704 = 2^5 \times 3 \times 7^2$$

$$\text{PPCM (1620 ; 4704)} = 2^5 \times 3^4 \times 5 \times 7^2 = 635\,040$$

Pour calculer le PGCD, j'écris la décomposition sous la forme d'un produit sans puissances.

Je cherche tout ce qui est commun.

J'écris le produit de tous les facteurs communs et j'obtiens le PGCD.

Pour calculer le PPCM, j'écris les nombres sous la forme du produit de puissances.

J'écris tous les facteurs des décompositions avec la plus forte puissance puis j'effectue le produit ; j'obtiens le PPCM.

Définitions

Deux nombres entiers sont dits *premiers entre eux* si leur PGCD vaut 1.

Une fraction est dite *irréductible* si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux (donc si leur PGCD vaut 1).

Exemples

- ▶ Comme $\text{PGCD}(233 ; 377) = 1$ alors 233 et 377 sont premiers entre eux donc $\frac{233}{377}$ est irréductible.
- ▶ Comme $\text{PGCD}(42 ; 75) = 3$ alors 42 et 75 ne sont pas premiers entre eux donc $\frac{75}{42}$ est réductible (on peut la simplifier).

Comment rendre une fraction irréductible ?

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ que l'on veut rendre irréductible.

Si $\text{PGCD}(a ; b) = 1$ alors $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Si $\text{PGCD}(a ; b) \neq 1$ alors on divise le numérateur et le dénominateur de la fraction par ce PGCD et on obtient une fraction irréductible.

Exemples

- ▶ $\frac{180}{170} = \frac{18}{17}$ est irréductible car on a divisé le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur PGCD, qui est ici 10.
- ▶ $\frac{180 \div 10}{170 \div 10} = \frac{18}{17}$
- ▶ $\frac{307}{315}$ est irréductible car $\text{PGCD}(307 ; 315) = 1$

Propriété - admise

Les diviseurs communs à deux entiers sont les diviseurs de leur PGCD.

Exemples

- ▶ Comme $\text{PGCD}(1000 ; 750) = 250$ alors les diviseurs communs à 1000 et 750 sont les diviseurs de 250, ce sont donc 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50 ; 125 ; 250.
- ▶ Comme $\text{PGCD}(233 ; 373) = 1$ alors 233 et 373 n'ont que 1 comme diviseur commun.

Comment déterminer ce que l'on trouve lorsque l'on a un diviseur commun ou le PGCD ?
 Lorsqu'il s'agit d'un mélange, le PGCD est le nombre de paquets.
 Lorsqu'il ne s'agit pas d'un mélange, le PGCD est le nombre d'objets dans un paquet.

Exemple

Enoncés	Jacques dispose de 144 billes et 40 soldats de plomb. Il veut tout donner à ses copains de telle sorte que chaque copain ait ...	
	le même nombre d'objets de chaque sorte. Combien a-t-il de copains au maximum et que recevront-ils ?	le même nombre d'objets : soit des billes, soit des soldats. Que recevra au maximum chaque personne et combien a-t-il de copains ?
Réponses	Pourquoi un diviseur commun ?	Comme il veut utiliser toutes les billes et tous les soldats de plomb et comme chacun recevra la même chose, alors le nombre de copains est un diviseur commun à 144 et 40.
	Pourquoi le plus grand ?	Comme il veut partager en un maximum de copains, alors le nombre de copains est le PGCD de 144 et 40.
	Calcul du PGCD	Je décompose 144 144 72 36 18 9 3 1 2 2 2 2 3 3 Je décompose 40 40 20 10 5 1 2 2 2 5 $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$ $\text{PGCD}(144 ; 40) = 2 \times 2 \times 2 = 8$
	Phrase réponse	Il a 8 copains et chacun aura $144 \div 8 = \mathbf{18}$ billes et $40 \div 8 = \mathbf{5}$ soldats. Chacun recevra 8 objets . Il y aura $144 \div 8 = \mathbf{18}$ copains qui auront 8 billes et $40 \div 8 = \mathbf{5}$ copains qui auront 8 soldats .

PGCD avec la calculatrice ou sur l'ordinateur

Pour calculer le PGCD d 18 et 12, je tape

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	TI COLLEGE PLUS
SECONDE CALC 18 SECONDE 3 12) EXE	CATALOG puis Calcul numérique puis PGCD EXE 18 ; 12)	maths 1 18 2nde , 12) entrer

Théorème de THALES

Rappel

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$\begin{array}{ccc} \times \frac{b}{a} & & \times \frac{\text{arrivée}}{\text{départ}} \\ a \rightarrow b & \text{départ} \longrightarrow & \text{arrivée} \end{array}$$

Exemples

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \times \frac{645}{5} & & & \\ & & & \text{ou} & & \times \frac{7}{5} & \\ & & & \times 129 & & & \\ 5 & \xrightarrow{\times 3} & 15 & 5 & \xrightarrow{\times 13} & 65 & 5 \rightarrow 645 \end{array}$$

Comment identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

Soit ABC un triangle.

Si $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$ et $(BC) \parallel (DE)$ alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

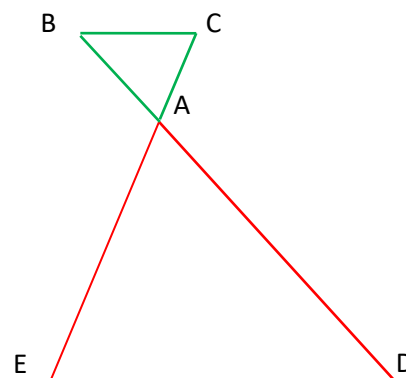
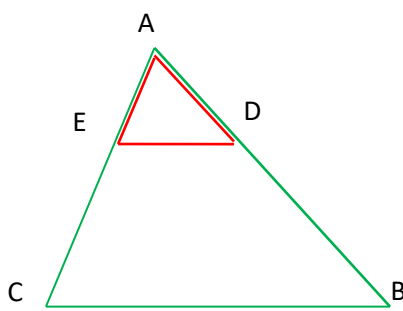
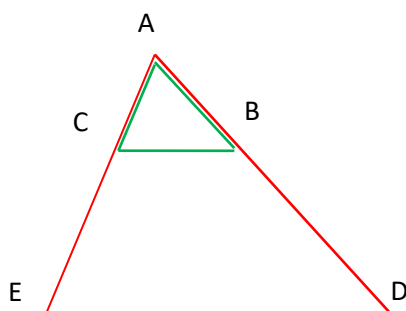
Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$ tels que $(BC) \parallel (DE)$ alors

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



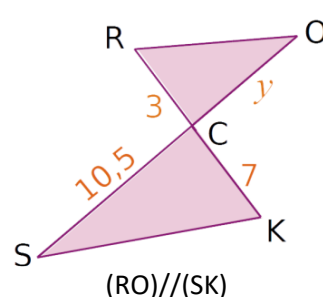
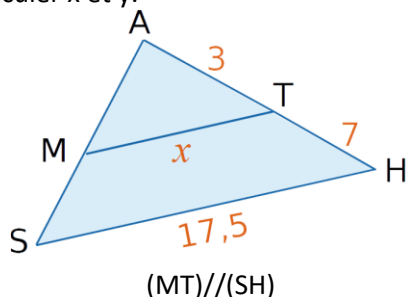
"Démonstration"

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

Exemples

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.



Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme $(MT) \parallel (HS)$, d'après le théorème de Thalès

$$\begin{aligned} \frac{AT}{AH} &= \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH} \\ \frac{3}{10} &= \frac{AM}{AS} = \frac{x}{17,5} \\ x &= \frac{3 \times 17,5}{10} = 5,25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme $(RO) \parallel (KS)$, d'après le théorème de Thalès

$$\begin{aligned} \frac{CR}{CK} &= \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK} \\ \frac{3}{7} &= \frac{y}{10,5} = \frac{RO}{SK} \\ y &= \frac{3 \times 10,5}{7} = 4,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Propriété réciproque de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{AD}{AE}$$

alors **(BC) // (DE)**

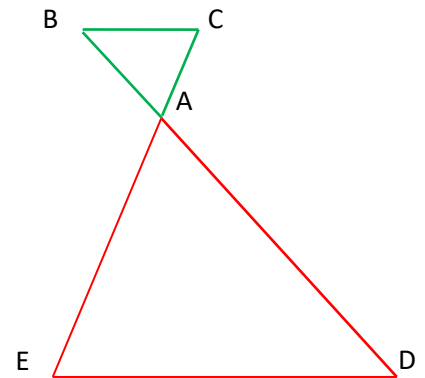
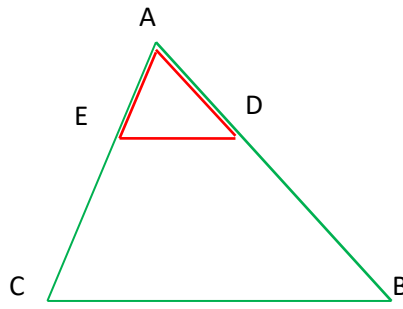
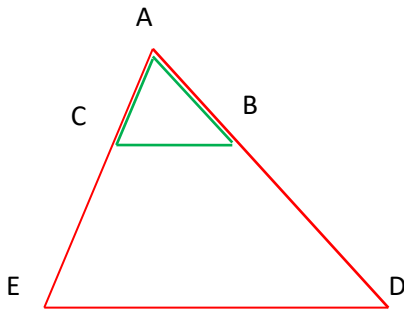
Propriété contraposée de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

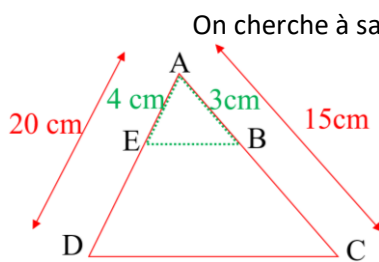
$$\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{AD}{AE}$$

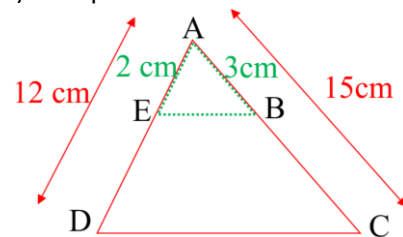
alors **(BC) et (DE) ne sont pas parallèles**



Exemples



On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.



Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$. On calcule séparément ces deux rapports

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE) // (CD).

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

donc $\frac{AB}{AC} \neq \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

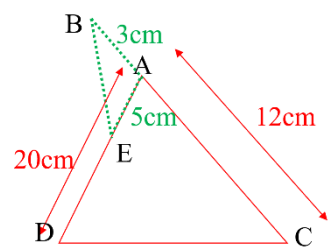
Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.

$$\text{On a : } \frac{AB}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{On a aussi : } \frac{AE}{AD} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.



Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA] sans appartenir à [DA].

DOUBLE DISTRIBUTIVITE – IDENTITES REMARQUABLES

I – Double distributivité

Propriété double distributivité

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration

$$(a + b)(c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = ac + ad + bc + bd$$

	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

Exemples

$$(x + 3)(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$$

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$(x + 5)(x - 4) = x^2 - 4x + 5x - 20 = x^2 + x - 20$$

$$(x - 8)(x + 3) = x^2 + 3x - 8x - 24 = x^2 - 5x - 24$$

$$(x - 4)(x - 6) = x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$$

$$(2x + 3)(3x + 7) = 6x^2 + 14x + 9x + 21 = 6x^2 + 23x + 21$$

Exemples complexes

$$(x + 5)(x + 4) + (x + 2)(x + 9) = x^2 + 4x + 5x + 20 + x^2 + 9x + 2x + 18 = 2x^2 + 20x + 38$$

$$(x + 5)(x - 4) + (x - 2)(x - 9) = x^2 - 4x + 5x - 20 + x^2 - 9x - 2x + 18 = 2x^2 - 10x - 2$$

$$(x + 3)(x - 2) + 5(x - 6)(x + 7) = x^2 - 2x + 3x - 6 + 5(x^2 + 7x - 6x - 42) = x^2 + x - 6 + 5x^2 + 35x - 42x - 210 = 6x^2 - 6x - 216$$

$$(x - 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 4) = x^2 - 3x - 2x + 6 - (x^2 + 4x - 5x - 20) = x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 4x + 5x + 20 = -4x + 26$$

$$(2x + 7)(3x - 4) - 8(x + 2)(x - 5) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8(x^2 - 5x + 2x - 10) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8x^2 + 40x - 16x + 80 = -2x^2 + 37x + 52$$

II – Identités remarquables

Propriété 1^{ère} identité remarquable

$$\heartsuit (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemples

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\heartsuit (a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(3x + 7)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2 = 9x^2 + 42x + 49$$

⚠ Attention

Dans la réponse, il y a la somme des deux carrés mais il ne faut pas oublier le double

Propriété 2^{ème} identité remarquable

$$\heartsuit (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemples

$$(x - 5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$\heartsuit (a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$$

$$(x - 8)^2 = x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2 = x^2 - 16x + 64$$

$$(5x - 4)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 4 + 4^2 = 25x^2 - 40x + 16$$

	a	b
a	a ²	ab
b	ab	b ²

Propriété 3^{ème} identité remarquable

♥ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Démonstration

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Exemples

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$$

♥ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$(x + 8)(x - 8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$$

$$(5x + 4)(5x - 4) = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$$

$$(t - 7)(t + 7) = t^2 - 7^2 = t^2 - 49$$

PROBABILITES

Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.

Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

Nombre de piles	Nombre de faces	Total
4 374	4 626	9 000

Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est $\frac{4\,374}{9\,000} \approx 0,486$ et la fréquence de « Face » est $\frac{4\,626}{9\,000} \approx 0,514$.

Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3						
$0,486 = \frac{48,6}{100}$	<table> <tr> <td>Pile</td><td>4 374</td><td>?</td></tr> <tr> <td>Total</td><td>9 000</td><td>100</td></tr> </table> $? = \frac{4\,374 \times 100}{9\,000}$ $? = \frac{4\,374 \times 100}{9\,000} \approx 48,6$	Pile	4 374	?	Total	9 000	100	$\text{Fréquence de A en \%} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$ $\text{Fréquence de "pile" en \%} = \frac{4\,374}{9\,000} \times 100 \approx 48,6$
Pile	4 374	?						
Total	9 000	100						

La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%.

Définitions

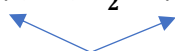
Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{2}$ et que la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{2}$.

On notera $p(\text{Pile}) = \frac{1}{2}$ et $p(\text{Face}) = \frac{1}{2}$.


p comme probabilité

Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

Nombre de tirages	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	1000000
Nombre de "Pile"	2	23	46	240	494	2470	4908	24853	49914	500 557
Fréquence de "Pile" en %	20	46	46	48	49,4	49,4	49,08	49,706	49,914	50,0557
Ecart avec la probabilité	30	4	4	2	0,6	0,6	0,92	0,294	0,086	0,0557

Exemple des dés

On tire deux dés et on effectue leur somme.

Les issues possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

On a répété de nombreuses fois l'expérience en 3^{ème}.

Voici les résultats de l'expérience :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif	73	156	223	335	410	445	367	288	208	182	101	2788
Fréquence en %	2,62 %	5,60 %	8,00 %	12,02 %	14,71 %	15,96 %	13,16 %	10,33 %	7,46 %	6,53 %	3,62 %	100 %

Les issues n'apparaissent pas avec la même fréquence.

Le premier dé a 6 issues possibles et le second aussi. Au total, il y a 6×6 issues possibles pour la somme ... mais certaines sont identiques :

$$p(2) = p(12) = 1/36 \approx 2,8\%$$

$$p(4) = p(10) = 3/36 \approx 8,3\%$$

$$p(6) = p(8) = 5/36 \approx 13,9\%$$

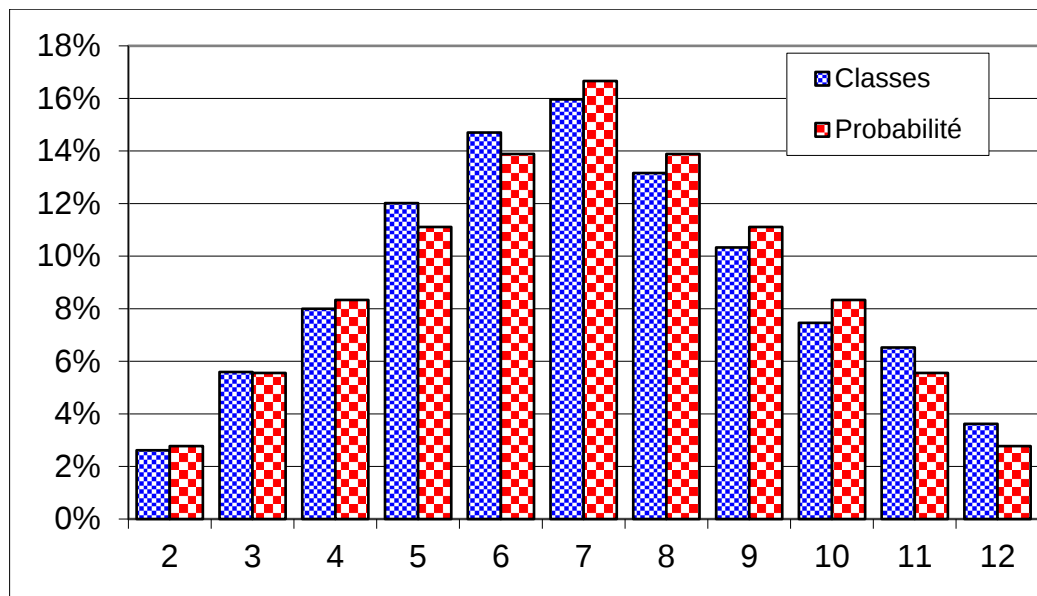
$$p(3) = p(11) = 2/36 \approx 5,6\%$$

$$p(5) = p(9) = 4/36 \approx 11,1\%$$

$$p(7) = 6/36 \approx 16,7\%$$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Somme	Issues possibles dé rouge + dé vert	Nombre d'issues possibles	Probabilité
2	1+1	1	1/36 ≈ 2,8%
3	1+2=2+1	2	2/36 ≈ 5,6%
4	1+3=2+2=3+1	3	3/36 ≈ 8,3 %
5	1+4=2+3=3+2=4+1	4	4/36 ≈ 11,1%
6	1+5=2+4=3+3=4+2=5+1	5	5/36 ≈ 13,9%
7	1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1	6	6/36 ≈ 16,7%
8	2+6=3+5=4+4=5+3=6+2	5	5/36 ≈ 13,9%
9	3+6=4+5=5+4=6+3	4	4/36 ≈ 11,1%
10	4+6=5+5=6+4	3	3/36 ≈ 8,3%
11	5+6=6+5	2	2/36 ≈ 5,6%
12	6+6	1	1/36 ≈ 2,8%
Total		36	1



Propriété admise

La somme des probabilités de toutes les issues possibles est toujours 1.

Définitions

Un événement est constitué d'une (ou plusieurs) issue(s) d'une expérience aléatoire ; on dit qu'une de ces issues réalise l'événement.

Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple des dés

- Soit A l'événement "on obtient un résultat strictement inférieur à 5".
Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 3 et 4.

$$p(A) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{On ajoute les probabilités car les issues sont incompatibles.}$$

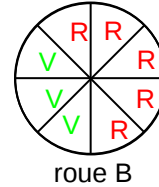
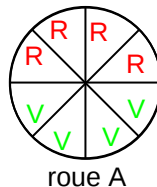
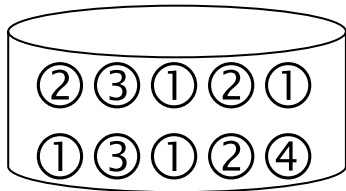
- Soit B l'événement "on obtient un nombre pair".
Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 4, 6, 8, 10 et 12.

$$p(B) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

- Soit C l'événement "on obtient un nombre impair".
Les issues qui réalisent cet événement sont 3, 5, 7, 9 et 11.

$$p(C) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Exemple d'expérience à deux épreuves



Une urne contient des boules numérotées de 1 à 4.

On tire une boule au hasard et on lit la valeur de la boule.

Si la boule est paire, on tourne la roue A ; si la boule est impaire, on tourne la roue B. Les roues sont colorées en rouge et vert.

Dans l'urne, les issues possibles sont 1, 2, 3 ou 4.

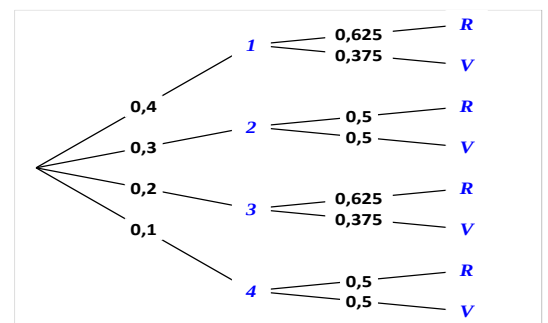
Valeur de la boule	1	2	3	4	Total
Effectif	4	3	2	1	10

On a $p(1) = \frac{4}{10} = 0,4$ et $p(2) = \frac{3}{10} = 0,3$ et $p(3) = \frac{2}{10} = 0,2$ et $p(4) = \frac{1}{10} = 0,1$.

Sur la roue A, on a $p(R) = \frac{4}{8} = 0,5$ et $p(V) = \frac{4}{8} = 0,5$.

Sur la roue B, on a $p(R) = \frac{5}{8} = 0,625$ et $p(V) = \frac{3}{8} = 0,375$.

On peut représenter l'ensemble de ces résultats par un arbre :



Définitions

Deux événements sont dits *contraires* si la somme de leur probabilité vaut 1.

Le contraire de l'événement A est noté $\bar{A}$.

L'événement contraire de « il pleut » est « il ne pleut pas »

Un événement est dit *certain* si sa probabilité vaut 1.

Exemple de l'expérience à deux épreuves

Soit A l'événement "obtenir 1 et rouge".

$$p(A) = 0,4 \times 0,625 = 0,25$$

Soit B l'événement "obtenir 2 et rouge".

$$p(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

Soit C l'événement "obtenir 3 et rouge".

$$p(C) = 0,2 \times 0,625 = 0,125$$

Soit D l'événement "obtenir 4 et rouge".

$$p(D) = 0,1 \times 0,5 = 0,05$$

Comme A, B, C et D sont incompatibles, alors $p(R) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D)$,
donc $p(R) = 0,25 + 0,15 + 0,125 + 0,05 = 0,575$.

Soit V l'événement "obtenir vert".

V et R sont contraires donc $V = \bar{R}$

donc $p(V) = p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - 0,575 = 0,425$

Exemple de problème

► On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ?
un roi ? un roi de cœur ?

► Soit A l'événement "tirer un cœur".

$$p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Soit B l'événement "tirer un roi".

$$p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Soit C l'événement "tirer un roi de cœur".

$$p(C) = \frac{1}{32}$$

ou $p(C) = p(A) \times p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$

Triangles rectangles : TRIGONOMETRIE

Premier temps : le mathématicien indien Āryabhata (VI^e siècle) utilise le mot *jīva* qui signifie corde.

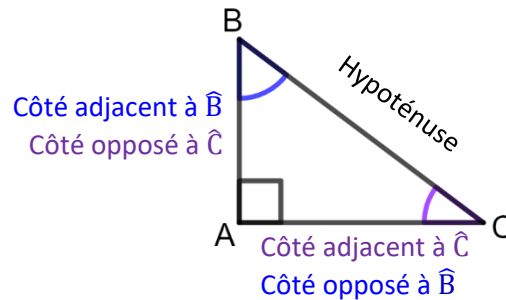
Deuxième temps : le mathématicien arabe Al-Fazzārī (VIII^e siècle) arabise ce mot en *jība*, mot n'ayant pas de signification en arabe.

Troisième temps : Gérard de Crémone (XII^e siècle) confond *jība* avec *jaīb*, d'autant plus facilement qu'en arabe, les voyelles sont parfois omises ; or *jaīb* signifie « poche, cavité » et il le traduit naturellement en latin par sinus...

Quant au cosinus, c'est tout simplement le sinus du complémentaire (de l'angle) ; « co- » vient du latin *cum*, qui signifie « avec ».

La tangente, elle, vient de ce qu'elle mesure une portion d'une tangente au cercle trigonométrique.

Définitions



Preliminaire

Dans un triangle rectangle, les rapports suivants ne dépendent que de la mesure de l'angle et non de celles des côtés :

- Côté adjacent à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé sur côté adjacent du même angle aigu.

On les appelle respectivement cosinus, sinus et tangente de l'angle aigu.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC) // (A'C').

Comme (AC) // (A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$BA' \times BC = BC' \times BA$$

$$\div BC' \quad \div BC \quad \div BC' \quad \div BC$$

$$\text{donc } \frac{BA'}{BC'} = \frac{BA}{BC} = \cos \text{ de l'angle } \hat{B}$$

$$BC' \times AC = BC \times A'C'$$

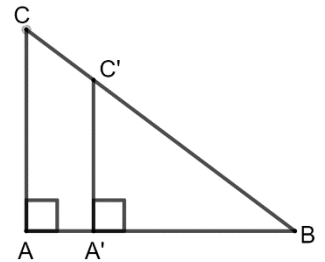
$$\div BC' \quad \div BC \quad \div BC \quad \div BC'$$

$$\text{donc } \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{BC'} = \sin \text{ de l'angle } \hat{B}$$

$$BA' \times AC = BA \times A'C'$$

$$\div BA' \quad \div BA \quad \div BA \quad \div BA'$$

$$\text{donc } \frac{AC}{BA} = \frac{A'C'}{BA'} = \tan \text{ de l'angle } \hat{B}$$



Propriété

Dans un triangle rectangle :

- Le **cosinus** d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.
- Le **sinus** d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
- La **tangente** d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par son côté adjacent.

⚠ **Comment** se rappeler des formules ?

Méthode 1 : ♥ **SOH CAH TOA** Sin = Opposé / Hypoténuse Cos = Adjacent / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

Méthode 2 : ♥ **CAH SOH TOA** Cos = Adjacent / Hypoténuse Sin = Opposé / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

Méthode 3 :

♥ **COS ADJ HYP**

COSinus = ADJacent / HYPoténuse

♥ **SIN OPP HYP**

SINus = OPPosé / HYPoténuse

♥ **TANG OPPADJ**

TANGente = OPPosé / ADJacent

Formules

$$\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC} \quad \sin(\hat{B}) = \frac{AC}{BC} \quad \tan(\hat{B}) = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{AC}{BC} \quad \sin(\hat{C}) = \frac{AB}{BC} \quad \tan(\hat{C}) = \frac{AB}{AC}$$

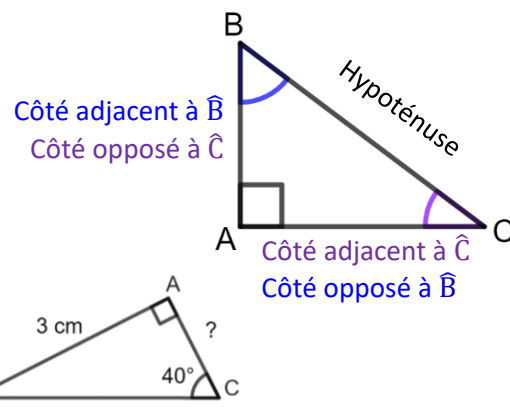
Exemple de recherche d'un côté

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3 \text{ cm}$ et $\widehat{ACB} = 40^\circ$.
Calcule AC ; donne une valeur approchée au centième près.

Réponse

Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connaît : • $\hat{C}$ • AB : opposé	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
On cherche : • AC : adjacent	
La formule doit contenir opposé et adjacent ; on va utiliser la tangente	On cherche la formule qui comprend ces informations.
$\tan(\hat{C}) = \frac{AB}{AC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\tan(40^\circ) = \frac{3}{AC}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\tan(40^\circ)}{1} = \frac{3}{AC}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$AC = \frac{3 \times 1}{\tan(40^\circ)} \approx 3,58 \text{ cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité



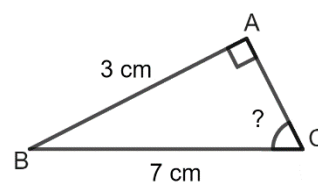
Exemple de recherche d'un angle

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3 \text{ cm}$ et $BC = 7 \text{ cm}$.
Calcule $\hat{C}$; donne une valeur approchée au degré près.

Réponse

Dans ABC rectangle en A	On cherche : • $\hat{C}$
$\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{BC}$	On connaît : • BC : hypoténuse • AB : opposé
$\sin(\hat{C}) = \frac{3}{7}$	
$\hat{C} = \arcsin\left(\frac{3}{7}\right) \approx 25^\circ$	La formule doit contenir opposé et hypoténuse ; on va utiliser le sinus



Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92 et CASIO FX92 classwiz	
Pour calculer $\frac{3 \times 1}{\tan(40^\circ)}$, je tape	Pour calculer $\arcsin\left(\frac{3}{7}\right)$, je tape
3 1 40	3 7

ANGLES et TRIANGLES SEMBLABLES

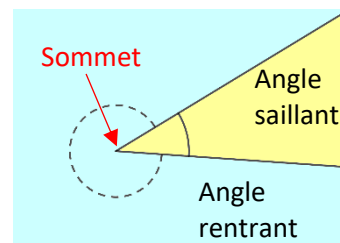
I - Angles

Définition

Un angle est une portion de droite délimitée par deux demi-droites de même origine.

Le point d'intersection des demi-droites est appelé le sommet de l'angle.

On définit, alors, même deux angles : un angle rentrant et un angle saillant.

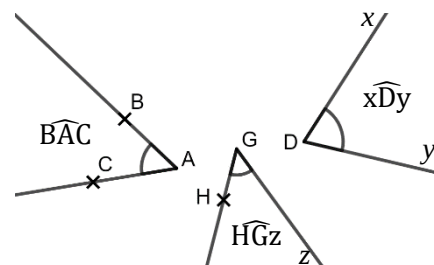


Notation

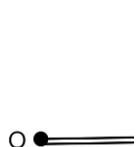
Pour nommer un angle, on prend une lettre sur chacune des demi-droites que l'on écrit de chaque côté de la lettre représentant le sommet de l'angle. On ajoute un chapeau pour signifier que c'est un angle *et non un triangle*.

On peut aussi prendre la lettre en minuscule qui représente la demi-droite.

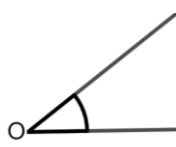
Dans le cas où il n'y a pas plusieurs angles, on peut juste noter le sommet : $\hat{A}$, $\hat{G}$ ou $\hat{D}$.



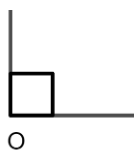
Définitions



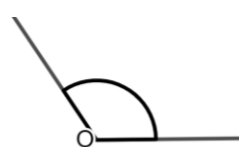
Angle nul



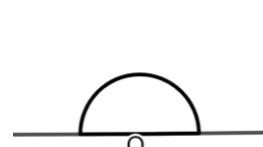
Angle aigu



Angle droit



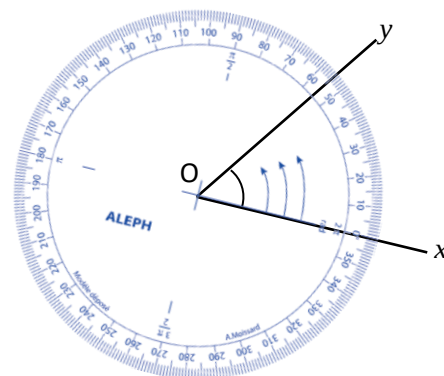
Angle obtus



Angle plat

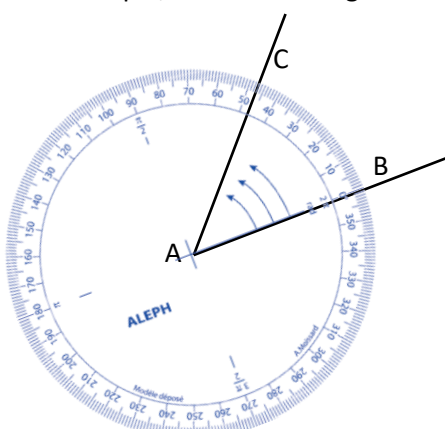
Comment mesurer un angle ?

1. On positionne le centre du rapporteur (*la croix*) sur le sommet de l'angle (*ici le point O*).
2. On tourne le rapporteur de telle sorte que le 0 de la graduation du rapporteur passe sur une des demi-droites formant l'angle, *en veillant à ce que l'angle soit bien du côté des 3 flèches du rapporteur*.
3. On lit sur quelle graduation du rapporteur passe la seconde demi-droite (*ici 55*).
4. On obtient $\widehat{xOy} = 55^\circ$

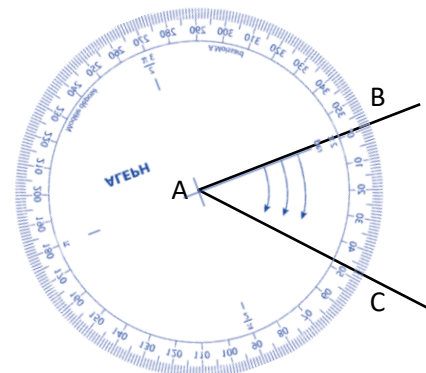


Comment construire un angle de mesure donnée ?

Par exemple, construire l'angle $\widehat{BAC} = 48^\circ$

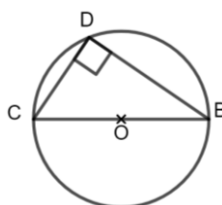


1. Le sommet de l'angle est A ; construire la demi-droite [AB]
2. Placer le centre du rapporteur sur A et le 0 de la graduation sur la demi-droite [AB]. On peut placer le rapporteur à l'envers selon le « côté » où on veut construire l'angle.
4. Placer le petit C sur la graduation 48 puis tracer la demi-droite [AC]



Propriétés admises

Si un triangle a ses 3 sommets sur un cercle et a un côté qui est un diamètre du cercle alors ce triangle est rectangle.



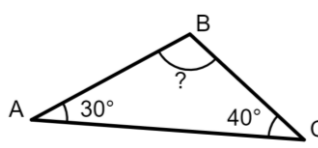
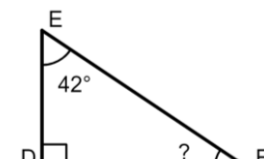
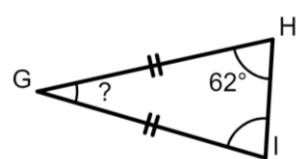
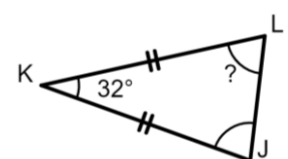
Si un triangle est rectangle alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Propriété admise

Dans un triangle, la somme des mesures des angles vaut 180° .

Dans un quadrilatère, la somme des mesures des angles vaut 360° .

Exemples d'exercices résolus

			
Dans ABC, on a : $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C})$ $\hat{B} = 180 - (30 + 40)$ $\hat{B} = 110^\circ$	Dans DEF, on a : $\hat{F} = 180 - (\hat{D} + \hat{E})$ $\hat{F} = 180 - (90 + 42)$ $\hat{F} = 48^\circ$	Comme GHI est isocèle en G, alors $\hat{H} = \hat{I} = 62^\circ$ Dans GHI, on a : $\hat{G} = 180 - (\hat{H} + \hat{I})$ $\hat{G} = 180 - (62 + 62)$ $\hat{G} = 56^\circ$	Comme JKL est isocèle en K, alors $\hat{J} = \hat{L}$ Dans JKL, on a : $\hat{J} + \hat{K} + \hat{L} = 180$ $\hat{J} + 32 + \hat{J} = 180$ $2\hat{J} = 148$ $\hat{J} = 74^\circ$

Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites sécantes en O.

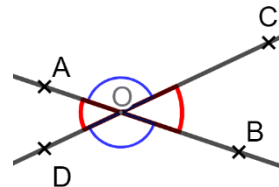
Les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$ sont dits opposés par le sommet.

Propriété admise

Des angles opposés par le sommet sont égaux.

Exemple

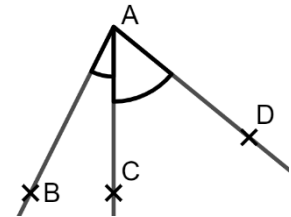
$$\widehat{AOD} = \widehat{BOC} \text{ et } \widehat{AOC} = \widehat{BOD}$$

**Définition**

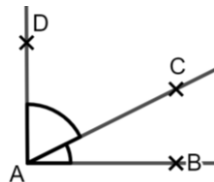
Deux angles ayant une demi-droite en commun sont dits adjacents.

Exemple

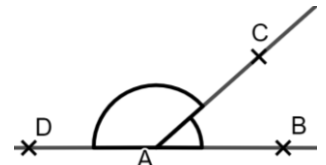
$\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont adjacents et $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$

**Définitions**

Deux angles adjacents dont la somme des mesures vaut 90° sont dits complémentaires



Deux angles adjacents dont la somme des mesures vaut 180° sont dits supplémentaires

**Définition**

Soient (AB) et (CD) deux droites ; ces deux droites forment une "bande".

Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).

Les angles $\widehat{EGB}$ et $\widehat{EHD}$ sont dits correspondants

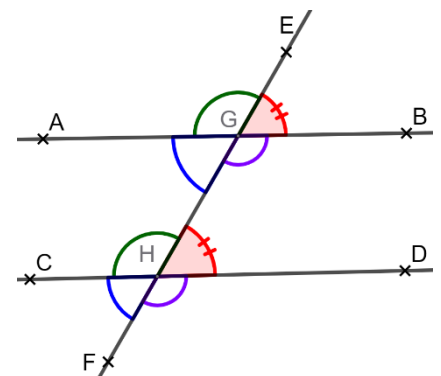
Propriétés admises

Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$

Si $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$ alors $(AB) \parallel (CD)$

Exemple ci-contre

Si $(AB) \parallel (CD)$ on a : $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$ et $\widehat{EGA} = \widehat{EHA}$ et $\widehat{FHC} = \widehat{FGA}$ et $\widehat{FGB} = \widehat{FHD}$



Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites ; ces deux droites forment une "bande".

Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).

Les angles $\widehat{EGB}$ et $\widehat{CHF}$ sont dits alternes externes

Propriétés admises

Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$

Si $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$ alors $(AB) \parallel (CD)$

Exemple ci-contre

Si $(AB) \parallel (CD)$ on a : $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$ et $\widehat{EGA} = \widehat{FHD}$

Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites ; ces deux droites forment une "bande".

Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).

Les angles $\widehat{AGF}$ et $\widehat{EHD}$ sont dits alternes internes

Propriétés admises

Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $\widehat{AGF} = \widehat{EHD}$

Si $\widehat{AGF} = \widehat{EHD}$ alors $(AB) \parallel (CD)$

Exemple ci-contre

Si $(AB) \parallel (CD)$ on a : $\widehat{AGF} = \widehat{EHD}$ et $\widehat{FGB} = \widehat{EHC}$

II – Triangles semblables

Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels
- ou
- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles

Dans le triangle ABC, on a

$$\widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180 - (102 + 49) = 29^\circ.$$

Dans le triangle A'B'C', on a

$$\widehat{B'} = 180 - (\widehat{A'} + \widehat{C'}) = 180 - (49 + 29) = 102^\circ.$$

On a donc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

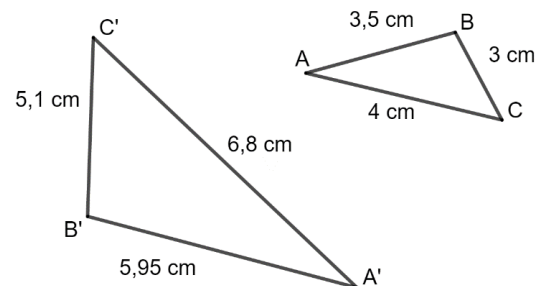
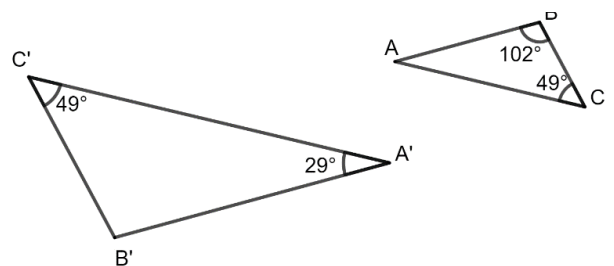
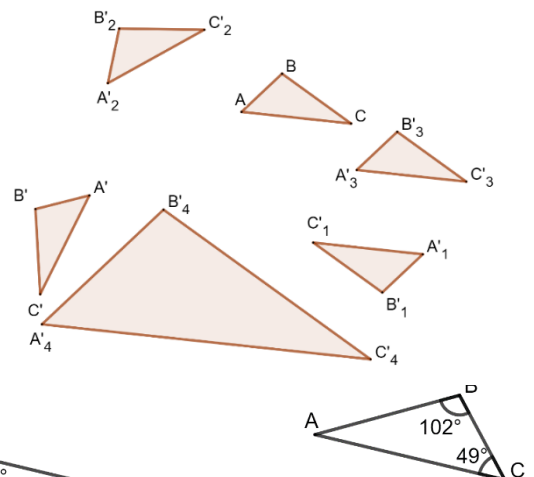
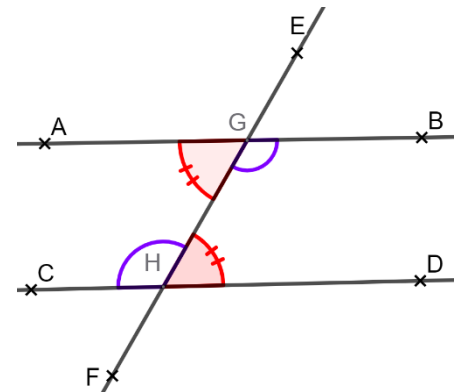
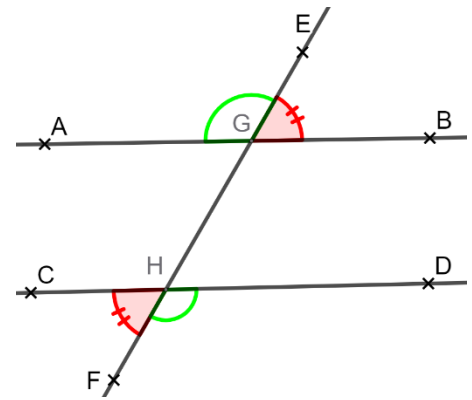
Exemple 2 : avec des côtés proportionnels

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{5,95}{3,5} = 1,7$$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{6,8}{4} = 1,7$$

$$\frac{C'B'}{CB} = \frac{5,1}{3} = 1,7$$

Donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.



FACTORISER, équations produits, équations $x^2 = a$

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Développer, c'est transformer un produit en une somme.

Exemples

Développer

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$$

Factoriser

Développer

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Factoriser

Développer

$$(x+5)(x-5) = x^2 - 25$$

Factoriser

Remarque

Il est toujours possible de développer, mais il n'est pas toujours possible de factoriser.

Comment factoriser en reconnaissant un facteur commun ?

On coupe l'expression en « blocs » séparés par les additions et les soustractions.

On ne coupe pas en 2 une parenthèse.

On reconnaît (ou on fait apparaître) un facteur commun dans une expression.

On peut souligner le facteur commun.

On isole ce facteur commun en utilisant la propriété de simple distributivité :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b).$$

Dans la parenthèse on place alors tout ce qui n'a pas été souligné.

Exemple

$$5x + 3x$$

$$= 5 \times x + 3 \times x$$

$$= x \times (5 + 3)$$

$$= 8x$$

Exemples

$$5x^2 - 3x + 2xy = 5 \times x - 3 \times x + 2 \times x \times y = x(5x - 3 + 2y)$$

$$(5x+3)(2x-7) + (5x+3)(4x+5)$$

$$= (5x+3)[(2x-7) + (4x+5)]$$

$$= (5x+3)[2x-7+4x+5]$$

$$= (5x+3)(6x-2)$$

$$(3x+4)(5x-2) + 7(3x+4)(4x+5)$$

$$= (3x+4)[(5x-2) + 7(4x+5)]$$

$$= (3x+4)[5x-2+28x+35]$$

$$= (3x+4)(33x+33)$$

$$(7x-2)(2x-7) - (5x+4)(7x-2)$$

$$= (7x-2)[(2x-7) - (5x+4)]$$

$$= (7x-2)[2x-7-5x-4]$$

$$= (7x-2)(-3x-11)$$

$$(3x+4)(5x-2) - 7(3x+4)(4x+5)$$

$$= (3x+4)[(5x-2) - 7(4x+5)]$$

$$= (3x+4)[5x-2-28x-35]$$

$$= (3x+4)(-23x-37)$$

Exemple complexe

$$(3x+5)(x-2) + 3(5x-10) \quad \downarrow \quad 5x-10 = 5 \times x - 5 \times 2 = 5(x-2)$$

$$= (3x+5)(x-2) + 3 \times 5(x-2)$$

$$= (x-2)[(3x+5) + 3 \times 5]$$

$$= (x-2)[3x+5+15]$$

$$= (x-2)(3x+20)$$

Remarque

Si on ne trouve pas de facteur commun, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant une différence de 2 carrés ?

1. On transforme, si possible, l'expression en une différence de deux carrés.

2. On factorise en utilisant la propriété $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Exemples

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5)(2x-5)$$

$$(3x+5)^2 - 49 = (3x+5)^2 - 7^2 = [(3x+5)+7][(3x+5)-7] = [3x+5+7][3x+5-7] = (3x+12)(3x-2)$$

$$(3x+5)^2 - (7x-6)^2 = [(3x+5)+(7x-6)][(3x+5)-(7x-6)] = [3x+5+7x-6][3x+5-7x+6] = (10x-1)(-4x+11)$$

Remarque

Si on ne trouve pas de différence de deux carrés, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant le développement de la 1^{ère} ou 2^{ème} identité remarquable ?

1. On identifie l'identité remarquable.
2. On identifie les deux « carrés ».
3. On vérifie que le double produit est le bon.
4. On factorise en utilisant une des propriétés : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemple

On veut factoriser $x^2 + 6x + 9$.

Il y a trois termes et cela ressemble au développement de la première identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2$.

On identifie x^2 et 9 comme les carrés de x et 3.

On calcule $2 \times x \times 3 = 6x$ et on reconnaît le morceau non choisi de l'expression.

On conclue : $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

Exemples

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

x^2 est le carré de x

25 est le carré de 5

Il y a un « + » devant le double produit.

On vérifie que $2 \times x \times 5$ est bien égal au troisième terme $10x$

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

x^2 est le carré de x

49 est le carré de 7

Il y a un « - » devant le double produit.

On vérifie que $2 \times x \times 7$ est bien égal au troisième terme : $14x$

$$16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$$

Remarque

On veut factoriser $x^2 + 7x + 49$

x^2 et 49 sont les carrés de x et 7

On calcule $2 \times x \times 7 = 14x$. On ne trouve pas $7x$

On ne peut pas factoriser $x^2 + 7x + 49$ avec cette méthode.

Propriété équation produit - admise

♥ Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Exemple

On veut résoudre l'équation $(2x + 5)(5x - 3) = 0$

$$(2x + 5)(5x - 3) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

$$2x + 5 = 0$$

$$2x = -5$$

$$x = -2,5$$

Si $x = -2,5$ alors $(2x + 5)(5x - 3)$

$$= (2 \times (-2,5) + 5) \times (5 \times (-2,5) - 3)$$

$$= 0$$

Si $x = 0,6$ alors $(2x + 5)(5x - 3)$

$$= (2 \times 0,6 + 5) \times (5 \times 0,6 - 3)$$

$$= 0$$

Les solutions de l'équation sont -2,5 et 0,6.

On peut aussi écrire : $S = \{-2,5 ; 0,6\}$

On réécrit l'équation

On cite la propriété

On résout séparément les équations.

Bien laisser le trait vertical.

On vérifie en testant si les nombres trouvés sont solution de l'équation

On conclue par une phrase

Remarques

Pour utiliser cette propriété, il faut que l'on ait un produit.

Pour cela, il peut être nécessaire de factoriser l'expression ; c'est même le principal intérêt de la factorisation.

Propriété

L'équation $x^2 = a$ admet :

- aucune solution si $a < 0$.
- une seule solution si $a = 0$; la solution est 0.
- deux solutions si $a > 0$; les solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration

Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré ne peut pas être négatif.

Si $a > 0$ on a alors : $a = \sqrt{a}^2$

L'équation $x^2 = a$ devient $x^2 = \sqrt{a}^2$ soit $x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$ soit $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$

Or « un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul »,

$$\begin{array}{l|l} x + \sqrt{a} = 0 & x - \sqrt{a} = 0 \\ x = -\sqrt{a} & x = \sqrt{a} \end{array}$$

Exemples

L'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution car $-4 < 0$.

L'équation $x^2 = 0$ a une seule solution 0.

L'équation $x^2 = 64$ a deux solutions : $\sqrt{64}$ et $-\sqrt{64}$ soit 8 et -8.

L'équation $x^2 = 11$ a deux solutions : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$.

Exemple complexe

Résoudre l'équation $(x + 3)^2 = 7$.

$$(x + 3)^2 = 7$$

$$\begin{array}{l|l} x + 3 = \sqrt{7} & x + 3 = -\sqrt{7} \\ x = -3 + \sqrt{7} & x = -3 - \sqrt{7} \end{array}$$

Les solutions sont $-3 + \sqrt{7}$ et $-3 - \sqrt{7}$

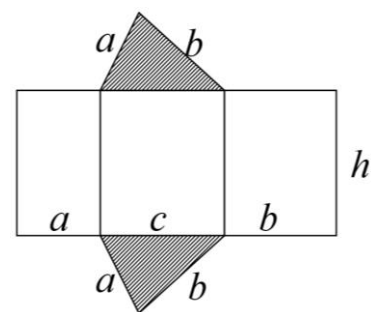
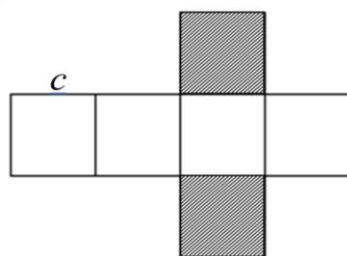
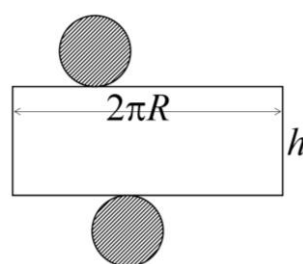
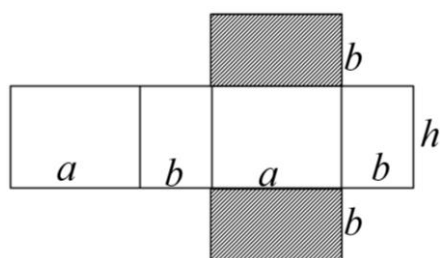
SOLIDES, agrandissement/réduction

I – Rappel sur les aires

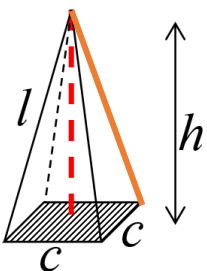
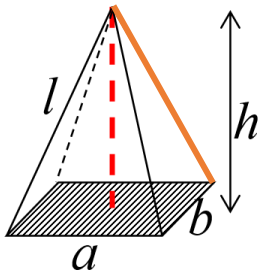
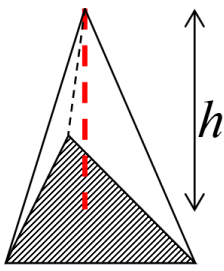
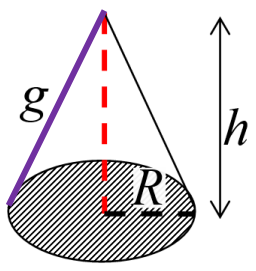
Carré $A = c^2$	Rectangle $A = L \times l$	Losange $A = d \times d' \div 2$	Parallélogramme $A = b \times h$
Triangle rectangle $A = \frac{b \times h}{2}$	Triangle quelconque $A = \frac{b \times h}{2}$	Trapèze $A = \frac{(b + B) \times h}{2}$	Disque $A = \pi \times r^2$

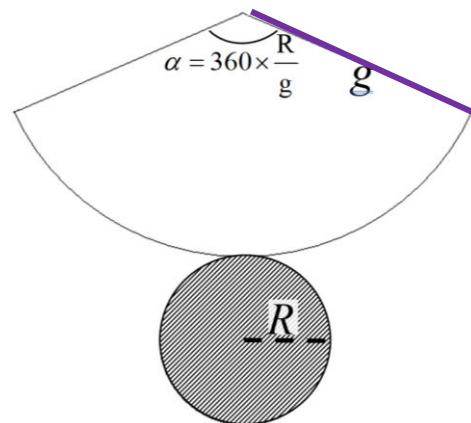
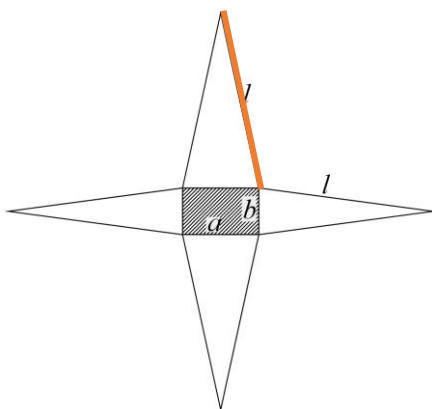
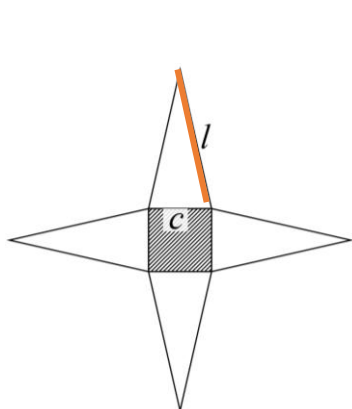
II – La famille des prismes

Parallélépipède rectangle Pavé droit $V = a \times b \times h$	Cube $V = c \times c \times c = c^3$	Cylindre $V = \pi \times R^2 \times h$	Prisme droit $V = \text{aire triangle} \times h$
♥ Volume = Aire de la base × hauteur			



III – La famille des pyramides

Pyramide régulière	Pyramide	Tétraèdre	Cône
			
♥ Volume = $\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$			
$V = \frac{c^2 \times h}{3}$	$V = \frac{a \times b \times h}{3}$	$V = \frac{\text{aire triangle} \times h}{3}$	$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$



IV – La boule et la sphère

Définition

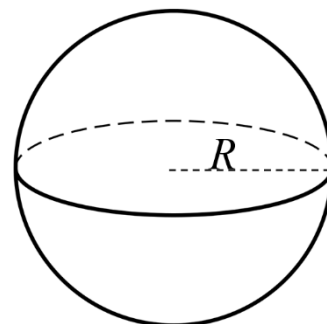
La *boule* est l'intérieur.

La *sphère* est l'extérieur, l'enveloppe

Formules

$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$

$$\text{Aire} = 4 \times \pi \times R^2$$



V – Conversions

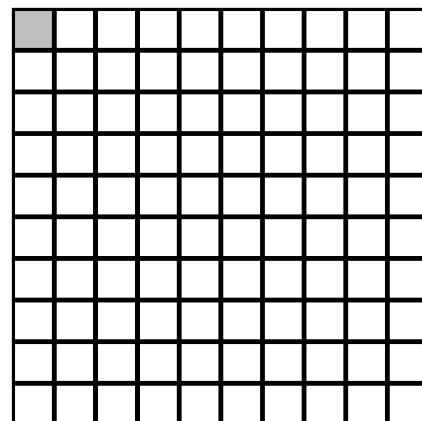
Longueurs

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
					1	0



Aires

km ²		hm ²		dam ²		m ²		dm ²		cm ²		mm ²	
		ha		a		ca							
						1	0	0					
				3	5	0,							
		7	0										



1 ha se lit « un hectare »

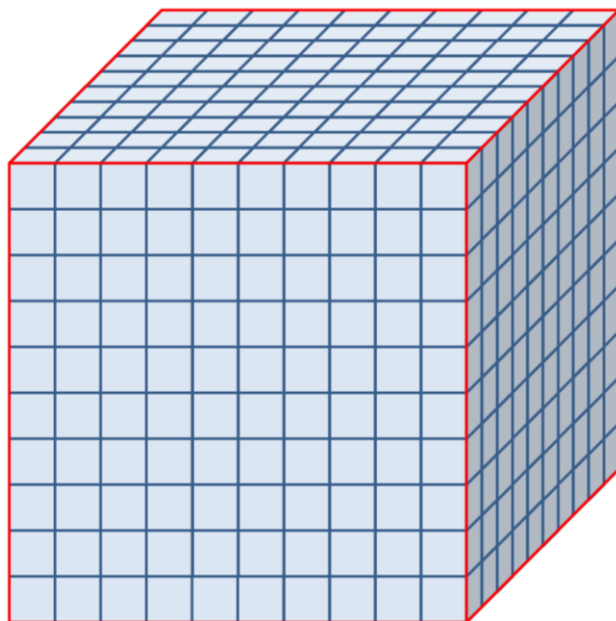
1 a se lit « un are »

1 ca se lit « un centiare »

Volumes

km ³			hm ³			dam ³			m ³			dm ³			cm ³			mm ³		
											hL	daL	L	dL	cL	mL				
									1	0	0	0								
											1	5,	3	4						
												2,	4	5	4					

1 dm³ = 1L



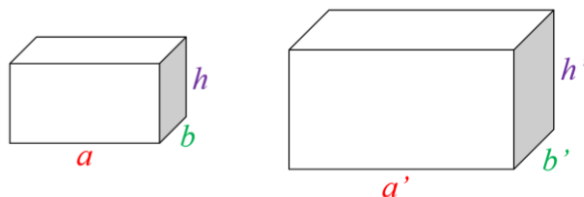
VI – Agrandissements / réductions

Propriété admise

Si une figure est un agrandissement (ou une réduction) d'une autre figure de rapport k :

- les distances sont multipliées par k ,
- les aires sont multipliées par k^2 ,
- les volumes sont multipliés par k^3 .

Démonstration dans le cas des pavés droits.



Si le pavé de droite est un agrandissement du pavé gauche de coefficient k , alors on a :

$$a' = k \times a, b' = k \times b, \text{ et } h' = k \times h.$$

Le volume du pavé de gauche est $V = a \times b \times h$

Le volume du pavé de droite est $V' = a' \times b' \times h'$

$$V' = a' \times b' \times h' = k \times a \times k \times b \times k \times h = k^3 \times a \times b \times h = k^3 \times V$$

Comment calculer le coefficient d'agrandissement-réduction ?

1. On repère une distance connue sur les 2 solides.
2. On calcule le coefficient par la formule :

$$k = \frac{\text{distance sur le solide d'arrivée}}{\text{distance correspondante sur le solide de départ}}$$

Pour trouver le coefficient d'agrandissement-réduction, on repère une longueur connue sur le solide de départ et sur le solide d'arrivée.

Exemple 1

On donne une pyramide régulière de base ABCD et de sommet S.

On donne $AB = 12 \text{ cm}$ et $OS = 21 \text{ cm}$.

1°) Calculer le volume de SABCD.

2°) On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base ABCD.

On obtient une réduction $SA'B'C'D'$.

On donne $A'B' = 9 \text{ cm}$.

Calculer le rapport de réduction.

En déduire le volume de $SA'B'C'D'$.

1°) Soit V le volume de SABCD.

$$V = \frac{AB \times BC \times SO}{3} = \frac{12 \times 12 \times 21}{3} = 1008$$

Le volume de la pyramide SABCD est 1008 cm^3 .

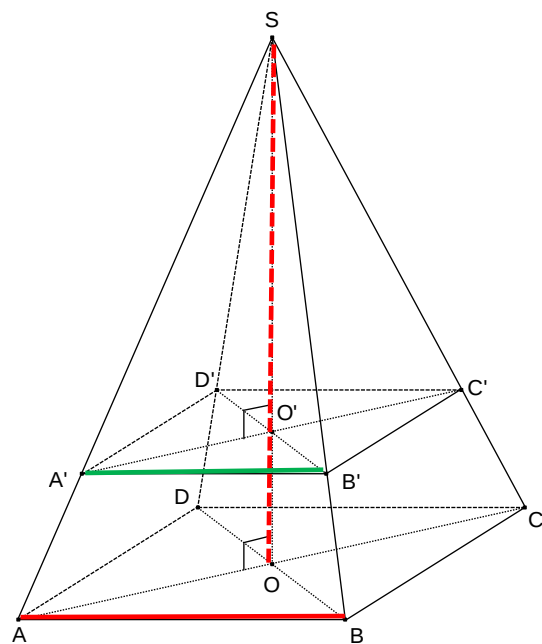
2°) Soit k le coefficient de réduction de SABCD vers $SA'B'C'D'$.

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Soit V' le volume de $SA'B'C'D'$.

$$V' = k^3 \times V = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 1008 = 425,25$$

Le volume de $SA'B'C'D'$ est $425,25 \text{ cm}^3$.



Exemple 2

Sur la figure suivante, on donne les informations suivantes :

- $SO = 6 \text{ cm}$
- $AO = 5 \text{ cm}$
- $SO' = 15 \text{ cm}$.

Calculer le volume du grand cône.

On donnera le volume en litre, arrondi au millilitre près.

Soit V le volume du petit cône.

$$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times OA^2 \times OS}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 6}{3} = 50\pi \text{ cm}^3$$

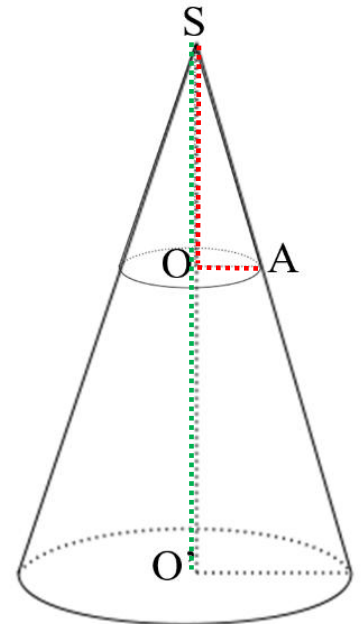
Soit k le coefficient d'agrandissement du petit vers le grand cône.

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{15}{6} = 2,5$$

Soit V' le volume du grand cône.

$$V' = k^3 \times V = 2,5^3 \times 50\pi = 781,25\pi$$

Le volume du grand cône est $781,25\pi \approx 2454 \text{ cm}^3 = 2,454 \text{ l}$.



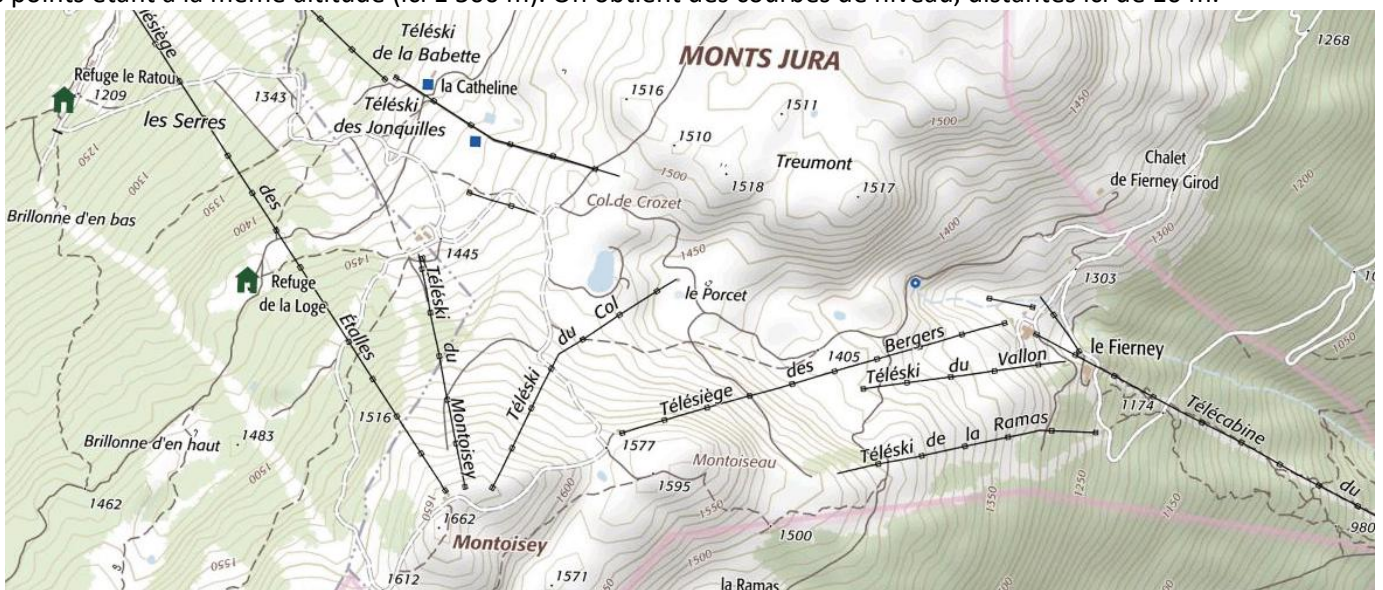
VII – Sections

Le pavé droit	Le cône	Le cylindre
La sphère		La pyramide

Courbes de niveau

Pour une carte géographique, on sectionne la terre par des sphères de rayons différents correspondants à des altitudes différentes.

Par exemple, on sectionne par une sphère de rayon 1 500 m de plus que le rayon terrestre. On visualise ainsi tous les points étant à la même altitude (ici 1 500 m). On obtient des courbes de niveau, distantes ici de 10 m.



<https://www.geoportail.gouv.fr/>

VIII – Repérage

Avec 1 dimension

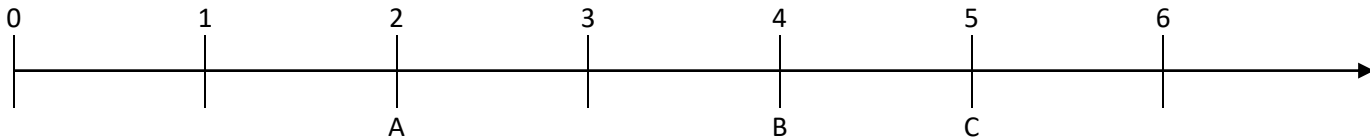
Pour se repérer, on a besoin de 2 points :

- l'origine (souvent le point O)
- l'unité (souvent le point I, ou le nombre 1).

On appelle *droite graduée*, une droite sur laquelle on a placé une origine et une unité.



Pour graduer la droite, il faut reporter l'unité.



Au lieu de parler de droite graduée, on pourra aussi parler d'axe gradué.

Lorsque l'on place un point sur une droite graduée, le nombre correspondant à ce point est appelé l'abscisse de ce nombre.

Certaines fois on emploiera le mot abscisse.

L'abscisse de A est 2 ; on notera A(2).

L'abscisse de B est 4.

Le nombre 4 est l'abscisse du point B.

Le point C a pour abscisse 5.

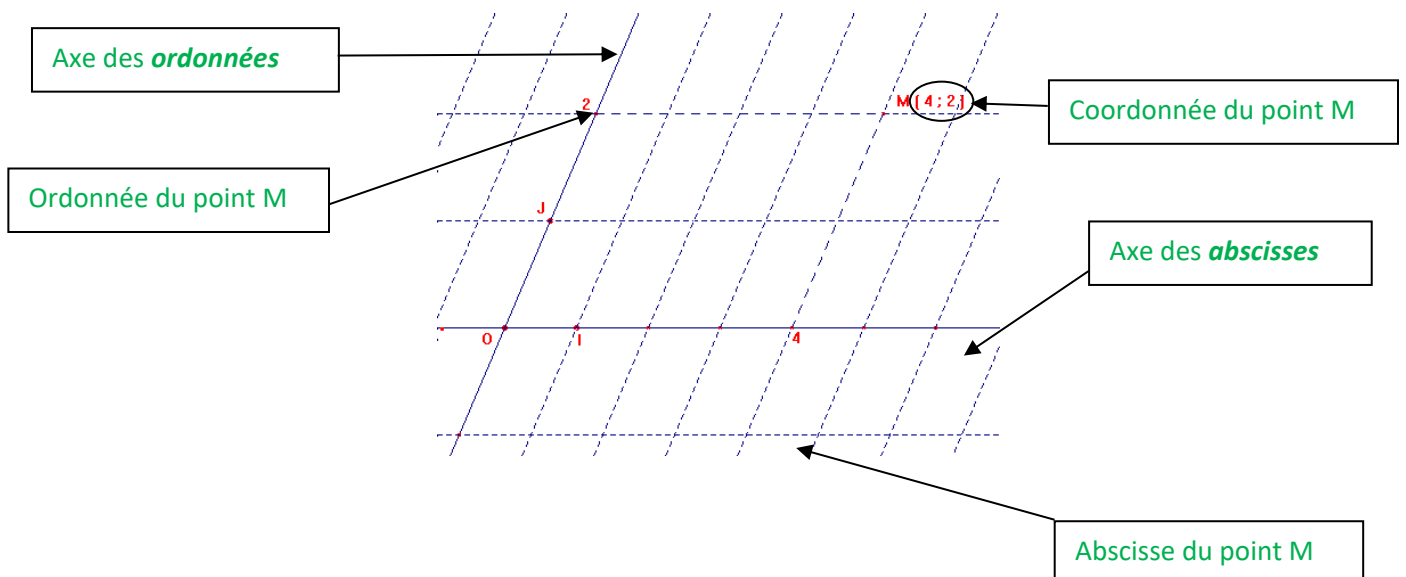
Avec 2 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 3 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.

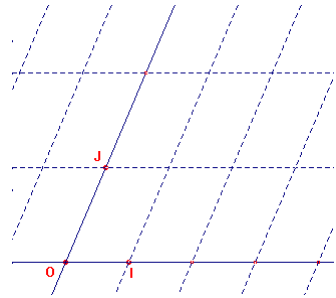
Le repère (O ; I ; J) est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées.



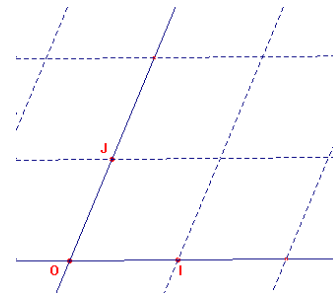
Le repère $(O ; I ; J)$ est dit *quelconque* si

- ses axes ne sont pas perpendiculaires
- les unités ne sont pas les mêmes sur les deux axes.



Le repère $(O ; I ; J)$ est dit *normé* ou *normal* si :

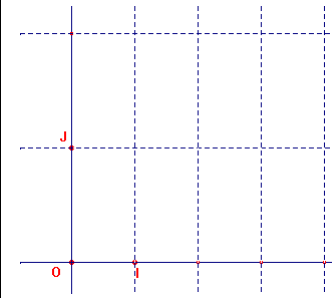
- $OI = OJ$



Même unité sur les deux axes.

Le repère $(O ; I ; J)$ est dit *orthogonal* si :

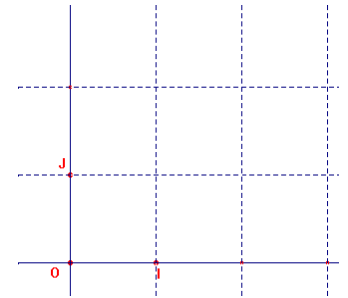
- $(OI) \perp (OJ)$



Axes perpendiculaires.

Le repère $(O ; I ; J)$ est dit *orthonormé* ou *orthonormal* si :

- $OI = OJ$
- $(OI) \perp (OJ)$



Axes perpendiculaires
Même unité sur les deux axes.

Avec 3 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 4 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.
- un point sur l'axe des hauteurs.

Le repère $(O ; I ; J ; K)$ est un repère pour lequel :

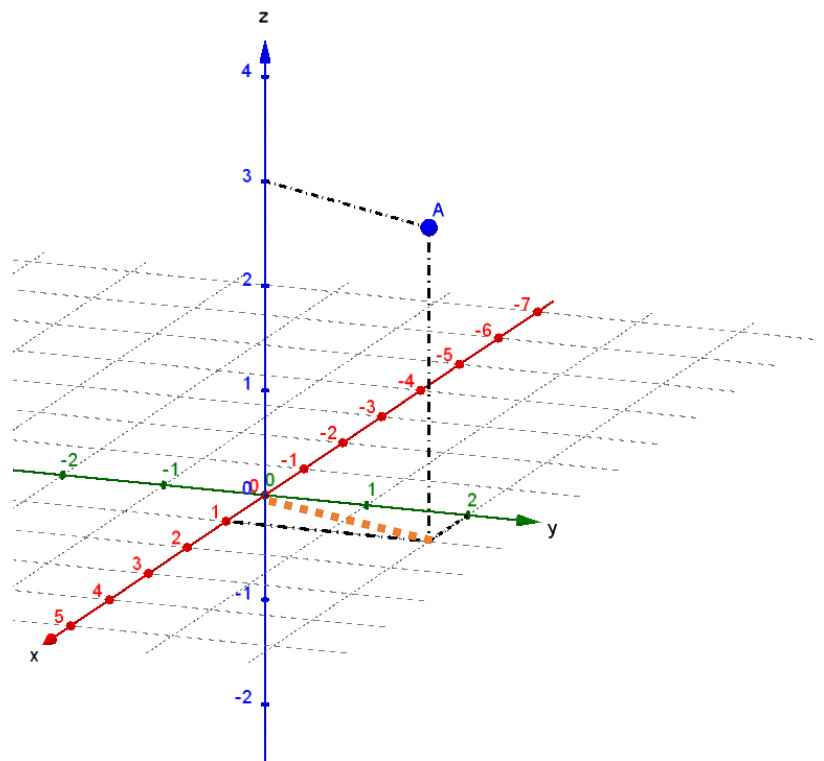
- est l'origine du repère
- **I** donne l'unité sur l'axe des abscisses
- **J** donne l'unité sur l'axe des ordonnées
- **K** donne l'unité sur l'axe des hauteurs.

Pour se repérer dans l'espace, on « projette » le point sur le plan « horizontal ».

On commence par donner les coordonnées de ce point sur le plan en traçant les parallèles aux axes du plan de base ; ici on obtient 1 et 2 ; les coordonnées de ce point sont $(1 ; 2)$.

On relie de point à l'origine du repère puis on trace la parallèle qui passe par A ; cette parallèle coupe l'axe des hauteurs qui indique alors la hauteur du point ; ici c'est 3.

Le point A a pour coordonnées : $A(1 ; 2 ; 3)$.



Avec 3 dimensions, sur une sphère par exemple la Terre

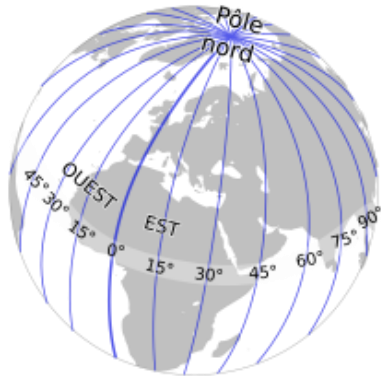
Sur une sphère, il suffit de donner deux nombres pour situer un point car on ne donne pas le troisième (qui correspondrait à l'altitude).

On va donc réaliser un « quadrillage » sur la sphère.

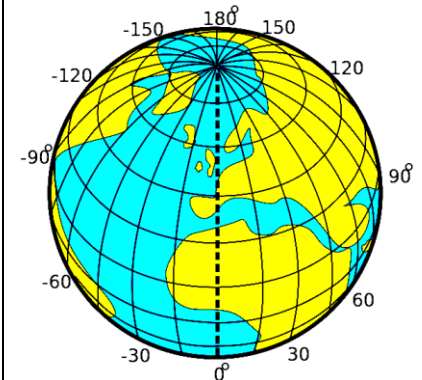
On va commencer par tracer des demi-cercles reliant les deux pôles ; on obtiendra les **méridiens**.

On va d'abord choisir un méridien particulier : celui qui passe par l'observatoire royal de Greenwich à proximité de Londres. Ce méridien coupe l'équateur en point qui sera l'origine de la graduation.

On gradue l'équateur de 0 à 180° vers l'Est et de 0 à 180° vers l'Ouest.



On va ensuite tracer les sections de la sphère par des plans parallèles à l'équateur ; on obtiendra des **parallèles**. On gradue le méridien de Greenwich de 0 à 90° vers le Nord et de 0 à 90° vers le Sud.



Les parallèles sont tous parallèles.

Les méridiens se coupent tous aux pôles Nord et Sud.

Les parallèles et les méridiens sont perpendiculaires.

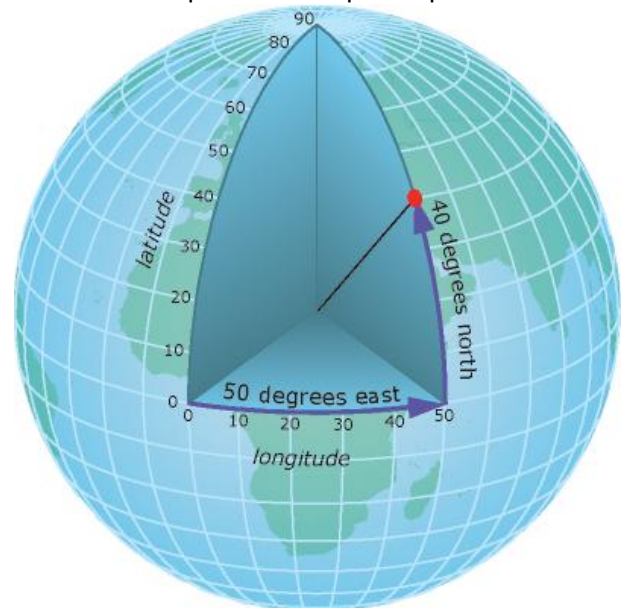
Cela donne donc un quadrillage pour lequel les mailles ressemblent plus à des trapèzes qu'à des carrés.

Pour repérer un point sur la Terre, on donne d'abord le parallèle sur lequel on se trouve.

Par exemple : 40° Nord. On appelle cela la latitude.

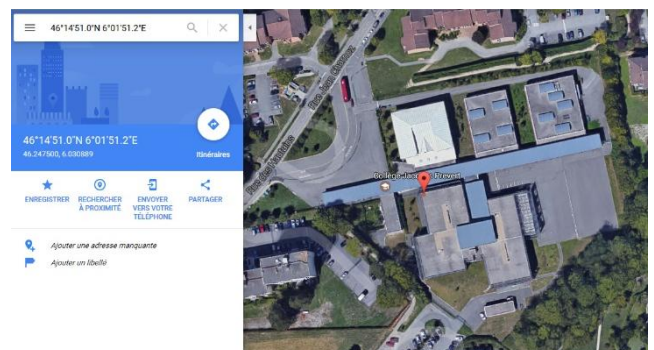
On donne ensuite le méridien. Par exemple : 50° Est. On appelle cela la longitude.

On dira que les coordonnées sont 40°N et 50°E.



Les logiciels de cartographie disponibles directement sur internet (google map, google earth, geoportail ...) permettent d'obtenir facilement les coordonnées d'un lieu sur la Terre.

Par exemple, les coordonnées de la salle de classe sont : 46°14'51.0"N 6°01'51.2"E.



STATISTIQUES

Exemple

Voici la liste des âges en mois d'élèves de troisième :

180	176	179	176	182	178	184	181	179	173	182
187	175	181	174	183	178	180	178	184	173	175
173	180	195	179	174	182	172	174	195	183	192
190	181	173	177	180	183	180	183	186	180	

Définitions

On appelle **effectif total** le nombre de valeurs de la série.

Ici, l'effectif total est 43.

On appelle **effectif de A** le nombre de fois où A apparaît dans la série.

L'effectif de 178 est 3 car il y a 3 personnes ayant 178 mois.

On appelle **fréquence de A** le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

La fréquence de 178 est $\frac{3}{43}$, ce qui signifie que 3 élèves sur les 43 du groupe ont 178 mois.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Les fréquences sont (souvent) exprimées en pourcentages.

La fréquence de 178 est $\frac{3}{43} \approx 7\%$.

$$\text{Fréquence de A en \%} = \text{Fréquence de A} \times 100 = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$$

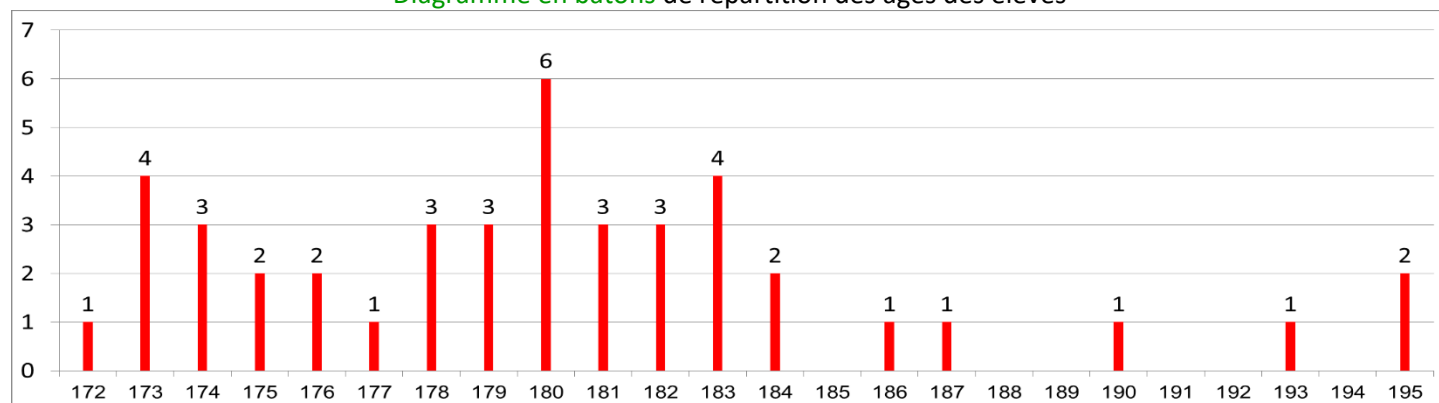
Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	192	195	Total
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2	43
Fréquence	$\frac{1}{43}$	$\frac{4}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{6}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{4}{43}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{2}{43}$	1
Fréquence en %	2 %	9 %	7 %	5 %	5 %	2 %	7 %	7 %	14 %	7 %	7 %	9 %	5 %	2 %	2 %	2 %	2 %	5 %	100 %

÷ 43

× 100

Diagramme en bâtons de répartition des âges des élèves



Définitions

On appelle **minimum** la plus petite valeur de la série.

Le minimum est 172.

On appelle **maximum** la plus grande valeur de la série.

Le maximum est 195.

On appelle **étendue** l'écart entre le minimum et le maximum.

L'étendue est $195 - 172 = 23$ mois.

On appelle *médiane* une valeur qui partage la série en deux sous-parties de même effectif tel que dans une sous-partie sont regroupées toutes les valeurs inférieures ou égales à la médiane et dans l'autre sont regroupées toutes les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

On appelle *premier quartile* la plus petite valeur de la série telle que 25% au moins des valeurs lui soit inférieure ou égale.

On appelle *troisième quartile* la plus petite valeur de la série telle que 75% au moins des valeurs lui soit inférieure ou égale.

Remarques

Une médiane peut être une valeur de la série (ou non).

Les quartiles sont obligatoirement des valeurs de la série.

Comment déterminer une médiane ?

On ordonne (on trie) la série (par ordre croissant).

On détermine l'effectif total N .

Si N est impair, la médiane est une des valeurs de la série ; c'est la $\frac{N+1}{2}$ ème.

Si N est pair, une médiane est entre deux valeurs de la série ; entre la $\frac{N}{2}$ ème et la $\frac{N}{2} + 1$ ème.

Astuce pour déterminer la position de la médiane

On calcule $\frac{N+1}{2}$

Si on trouve un nombre entier, c'est la position de la médiane dans la série

Si ce n'est pas un nombre entier, la position de la médiane est donnée par les deux entiers consécutifs encadrant $\frac{N+1}{2}$.

Exemple 1

Dans la série 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10, l'effectif total est 9, donc la médiane est la 5^{ème} valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée est 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 donc la médiane est 6.

On prend les 2 entiers consécutifs encadrant $\frac{10+1}{2} = 5,5$

On calcule $\frac{9+1}{2} = 5$

Exemple 2

Dans la série 1 ; 2 ; 6 ; 7 ; 11 ; 15 ; 15 ; 17 ; 17 ; 17, l'effectif total est 10, donc une médiane est entre la 5^{ème} valeur et la 6^{ème} valeur de la série ordonnée.

La série est déjà ordonnée donc la médiane est entre 11 et 15. On peut prendre n'importe quelle valeur, mais on choisit le « milieu » de l'intervalle. Ici, une médiane est 13.

Exemple des âges

Dans l'exemple des âges, l'effectif total est 43. Une médiane est la 22^{ème} valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée commence par : 172, 173, 173, 173, 173, 174, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 177, 178, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, 180, 180, 181, 181, 181 ...

Inutile de trier toute la série car il nous faut juste la 22^{ème} valeur.

La médiane est 180 mois.

Comment déterminer les quartiles ?

On ordonne la série par ordre croissant.

On détermine l'effectif total : N .

On calcule $\frac{N}{4}$. Si ce n'est pas un entier, on arrondi à l'entier supérieur. Ce nombre est le rang du premier quartile.

On calcule $\frac{3}{4} \times N = \frac{3N}{4}$. Si ce n'est pas un entier, on arrondi à l'entier supérieur. Ce nombre est le rang du troisième quartile.

Exemple 1

On cherche les premier et troisième quartiles de la série :

5 13 27 38 4 16 32 49

La série ordonnée est : 4 ; 5 ; 13 ; 16 ; 27 ; 32 ; 38 et 49.

L'effectif total est 8.

On calcule $\frac{8}{4} = 2$ et $\frac{3}{4} \times 8 = 6$.

Le premier quartile est la 2^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 5.

Le troisième quartile est la 6^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 32.

Exemple 2

On cherche les premier et troisième quartiles de la série :

7 9 15 18 19 25 29 32 37

La série est déjà ordonnée.

L'effectif total est 9.

On calcule $\frac{9}{4} = 2,25$; on arrondit à 3.

On calcule $\frac{3}{4} \times 9 = 6,75$; on arrondit à 7.

Le premier quartile est la 3^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 15.

Le troisième quartile est la 7^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 29.

Exemple des âges

La série ordonnée commence par : 172, 173, 173, 173, 173, 174, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 177, 178, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, 180, 180, 180, 180, 180, 181, 181, 181, 182, 182, 182, 183, 183, 183, 183, 184, 184, 186, ...

L'effectif total est 43.

On calcule $\frac{43}{4} = 10,75$; on arrondit à 11.

On calcule $\frac{3}{4} \times 43 = 32,25$; on arrondi à 33.

Le premier quartile est la 11^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 176.

Le troisième quartile est la 33^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 183.

Utilisation d'un tableur

Pour calculer la médiane d'une série de valeur comprise entre la cellule A3 et la cellule F5, je tape la formule
`=mediane(A3:F5)`

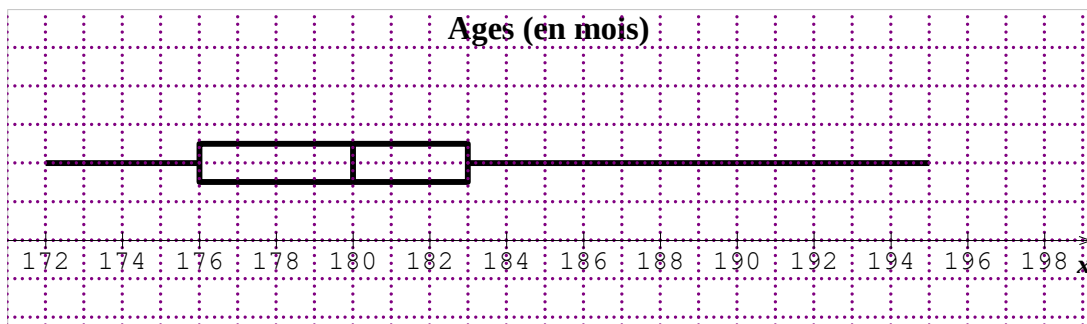
Pour calculer le premier quartile d'une série de valeur comprise entre la cellule A3 et la cellule F5, je tape la formule
`=quartile(A3:F5;1)`

Pour calculer le troisième quartile d'une série de valeur comprise entre la cellule A3 et la cellule F5, je tape la formule
`=quartile(A3:F5;3)`

Pour les quartiles, le tableur donne une valeur qui n'est pas obligatoirement une valeur de la série ...

Certaines fois, on présente ses valeurs sur une « boîte à moustaches » (ou box plot).

En voici une (simplifiée) pour la série des âges :



Comment calculer la moyenne

Méthode 1

1. On additionne toutes les valeurs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Soit M la moyenne de cette série.

$$M = (180 + 176 + 179 + 176 + 182 + 178 + 184 + 181 + 179 + 173 + 182 + 187 + 175 + 181 + 174 + 183 + 178 + 180 + 178 + 184 + 173 + 175 + 173 + 180 + 195 + 179 + 174 + 182 + 172 + 174 + 195 + 183 + 192 + 190 + 181 + 173 + 177 + 180 + 183 + 180 + 183 + 186 + 180) \div 43 \\ = 7750 \div 43 \approx 180,2 \text{ mois.}$$

L'âge moyen est de $7750 \div 43 \approx 180,2$ mois.

Comment calculer la « moyenne pondérée »

Méthode 2

1. On calcule la somme de toutes les valeurs en utilisant le tableau d'effectifs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Soit M la moyenne de cette série.

$$M = (172 + 4 \times 173 + 3 \times 174 + 2 \times 175 + 2 \times 176 + 177 + 3 \times 178 + 3 \times 179 + 6 \times 180 + 3 \times 181 + 3 \times 182 + 4 \times 183 + 2 \times 184 + 186 + 187 + 190 + 193 + 2 \times 195) \div 43 \\ = 7750 \div 43 \approx 180,2 \text{ mois.}$$

L'âge moyen est de $7750 \div 43 \approx 180,2$ mois.

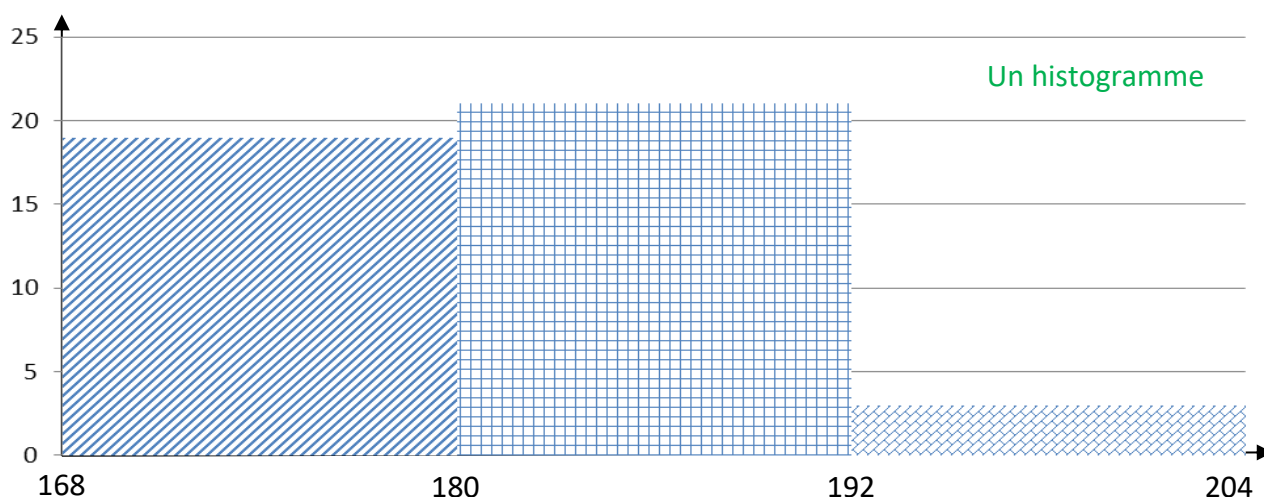
Partage en classes de valeurs

On regroupe les valeurs de la série en classes de valeurs.

Par exemple, on peut regrouper les personnes qui ont le même nombre d'années.

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %
[168 ; 180[	19	19/43	44 %
[180 ; 192[	21	21/43	49 %
[192 ; 204[	3	3/43	7 %
Total	43	1	100 %



Définition

On appelle *centre de la classe*, le milieu de l'intervalle définissant la classe.

Exemple des âges.

Le milieu de l'intervalle [168 ; 180[est 174. Pour le calculer on effectue $\frac{168+180}{2}$.

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %	Centre de la classe
[168 ; 180[	19	19/43	44 %	174
[180 ; 192[	21	21/43	49 %	186
[192 ; 204[	3	3/43	7 %	198
Total	43	1	100 %	

Calcul d'une valeur approchée de la moyenne.

On suppose que les valeurs sont regroupées aux centres des classes.

Soit M une valeur approchée de la moyenne de cette série.

$$M = (19 \times 174 + 21 \times 186 + 3 \times 198) \div 43 = 7806 \div 43 \approx 181,5 \text{ mois.}$$

Une valeur approchée de l'âge moyen est $7806 \div 43 \approx 181,5 \text{ mois.}$

Remarques

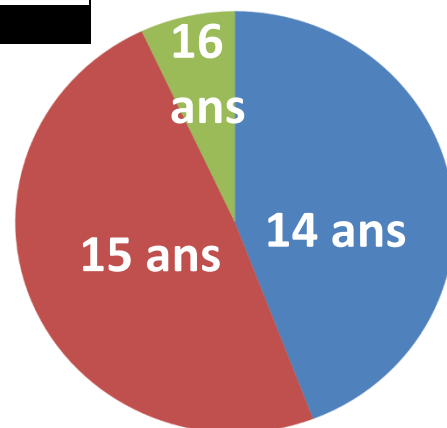
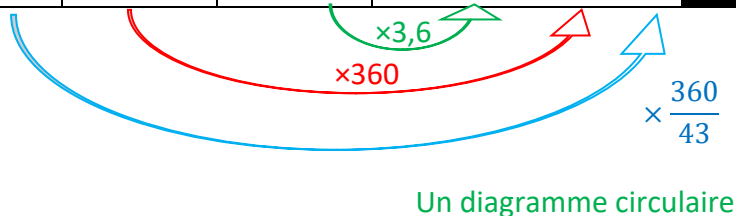
Le résultat est très bon.

La précision de la mesure est le mois et on trouve 1,3 mois d'écart avec la valeur exacte.

Cette méthode (malgré sa forte approximation) donne souvent de très bons résultats.

Exemple des âges

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %	Angle sur le diagramme circulaire en degré	Centre de la classe
[168 ; 180[	19	19/43	44 %	159°	174
[180 ; 192[	21	21/43	49 %	176°	186
[192 ; 204[	3	3/43	7 %	25°	198
Total	43	1	100 %	360°	



FONCTIONS AFFINES et LINEAIRES, pourcentages

I - Fonctions affines et linéaires

Définition

Soit p et q deux nombres.

Une fonction est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x$

Une fonction est dite affine si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x + q$

Exemples

Fonction	Linéaire ?	Affine ?
$f(x) = 3x$	Oui	Oui car $3x = 3x + 0$
$g(x) = -6x$	Oui	Oui car $-6x = -6x + 0$
$h(x) = 5x + 3$	Non	Oui
$i(x) = 7$	Non	Oui car $7 = 0x + 7$
$j(x) = \cos(x)$	Non	Non
$k(x) = x^2$	Non	Non

Propriété admise

Une situation de proportionnalité de coefficient p

- a une représentation graphique qui est une droite qui passe par l'origine du repère,
- correspond à la fonction linéaire $f(x) = p \times x$.

Soit $f(x) = p \times x + q$ une fonction affine.

Sa représentation graphique est une droite.

Exemple

Gabriel souhaite acheter des fraises pour faire de la confiture. Sur le marché, il a trouvé des fraises de France à 2,5€ le kilogramme.

Le prix des fraises est proportionnel à la masse de fraises.

Le coefficient de proportionnalité est 2,5.

On appelle x la masse de fraises en kilogrammes.

Cela correspond à la fonction linéaire $f(x) = 2,5 \times x$.

Marine est plus courageuse. Elle a trouvé un producteur qui lui offre de ramasser ses fraises pour 1,5€ le kilogramme après paiement d'une redevance forfaitaire de 20€.

Le prix des fraises chez ce producteur est donné par la fonction affine $g(x) = 1,5 \times x + 20$.

Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine ?

Comme leurs représentations graphiques sont des droites, il suffit de placer 2 points.

Afin de vérifier, il est intéressant d'en placer 3.

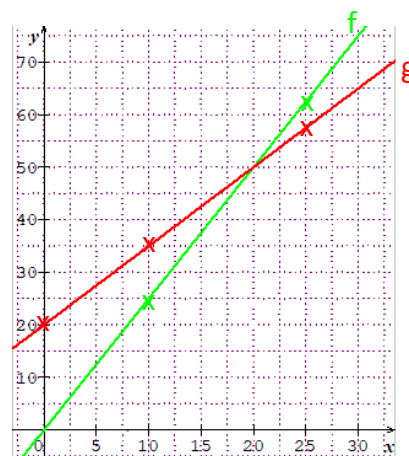
On construit donc un tableau de valeur avec 3 points.

Exemple des fraises

$$f(x) = 2,5 \times x$$

$$g(x) = 1,5 \times x + 20$$

x	0	10	25
$f(x)$	0	25	62,5
$g(x)$	20	35	57,5



Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction affine ?

On cherche les antécédents de a par la fonction affine $f(x) = p \times x + q$

Il suffit de résoudre l'équation $p \times x + q = a$

Exemple des fraises

On cherche combien Marine peut acheter de fraises avec 38€.

On cherche les antécédents de 38 donc les nombres x tels que $g(x) = 38$ donc $1,5x + 20 = 38$

$$1,5x + 20 = 38$$

$$1,5x = 18$$

$$x = 12$$

L'antécédent de 38 est 12.

On interprète ce résultat en disant que Marie peut donc acheter 12kg de fraises.

Propriété

Soit $f(x) = px + q$ une fonction affine.

La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; q)$.

Le nombre q est appelé *ordonnée à l'origine*.

Si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p .

Le nombre p est appelé *coefficient directeur*

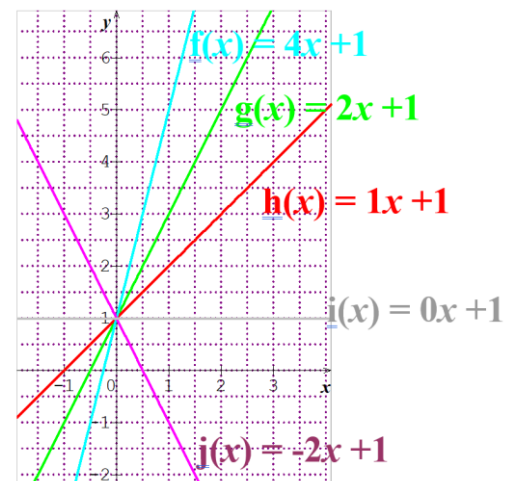
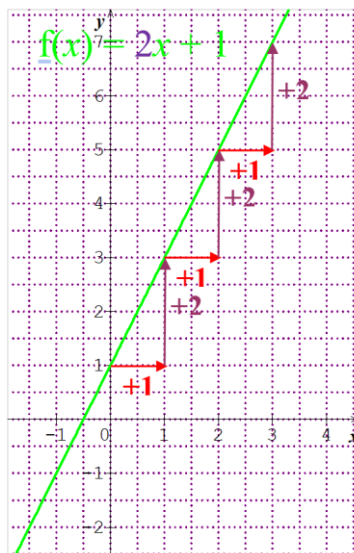
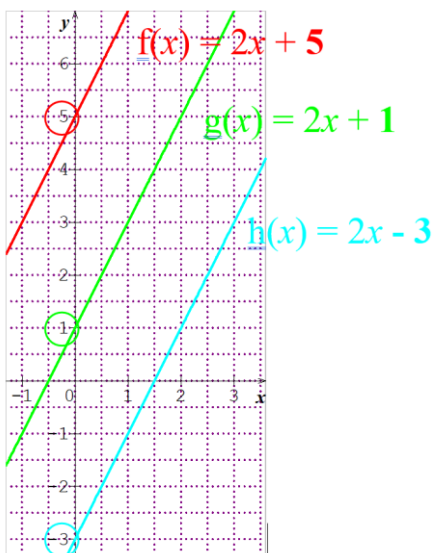
Démonstration

Si $x = 0$ alors $f(x) = f(0) = p \times 0 + q = q$, donc si $x = 0$ alors la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; q)$.

$$f(x+1) = p(x+1) + q = px + p + q = px + q + p = f(x) + p$$

Donc si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p .

Exemples



Remarque

Deux fonctions qui ont le même coefficient directeur ont des représentations graphiques qui sont parallèles.

Propriété

Soit $f(x) = px + q$ une fonction affine.

Soient x_1 et x_2 deux nombres et $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images.

$$p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Démonstration

$$f(x_1) = px_1 + q \quad f(x_2) = px_2 + q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 + q - (px_1 + q)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 + q - px_1 - q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 - px_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = p(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = p$$

Exemple 1

Soit $f(x) = p x + q$ une fonction affine tel que $f(2) = 5$ et $f(6) = 21$ leurs images.
Trouver l'expression algébrique de f .

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ avec $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$, $x_2 = 6$ et $f(x_2) = 21$.

$$\text{On a } p = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{21-5}{6-2} = \frac{16}{4} = 4$$

Donc $f(x) = 4x + q$.

Dans l'énoncé On remplace x par 2 dans la formule $f(x) = 4x + q$

↓ ↓

On a $f(2) = 5$ et $f(2) = 4 \times 2 + q$

donc $5 = 4 \times 2 + q$

donc $5 = 8 + q$

donc $-3 = q$

donc $f(x) = 4x - 3$

Exemple 2

Soit $A(4 ; 7)$ et $B(6 ; 11)$ deux points.

Trouver l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B .

Soit $C(5 ; 9)$ et $D(8 ; 17)$

Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

Soit $f(x) = px + q$ la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A et B .

On a $f(4) = 7$ et $f(6) = 11$

On a $x_1 = 4$ et $f(x_1) = 7$ et $x_2 = 6$ et $f(x_2) = 11$

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

$$\text{Donc } p = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{11-7}{6-4} = \frac{4}{2} = 2$$

Donc $f(x) = 2x + q$.

On a $f(4) = 7$ et $f(4) = 2 \times 4 + q$

donc $7 = 2 \times 4 + q$

donc $7 = 8 + q$

donc $-1 = q$

donc $f(x) = 2x - 1$

$f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$ donc $C \in (AB)$.

$f(8) = 2 \times 8 - 1 = 15 \neq 17$ donc $D \notin (AB)$.

Soit $M(x ; y)$ un point sur cette droite.

Les coordonnées de ce point vérifient l'équation $y = 2x - 1$; on dit que $y = 2x - 1$ est l'équation de la droite (AB) .

II - Pourcentages

Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.

Le mot français « de » se traduit en mathématiques par une multiplication.

Exemple

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120€, c'est prendre $\frac{3}{5} \times 120 = 72$ €.

Prendre 12% de 45€, c'est prendre $\frac{12}{100}$ de 45€, ce qui revient à prendre $\frac{12}{100} \times 45 = 5,40$ €.

Comment calculer le produit d'une fraction par une quantité ?

$$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$$

$$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$$

$$\frac{a}{b} \times c = (c \div b) \times a$$

Exemples

$$\frac{10}{5} \times 7 = (10 \div 5) \times 7 \\ = 2 \times 7 = 14$$

$$\frac{5}{3} \times 6 = (5 \times 6) \div 3 \\ = 30 \div 3 = 10$$

$$\frac{7}{5} \times 15 = (15 \div 5) \times 7 \\ = 3 \times 7 = 21$$

Propriété

Ajouter $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Soustraire $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Démonstration

Soit Q la quantité.

$p\%$ de Q c'est $\frac{p}{100} \times Q$

Si on ajoute $p\%$ à Q , on trouve $Q + \frac{p}{100} \times Q = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times Q$.

Si on soustrait $p\%$ à Q on trouve $Q - \frac{p}{100} \times Q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \times Q$.

Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15% .

Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?

Calculons le prix soldé.

$$74 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 74 \times 0,85 = 62,90$$

Le prix soldé est 62,90€.

Exemple 2

Le taux de TVA est de 33,3%.

a. Le prix HT est de 126 €. Quel est le prix TTC ?

b. Le prix TTC est de 150 €. Quel est le prix HT ?

Pour passer du prix HT au prix TTC, on multiplie par $1 + \frac{33,3}{100} = 1,333$ donc pour passer du prix TTC au prix HT, on divise par 1,333

a. Calculons le prix TTC.

$$126 \times 1,333 \approx 167,96$$

Le prix TTC est d'environ 167,96 €.

b. Calculons le prix HT.

$$150 \div 1,333 \approx 112,53$$

Le prix HT est d'environ 112,53 €.

Résumé

