

3.1415926535897932384626433832795 0288419716939937510582097494459230781640628620899862803
482534 2117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521
1055 596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234
603 4861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436
78 92590360 01133053054 8820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611
7931051185 480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213
9494639522 47371907021 7986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526
3560827785 771342757789609173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542
0199561121 29021960864 0344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328
160963185 95024459455 34690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320
838142061 71776691473 03598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226
80661300 192787661119 59092164201989380952572010654858632788659361533818279682303019520353
018529 689957736225994 1389124972177528347913151557485724245415069595082953311686172785588
90750 9838175463746493 9319255060400927701671139009848824012858361603563707660104710181942
9555 96198946767837449 4482553797747268471040475346462080466842590694912933136770289891521
04752 162056966024058038 15019351125338243003558764024749647326391419927260426992279678235
4781636009341721641219924586315030286182974555706749838505494588586926995690927210797509
3029553211653449872027559602364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746
7289097777279380008164706001614524919217321721477235014144197356854816136115735255213347
5741849468438523323907394143334547762416862518983569485562099219222184272550254256887671
7904946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642251252
051173929848960841284886269456042419652850222106611863067442786220391949450 47123713786 96
09563 64371917 2874677646 57573962413890865 83264599 581339 047802759009946576407 89512694683 98
35259 57098 25 82262 05224 89407726719478 26848 2601476 99090 264013639443745530506820349625 245 17
49399 65 143 14 29 09 1906 592509 3722169 6461515 709858387 4105 9788595977297549893016175 3928468 13
82686 8386 8942 77 41 559 91855925 245953 9594310 4997252 4680845987 273644695848653836736 2226260 99
12460 8051 2438 84 39 04 51 244136 5497627 8079771 5691435 99770 01 2961 608944169486855584840635 342 20
72225 82848 86 48 1 58 456 0285060 1684273 9452267 4676788 952521 385225499546667278239 86456596116 35
488623057745649803559363456817432411251507606947945109659609402522887971089 31456691368 67
2287489405601015033086179286809208747609178249385890097149096759852613655497818931297848
2168299894872265880485756401427047755513237964145152374623436454285844479526586782105114
1354735739523113427166102135969536231442952484937187110145765403590279934403742007310578
5390621983874478084784896833214457138687519435064302184531910484810053706146806749192781
9119793995206141966342875444064374512371819217999839101591956181467514269123974894090718
6494231961567945208095146550225231603881930142093762137855956638937787083039069792077346
7221825625996615014215030680384477345492026054146659252014974428507325186660021324340881
9071 0486331 73 4649651 453905796 268561005 508106658796 9981635 747363840 525714591 02 8970641 4011
0971206280 439 039759 5156771577 004203378699360072305587631 763 594218731251471 205329281 91826
1861258673 215 791984 1484882916 447060957527069572209175671 167 2291098169091528017350 6712748
5832 2287183 52 093539 657 2512108357915136988 209144 421 0067510334 6711031412671111369 90865 35163
9831 501970165 151168 517 143765761835155 6508849099898 599823873 4552833 1635507647918 535893226
1854 896321329 330898 570 6420467525907091548141654985 9461637180 270981994309924488 9575712828
9059 2323326 09 7299712 08 4433573 265489382 391193259746 3667305 83 6041428 138830320 382 4903758985
2437441702913276561809377344403070746921120191302033038019762110110044929321516084244485
9637669838952286847831235526582131449576857262433441893039686426243410773226978028073189
1544110104468232527162010526522721116603966655730925471105578537634668206531098965269186
2056 47693 125 70586 35 66201 8558 1007293 60659 876486117910453348850346113657686753249441668039
6265 79787 718 5560845 5296 5412 66540 8530 6143444318586769751456614068007002378776591344017127
4947 04205 622 305 3899 45613 14071 127000 40785473326993908145466464588079727082668306343285878
5698 3052 3580 8933065 7574 06795 45716377 5254202114955761581400250126228594130216471550979259
2309 9079 6547 37612 55 1765 675135751782 96664 547791745011299614890304639947132962107340437518
9573596145890193897131117904297828564750320319869151402870808599048010941214722131794764
7772622414254854540332157185306142288137585043063321751829798662237172159160771669254748
7389 86654949 45011 465 40628433 66393 790 0397 69265 6721 463 8530 6736 096571209 1807638327166416274
8888 00786925 60290228 4721040317211860 8204 19000422 966 17119 63779 2133 75751149595015660496318
6294 72654736 425 23081 77036 751590 67350 2350 728 35405 67 0 03867 7351362222 477158915049530984448
9333 09634087 807693259939 7805419341447 3774 4184263 1298 6080 9988 86874 13260472156951623965864
5730 21631 598 19319 516 73538 129741 1677294 786 72422 924 6543 6680 0980 6769 28238 2806899640048243540
3701416314965897940924323789690706977942236250822168895738379862300159377647165122893578
6015881617557829735233446042815126272037343146531977774160319906655418763979293344195215
4134189948544473456738316249934191318148092777710386387734317720 54565 3220777092120190
516609628049092636019759882816133231666365

Sommaire



Utilisation libre à la condition de l'attribuer à l'auteur en citant son nom. *Cela ne signifie pas que l'auteur est en accord avec l'utilisation qui est faite de ses œuvres.*
Autorisation de reproduire, diffuser, et à modifier tant que l'utilisation n'est pas commerciale.

| | |
|--|----|
| Sommaire..... | 2 |
| LES NOMBRES RELATIFS | 4 |
| FRACTIONS : additions et soustractions..... | 6 |
| FRACTIONS : multiplications et divisions..... | 11 |
| PUISSANCES | 13 |
| SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS, VECTEURS et ROTATIONS..... | 17 |
| I – Symétrie axiale..... | 17 |
| II – Symétrie centrale..... | 18 |
| III – Translation | 18 |
| IV – Vecteurs..... | 19 |
| V – Rotations..... | 21 |
| EQUATIONS du premier degré à une inconnue – DEVELOPPER..... | 22 |
| I – Développer | 22 |
| II – Equations | 22 |
| III – Problèmes | 24 |
| IV – Inéquations..... | 26 |
| Triangles rectangles : PYTHAGORE | 28 |
| I – PYTHAGORE | 28 |
| II – RACINES CARREES..... | 29 |
| FONCTIONS généralités | 32 |
| PROPORTIONNALITE et HOMOTHETIES | 35 |
| I – Proportionnalité..... | 35 |
| II – Vitesse, distance et temps | 37 |
| III – Ratios | 38 |
| IV – Agrandissement/réduction - Homothéties | 39 |
| ARITHMETIQUE..... | 41 |
| Théorème de THALES | 44 |
| DOUBLE DISTRIBUTIVITE – IDENTITES REMARQUABLES | 46 |
| I – Double distributivité | 46 |
| II – Identités remarquables..... | 46 |
| PROBABILITES | 48 |
| Triangles rectangles : TRIGONOMETRIE | 52 |
| ANGLES, TRIANGLES SEMBLABLES, DROITES DU TRIANGLE et PARALLELOGRAMMES..... | 54 |
| I - Angles | 54 |
| II – Triangles semblables..... | 56 |
| III – Droites du triangle | 57 |
| A. Hauteurs | 57 |

| | |
|---|----|
| B. Médiannes | 57 |
| C. Médiatrices | 57 |
| D. Bissectrices | 58 |
| IV – Quadrilatères | 58 |
| FACTORISER, équations produits, équations $x^2 = a$ | 60 |
| SOLIDES, agrandissement/réduction | 63 |
| I – Rappel sur les aires | 63 |
| II – La famille des prismes | 63 |
| III – La famille des pyramides | 64 |
| IV – La boule et la sphère | 64 |
| V – Conversions | 65 |
| VI – Agrandissements / réductions | 66 |
| VII – Sections | 67 |
| VIII – Repérage | 68 |
| STATISTIQUES | 71 |
| FONCTIONS AFFINES et LINEAIRES, pourcentages | 76 |
| I - Fonctions affines et linéaires | 76 |
| II - Pourcentages | 78 |

LES NOMBRES RELATIFS

Les nombres négatifs sont apparus après le 0. Ce n'est qu'en 456, dans un traité de cosmologie en sanscrit qu'on trouve pour la première fois un mot qui représente le zéro. Au VII^{ème} siècle, le mathématicien indien Brahmagupta énoncé des règles pour opérer sur trois sortes de nombres : « biens », « dettes » et « zéro ». Les hommes furent longtemps réticents à accepter les nombres négatifs. Les mathématiciens ne commencent à travailler avec qu'au XV^{ème} siècle, et ils les appellent *numeri absurdi* ("les nombres absurdes"), en leur refusant le statut de solution d'une équation. Au XVII^{ème} siècle, René DESCARTES, qualifiait encore de "fausses" ou "moindres que rien" les solutions négatives d'une équation. A cette même époque, John WALLIS osa attribuer des coordonnées négatives aux points d'une courbe. A la fin du 18^{ème} siècle, on peut lire ceci dans un livre de Lazare CARNOT : « Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que zéro, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres ».

Définitions

Un *nombre relatif* est un nombre précédé d'un signe.

Si ce signe est "+", le nombre est dit *positif*.

Si ce signe est "-", le nombre est dit *négatif*.

La *valeur absolue* d'un nombre relatif est la distance séparant ce nombre de 0.

Astuce

La valeur absolue d'un nombre est le nombre privé de son signe.

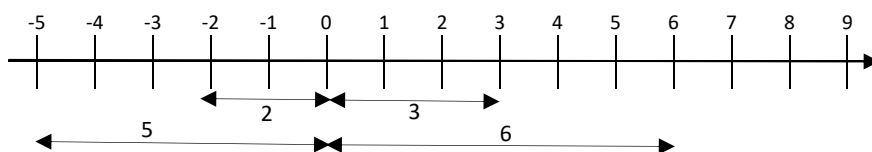
Exemples

La valeur absolue de -5 est 5.

La valeur absolue de -2 est 2.

La valeur absolue de +3 est 3.

La valeur absolue de +6 est 6.

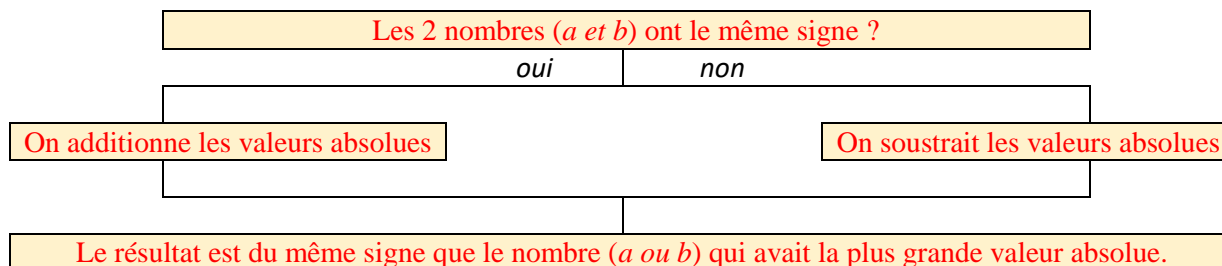


Convention

Les mathématiciens ont décidé de ne pas mettre de signe devant les nombres positifs.

Propriété admise

Pour additionner deux nombres relatifs ($a + b$), on procède comme suit :



Exemples

$$5 + 3 = 8$$

5 et 3 ont le même signe, donc on additionne leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.

$$(-5) + (-3) = -8$$

-5 et -3 ont le même signe, donc on additionne leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

$$5 + (-3) = 2$$

5 et -3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.

$$(-5) + 3 = -2$$

-5 et 3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

Définition

L'opposé d'un nombre a est le nombre noté $-a$ tel que $a + (-a) = 0$.

Astuce

Pour prendre l'opposé d'un nombre, il suffit de changer son signe.

Exemples

L'opposé de 2 est noté -2 et vaut -2

L'opposé de -2 est noté - (-2) et vaut 2 donc - (-2) = +2.

Définition

Soustraire, c'est additionner l'opposé.

Exemples

Soustraire 2 c'est additionner -2.

Soustraire 5 c'est additionner -5.

Soustraire -4 c'est additionner 4.

Soustraire -7 c'est additionner 7.

Astuce

$$- 2 = + (-2)$$

$$- 5 = + (-5)$$

$$- (-4) = + 4$$

$$- (-7) = +7$$

Exemples de soustractions

$$5 - 2 = 5 + (-2) = 3$$

$$4 - 5 = 4 + (-5) = -1$$

$$5 - (-4) = 5 + 4 = 9$$

$$6 - (-7) = 6 + 7 = 13$$

Comment calculer une somme algébrique ?

On supprime les parenthèses, puis on effectue le travail précédent en additionnant les positifs et les négatifs (veiller à bien garder le signe qui se trouve devant un nombre lors du "réarrangement").

Exemple

$$(-5) + 3 - 4 + 5 + (-3) - 4 + 7 = -5 + 3 - 4 + 5 - 3 - 4 + 7 = -5 - 4 - 3 - 4 + 3 + 5 + 7 = -16 + 15 = -1$$

Propriété règle des signes admise

Le produit de deux nombres de même signe est positif

Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

La règle des signes s'applique aussi pour les divisions.

| | | |
|---|---|---|
| × | + | - |
| + | + | - |
| - | - | + |

Comment multiplier deux nombres relatifs ?

1. On multiplie leurs valeurs absolues.
2. On détermine le signe en utilisant la règle des signes.

Exemples de produits ou quotients

$$5 \times 2 = +10$$

Les 2 nombres ont le même signe, le résultat est positif.

$$10 \div 2 = +5$$

$$5 \times (-2) = -10$$

Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le résultat est négatif.

$$10 \div (-2) = -5$$

$$(-5) \times 2 = -10$$

Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le résultat est négatif.

$$(-10) \div 2 = -5$$

$$(-5) \times (-2) = +10$$

Les 2 nombres ont le même signe, le résultat est positif.

$$(-10) \div (-2) = +5$$

Propriété admise

Pour déterminer le signe d'une expression numérique dans laquelle n'interviennent que des multiplications et des divisions, il suffit de compter le nombre de facteurs négatifs.

Si ce nombre de facteurs négatifs est pair (0, 2, 4, 6, 8 ...), le produit est positif.

Si ce nombre de facteurs négatifs est impair (1, 3, 5, 7, 9...), le produit est négatif.

Exemples

$2 \times 5 \times (-4) \times 3 \times (-4) \times (-4) \times 5$ est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.

$2 \times (-5) \times (-4) \times 3 \times (-4) \times (-4) \times 5$ est positif car il y a un nombre pair (4) de facteurs négatifs.

Remarque

Peu importe le nombre de facteurs positifs ou s'il y a plus de facteurs positifs que négatifs ; seul compte le nombre de facteurs négatifs.



ATTENTION, la propriété précédente ne "marche" que s'il y a des multiplications et des divisions. Il ne faut surtout pas l'utiliser lorsqu'il y a des additions ou des soustractions.

Propriété priorités opératoires admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On effectue les multiplications et divisions (de gauche à droite).
3. On termine toujours par les additions et soustractions (de gauche à droite).

Exemple

$$10 + 5 \times (3 - (3 + 5 \times 7)) = 10 + 5 \times (3 - (3 + 35)) = 10 + 5 \times (3 - 38) = 10 + 5 \times (-35) = 10 + (-175) = -165$$

Astuce

Dans le cas de parenthèses imbriquées, il peut être utile de mettre en couleur les paires de parenthèses pour repérer les calculs à effectuer.

FRACTIONS : additions et soustractions

Définitions

Un nombre en *écriture fractionnaire* s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{b} \leftarrow \begin{array}{l} \text{le numérateur} \\ \text{le dénominateur} \end{array}$$

On parle de *fraction* lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

On parle de *fraction décimale* lorsque l'on a une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, 10000 ...

Propriété d'égalité de fractions - admise

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et le dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

Exemples

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35} \quad \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \quad \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

Définitions

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la distance à zéro de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

Exemples

$$\frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4} \quad \frac{45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

Remarque

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

Propriétés admises : Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

- 186 se divise par 2 car il est pair (il se termine par 6).
- 187 ne se divise pas par 2 car il est impair.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 237 est divisible par 3 car $2+3+7=12$ et 12 est divisible par 3.
- 238 n'est pas divisible par 3 car $2+3+8=13$ et 13 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

- 25 **92** est divisible par 4 car **92** est divisible par 4, car $92=40+40+12$ et 12 est divisible par 4.
- 45 **267** n'est pas divisible par 4 car **67** n'est pas divisible par $67=40+27$ et 27 n'est pas divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

- 185 se divise par 5 car il se termine par 5.
- 190 se divise par 5 car il se termine par 0.
- 187 ne se divise pas par 5.

Un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 ET par 3, donc s'il est pair ET si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 894 se divise par 6 car
 - il se divise par 2 (il est pair),
 - ET il se divise par 3 car $8+9+4=21$ qui se divise par 3.
- 165 ne se divise pas par 6 car
 - il ne se divise pas par 2 (il est impair),
 - même si il se divise par 3 car $1+6+5 = 12$ qui se divise par 3.
- 898 ne se divise pas par 6 car
 - il se divise par 2 (il est pair),
 - mais il ne se divise pas par 3 car $8+9+8=25$ qui ne se pas divise par 3.

- 77 ne se pas divise par 6 car
 - il ne se divise par 2 (il est impair),
 - il ne se divise par 3 car $7+7=14$ qui ne se divise pas par 3.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

- 567 est divisible par 9 car $5+6+7=18$ et 18 est divisible par 9.
- 123 456 789 est divisible par 9 car $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ et 45 est divisible par 9 car $4+5=9$ qui est divisible par 9.
- 238 n'est pas divisible par 9 car $2+3+8=13$ et 13 n'est pas divisible par 9.

Remarque

Un nombre divisible par 9 est obligatoirement divisible par 3.

Définition

Un nombre est dit premier s'il n'a que 1 et lui-même comme diviseur (un nombre premier a exactement 2 diviseurs).

Exemples

Le nombre 3 est premier car ses diviseurs sont 1 et 3.

Le nombre 6 n'est pas premier car il se divise par 1, 2, 3 et 6.

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Astuce pour trouver tous les nombres premiers en partant de 2 : **crible d'Ératosthène** (c'est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec : -276 à -194).

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

On écrit tous les nombres de 1 à 100.

1 n'est pas premier donc on le barre

Le premier nombre non barré est 2 donc c'est un nombre premier.

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

On barre tous les multiples de 2 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 2 est 3 ; c'est un nombre premier.

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

On barre tous les multiples de 3 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 3 est 5 ; c'est un nombre premier.

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

On barre tous les multiples de 5 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 5 est 7 ; c'est un nombre premier.

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

On barre tous les multiples de 7 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 7 est 11 ; c'est un nombre premier.

On s'arrête ici car $11^2 = 11 \times 11 > 100$.

Tous les nombres non barrés sont premiers.

Les nombres premiers jusqu'à 100 sont : ♥ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Comment décomposer un nombre en produits de facteurs premiers.

On veut décomposer 450.

| | | |
|-----|---|---|
| 450 | | On réécrit le nombre à gauche de la ligne verticale |
| 225 | 2 | 2 est le plus petit nombre premier qui divise 450 $450 = 225 \times 2$ On écrit 225 à gauche et 2 à droite |
| 75 | 3 | 3 est le plus petit nombre premier qui divise 225 $225 = 75 \times 3$ On écrit 75 à gauche et 3 à droite |
| 25 | 3 | 3 est le plus petit nombre premier qui divise 75 $75 = 25 \times 3$ |
| 5 | 5 | 5 est le plus petit nombre premier qui divise 25 $25 = 5 \times 5$ |
| 1 | 5 | 5 est le plus petit nombre premier qui divise 5 $5 = 1 \times 5$ On s'arrête lorsqu'il y a 1 dans la colonne de gauche. |

$$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

Exemples de décomposition en facteurs premiers

| | | | |
|---------------------------------|---|--------------------------------|----|
| Décomposons 180 | | Décomposons 380 | |
| 180 | | 380 | |
| 90 | 2 | 190 | 2 |
| 45 | 2 | 95 | 2 |
| 15 | 3 | 19 | 5 |
| 5 | 3 | 1 | 19 |
| 1 | 5 | | |
| $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ | | $380 = 2^2 \times 5 \times 19$ | |

Utilisation de la calculatrice

Décomposons 180

| CASIO FX92 | CASIO FX 92 classwiz | TI COLLEGE PLUS |
|---------------------|--------------------------------|------------------|
| 1 8 0 EXE SECONDE F | 180 Format Facteur premier EXE | 180 SECONDE SIMP |

On obtient : $2^2 \times 3^2 \times 5$

Trouver le plus petit multiple commun à 34 et 51 : *PPCM(34 ; 51)*

| CASIO FX92 | CASIO FX 92 classwiz | TI COLLEGE PLUS |
|---------------------------------|--|--|
| SECONDE Y 34 SECONDE 3 51) EXE | CATALOG puis Calcul numérique puis PPCM EXE 34 ; 51) | système maths 2 34 2nde , 51) entré = |

On obtient : 102

Exemple de simplification de fraction

Simplifier la fraction $\frac{21000}{29700}$

| | | | |
|---|---|---|----|
| Décomposons 21000 | | Décomposons 29700 | |
| 21000 | | 29700 | |
| 10500 | 2 | 14850 | 2 |
| 5250 | 2 | 7425 | 2 |
| 2625 | 2 | 2475 | 3 |
| 875 | 3 | 825 | 3 |
| 175 | 5 | 275 | 3 |
| 35 | 5 | 55 | 5 |
| 7 | 5 | 11 | 5 |
| 1 | 7 | 1 | 11 |
| $21000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7$ | | $29700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$ | |
| $\frac{21000}{29700} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 11} = \frac{70}{99}$ | | | |

Comment transformer une écriture fractionnaire en fraction ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateur entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, ...).

Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

Exemples

$$\frac{5,2}{2} = \frac{5,2 \times 10}{2 \times 10} = \frac{52 \div 2}{20 \div 2} = \frac{26 \div 2}{10 \div 2} = \frac{13}{5} \quad \frac{4,51}{3,7} = \frac{4,51 \times 100}{3,7 \times 100} = \frac{451}{370}$$

Propriété d'addition de fractions de même dénominateur - admise

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

Exemples

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{3+6}{4} = \frac{9}{4} \quad \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1-8}{3} = \frac{-7}{3} \quad \frac{-1}{5} - \frac{8}{5} = \frac{-9}{5} \quad \frac{-15}{6} - \frac{-8}{6} = \frac{-15 - (-8)}{6} = \frac{-15+8}{6} = \frac{-7}{6}$$

Définition

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

Remarque

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

Comment additionner deux fractions de dénominateurs différents ?

On se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

Exemples

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{3} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{21}{6} + \frac{10}{6} = \frac{31}{6} \quad \frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 51}{34 \times 51} + \frac{8 \times 34}{51 \times 34} = \frac{255}{1734} + \frac{272}{1734} = \frac{527}{1734}$$

Remarque

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici, $\frac{527}{1734} = \frac{31}{102}$

Astuce

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs (ici 34 et 51).

| Méthode 1 | Méthode 2 |
|---|--|
| <p>On décompose les deux nombres.</p> <p>Décomposons 34</p> $\begin{array}{r l} 34 & \\ 17 & 2 \\ 1 & 17 \end{array}$ <p>$34 = 2 \times 17$</p> <p>Décomposons 51</p> $\begin{array}{r l} 51 & \\ 17 & 3 \\ 1 & 17 \end{array}$ <p>$51 = 3 \times 17$</p> <p>On cherche un nombre qui contient tous les facteurs ci-dessus : $2 \times 3 \times 17 = 102$.</p> | <p>On écrit les multiples des 2 nombres jusqu'à ce que l'on en trouve un en commun.</p> $\begin{array}{r l} 34 & 51 \\ 68 & 102 \\ 102 & \end{array}$ <p>On peut aussi donner tous les multiples du plus grand nombre jusqu'à ce que l'on obtienne un multiple du plus petit : 51, 102, ...</p> $\frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 3}{34 \times 3} + \frac{8 \times 2}{51 \times 2} = \frac{15}{102} + \frac{16}{102} = \frac{31}{102}$ |

Propriété admise

Prendre une quantité d'une fraction c'est multiplier le nombre par la fraction.

Exemples

Prendre $\frac{3}{4}$ de 126 € c'est prendre $\frac{3}{4} \times 126$ €.

Rouler $\frac{2}{5}$ de 800 km c'est rouler $\frac{2}{5} \times 800$ km.

Remarque

Le mot « de » en français se traduit par « \times » en mathématiques.

Comment multiplier un nombre par une fraction ?

| | | |
|---|---|---|
| Méthode 1 $\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$ $\frac{12}{6} \times 7 = (12 \div 6) \times 7 = 2 \times 7 = 14$ | Méthode 2 $\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$ $\frac{2}{3} \times 9 = (2 \times 9) \div 3 = 18 \div 3 = 6$ | Méthode 3 $\frac{a}{b} \times c = a \times (c \div b)$ $\frac{5}{7} \times 21 = 5 \times (21 \div 7) = 5 \times 3 = 15$ |
|---|---|---|

Notation

La fraction $\frac{p}{100}$ est notée $p\%$

La fraction $\frac{15}{100}$ est notée 15%

Exemple de problème

Sébastien achète un pull. Le prix affiché est de 65€, mais il bénéficie d'une remise de 15%.
Combien va-t-il payer ?

Calculons le montant de la remise

$$15\% \text{ de } 65 \text{ €} = \frac{15}{100} \text{ de } 65$$
$$= \frac{15}{100} \times 65 = (15 \times 65) \div 100 = 975 \div 100 = 9,75$$

La remise est de 9,75 €.

Je calcule le prix réduit.

$$65 - 9,75 = 55,25$$

Le prix réduit est de 55,25 €.

FRACTIONS : multiplications et divisions

Propriété du signe des fractions

Une fraction est une division, donc la règle des signes s'applique pour déterminer le signe d'une fraction (on compte le nombre de termes négatifs).

Exemples

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} = -\frac{-3}{-4} = -0,75$$

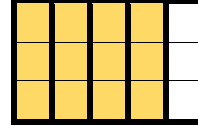
Il y a 1 (ou 3) terme(s) négatif(s),
donc le résultat est négatif.

$$\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = +0,75$$

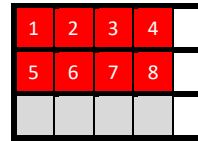
Il y a 2 termes négatifs,
donc le résultat est positif.

Remarque

Quatre cinquièmes valent



Deux tiers de quatre cinquièmes valent huit quinzièmes



Deux tiers de quatre cinquièmes s'écrit $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ et on voit que $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

Propriété de multiplication de fractions - admise

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Astuce

Pour déterminer le signe, on utilise la règle des signes.

Exemples

$$\frac{5}{7} \times \frac{9}{11} = \frac{5 \times 9}{7 \times 11} = \frac{45}{77}$$

$$\frac{-5}{3} \times \frac{-8}{-4} = -\frac{5 \times 8}{3 \times 4} = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3}$$

Il y a 3 termes négatifs,
donc le résultat est négatif.



$$2 \times \frac{3}{5} \neq \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{mais} \quad 2 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$$

Définition

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a vaut 1. L'inverse de a est noté : a^{-1} .

Propriété

L'inverse du nombre a vaut $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ vaut $\frac{b}{a}$.

Démonstrations

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$$

Exemples

| | | | | | | |
|---------|---------------|-------------------------------|---------------|-------------------------------|----------------|--------------|
| Nombre | 5 | -3 | $\frac{2}{7}$ | $\frac{-3}{5}$ | $-\frac{4}{5}$ | 0 |
| Inverse | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$ | $-\frac{5}{4}$ | N'existe pas |



Ne pas confondre inverse et opposé.

L'opposé de 2 est -2

L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$

Définition

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

Exemples

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{-2}{3} \div \frac{4}{9} = -\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{3} \div 2 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$8 \div \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5}$$



On inverse uniquement le nombre se trouvant après le symbole de division et on ne change pas celui qui est avant.

Remarques

$\frac{3}{5}$ est une notation de $3 \div 5$ et vaut 0,6

Il n'est pas possible de donner une valeur décimale exacte pour toutes les fractions, par exemple : $\frac{1}{3} \approx 0,33$



Attention à la position du signe d'égalité lorsqu'il y a des fractions à "étages".

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \approx 0,17$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Exemple de calcul « complexe »

$$\frac{\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{-1} = \frac{20}{-4} = -5$$

PUISSANCES

La première mention, de carrés ou de cubes, remonte à l'époque babylonienne, au 23^{ème} siècle avant J.C. $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$

Le terme exposant est dû au mathématicien allemand Stifel (1487 – 1567) qui généralise la notation aux exposants négatifs. L'auteur de l'*Arithmética integra* était un moine, disciple du Luther, qui calcula la fin du monde pour le 18 octobre 1533 ...

La notation scientifique est inventée par René Descartes (vers 1637) dans *La géométrie*. Il y invente aussi le symbole $\sqrt{\quad}$.

5^2 se lit exposant 2 et 5_2 se lit 5 indice 2

Définition

Le nombre noté a^n qui se lit « a exposant n » est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemples

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \quad 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \quad (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

Remarques

a^2 se lit "a exposant 2" ou "a au carré"

a^3 se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

Astuce

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de a^n est positif si :

- a est positif
- ou a est négatif et n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 ...).

Le signe de a^n est négatif si : a est négatif et n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 ...).

Exemples

4^5 est positif

$(-4)^5$ est négatif car il y a 5 facteurs négatifs.

$(-10)^8$ est positif car il y a 8 facteurs négatifs.

Propriété de priorité opératoire - admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On calcule les puissances.
3. On effectue les multiplications et divisions.
4. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple

$$\begin{aligned} & 4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3) \\ &= 4 \times 5^2 \times (5 - 12) \\ &= 4 \times 5^2 \times (-7) \\ &= 4 \times 25 \times (-7) \\ &= 100 \times (-7) \\ &= -700 \end{aligned}$$



Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances

$$(-2)^4 = 16 \text{ car } (-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

$$-2^4 = -16 \text{ car } -2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction.

On calcule d'abord la puissance.

Propriété 1 - admise

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

S'il y a le même nombre en bas, on additionne les puissances

Exemples

$$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$$

$$3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$$

$$(-2)^3 \times (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10}$$

"Justification"

$$2^3 \times 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{3+7} = 2^{10}$$

⚠ Attention à la consigne car on peut attendre deux résultats différents.

Calcule

Mettre $2^3 \times 2^5$ sous la forme d'une seule puissance

$$2^3 \times 2^5 = 8 \times 32 \\ = \mathbf{256}$$

Le résultat est un nombre (entier ou décimal) ou une fraction

$$2^3 \times 2^5 \\ = \mathbf{2^8}$$

Le résultat est **une** puissance

Propriété 2 - admise

$$x^a \times y^a = (x \times y)^a$$

S'il y a le même nombre en haut, on multiplie les nombres du « bas »

Exemples

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 \quad 3^5 \times 7^5 = (3 \times 7)^5 = 21^5$$

"Justification"

$$\begin{array}{r} 2^3 \\ \times 5^3 \\ \hline = 2 \times 2 \times 2 \\ \times 5 \times 5 \times 5 \\ \hline = 10 \times 10 \times 10 \\ \hline = 10^3 \end{array}$$

Propriété 3 - admise

$$(x^a)^b = x^{a \times b}$$

Si les puissances sont imbriquées, on multiplie les exposants.

Exemples

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} \quad ((-3)^2)^4 = (-3)^{2 \times 4} = (-3)^8$$

"Justification"

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12}$$

Remarque

| | | | | | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $\leftarrow \div 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \div 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \div 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \div 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \div 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \div 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \div 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \div 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \div 2 \rightarrow$ |
| $\leftarrow \times 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \times 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \times 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \times 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \times 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \times 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \times 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \times 2 \rightarrow$ | $\leftarrow \times 2 \rightarrow$ |
| 2^{-4} | 2^{-3} | 2^{-2} | 2^{-1} | 2^0 | 2^1 | 2^2 | 2^3 | 2^4 |
| 0,0625 | 0,125 | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | | | | | |
| $\frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^1}$ | | | | | |

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

Propriété 4 - admise

Si $x \neq 0$ alors $x^0 = 1$

Exemples

$$4^0 = 1 \quad (-4)^0 = 1 \quad \pi^0 = 1 \quad 2,7^0 = 1 \quad (-4,8)^0 = 1 \quad -9^0 = -1$$

Propriété 5

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

L'exposant négatif devient « 1 sur ... » ou l'inverse.

Exemples

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \quad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Démonstration

$$n + (-n) = 0$$

$$x^n \times x^{(-n)} = x^0$$

$$x^n \times x^{(-n)} = 1$$

x^n et x^{-n} sont inverses l'un de l'autre

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Propriété 6 - admise

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Lorsqu'on divise des puissances du même nombre, on soustrait les exposants.

Exemples

$$\frac{5^{12}}{5^8} = 5^{12-8} = 5^4 \quad \frac{5^{15}}{5^{18}} = 5^{15-18} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} \quad \frac{5^7}{5^{-8}} = 5^{7-(-8)} = 5^{15}$$

Propriété 7 - admise

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

L'exposant se distribue sur le numérateur et sur le dénominateur

Exemples

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \quad \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{5^3}{4^3} = -\frac{125}{64} \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4} = \frac{16}{625}$$

Propriété - admise

Soit n un entier positif.

10^n s'écrit avec un "1" suivi de n "0".

10^{-n} s'écrit "0,0...01" avec n "0" au total en comptant celui avant la virgule.

Exemples

$$10^7 = \mathbf{10000000} \quad 10^{-8} = \mathbf{0,00000001}$$

7 zéros 8 zéros

Définition

Un nombre est dit **sous la forme scientifique** (ou en **notation scientifique**) s'il s'écrit sous la forme : $a \times 10^n$



a est un nombre décimal dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10).

n est un entier relatif (positif ou négatif)

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique

| | | | | | |
|-------------------------------|----------------------------|--------------------------------------|---------------------------------|---|-----------------------------|
| 15 | 10^3 | 15×10^4 | 10×10^4 | $0,8 \times 10^4$ | $1,5 \times 10^{4,2}$ |
| Il manque $\times 10^{\dots}$ | Il manque un nombre devant | Le nombre devant est supérieur à 10. | Le nombre devant est égal à 10. | Le nombre devant n'est pas supérieur ou égal à 1. | L'exposant n'est pas entier |

Exemples de nombres étant en notation scientifique

$$1 \times 10^4 \quad 1,5 \times 10^{-5} \quad -1,5 \times 10^{42} \quad -9,5 \times 10^{-12} \quad -1,7 \times 10^0 \quad 1,5 \times 10^0$$

Rappels

Si n est positif, multiplier par 10^n c'est décaler la virgule de n rangs vers la droite.

Si n est positif, multiplier par 10^{-n} c'est décaler la virgule de n rangs vers la gauche.

Exemples de passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$$4,52 \times 10^4 = 45200 \quad -6 \times 10^4 = -60000 \quad 4,52 \times 10^{-4} = 0,000452$$

Exemples de passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$$123,45 = 1,2345 \times 10^2 \quad 10^2 = 100$$

$$0,012345 = 1,2345 \times 10^{-2} \quad 10^{-2} = 0,01$$

$$123,45 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^2 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^7$$

Remarque

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique (où apparaissent uniquement des quotients ou produits), on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

Exemples

$$12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8 = 12 \times 55 \times 10^4 \times 10^8 = 660 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^2 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^{14}$$

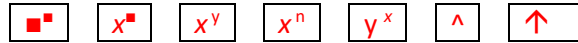
$$25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^8 = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^8 = -10000 \times 10^{-6} = -1 \times 10^4 \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$$

$$0,0055 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 0,0055 \times 2 \times 10^7 \times 10^8 = 0,011 \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{-2} \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{13}$$

$$\frac{45 \times 10^{23} \times 24 \times 10^{-4}}{18 \times 10^5} = \frac{45 \times 24}{18} \times \frac{10^{23} \times 10^{-4}}{10^5} = \frac{1080}{18} \times \frac{10^{19}}{10^5} = 60 \times 10^{14} = 6 \times 10^1 \times 10^{14} = 6 \times 10^{15}$$

Utilisation de la calculatrice

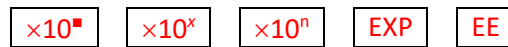
Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :



Dans la suite, on nommera x^{\square} cette touche.

Pour calculer $5^3 \times 2 - (2 - 5)^4$ on tape $5 \square x^{\square} 3 \times 2 - (2 - 5) \square x^{\square} 4$ et on trouve 169.

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :



Dans la suite, on nommera $\square x 10^{\square}$ cette touche. Elle remplace l'appui sur les touches $\square 10 \square x^{\square}$

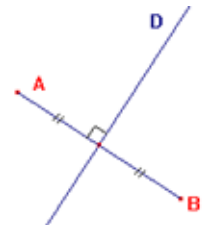
Pour calculer $12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8$ on tape $12 \square x 10^{\square} 4 \times 55 \square x 10^{\square} 8$ et on trouve $6,6 \times 10^{14}$.

SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS, VECTEURS et ROTATIONS

I – Symétrie axiale

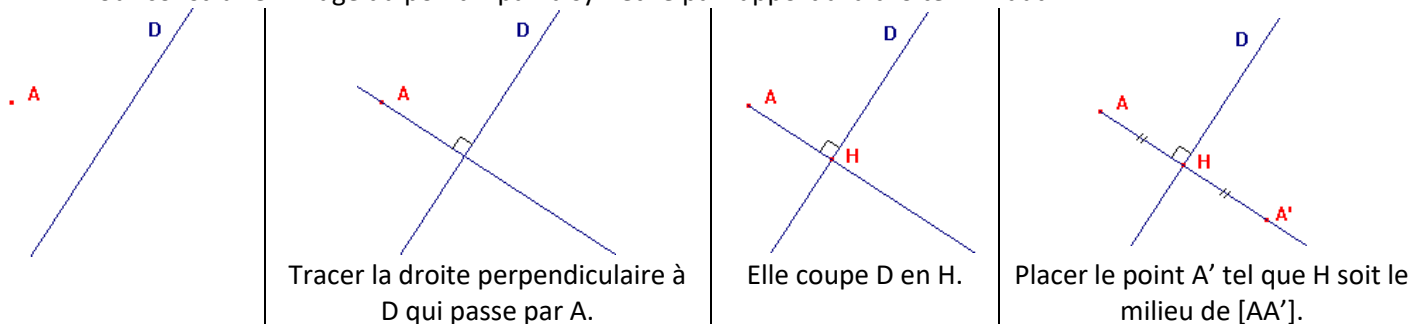
Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport à la droite D si D est la médiatrice de [AB].



Construction avec la réquerre

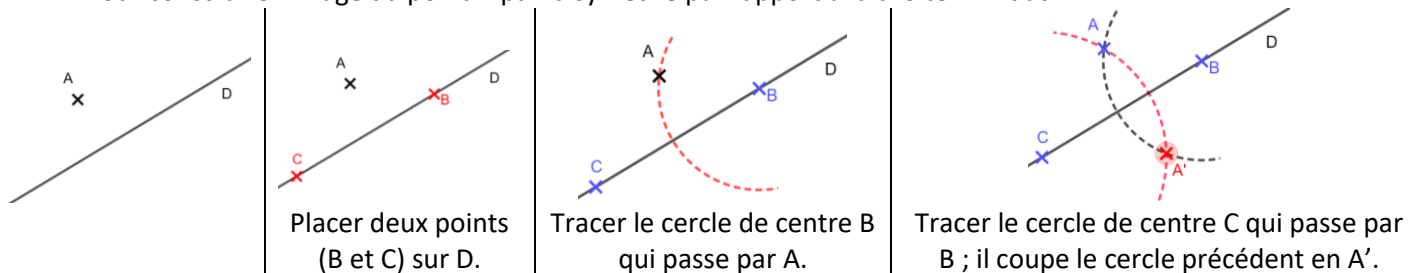
Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :



A' est le *symétrique* de A par la symétrie d'axe D.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie d'axe D.

Construction avec le compas et la règle non graduée

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :



Propriété admise

La symétrie axiale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

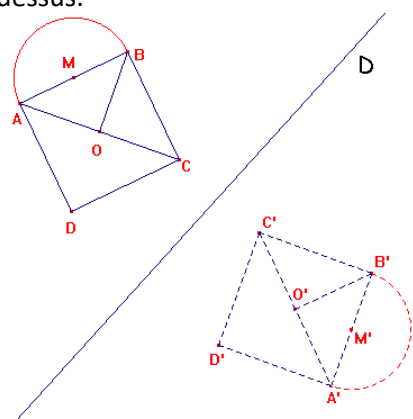


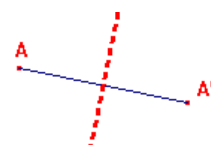
Image par la symétrie d'axe D.

Pour mémoire

La symétrie axiale « correspond » à un miroir.

Caractériser

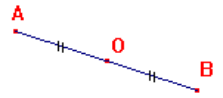
Pour caractériser une symétrie axiale, il faut donner son axe.
Pour retrouver son axe, il suffit de connaître un point et son image.
L'axe de symétrie est la médiatrice du segment formé par ces 2 points.



II – Symétrie centrale

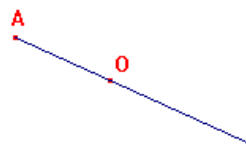
Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O si O est le milieu de [AB].

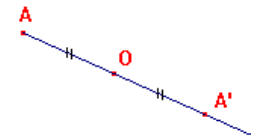


Construction

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport au point O il faut :



Tracer la demi-droite [AO).



Placer le point A' sur [AO) tel que O soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie de centre O.

On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie de centre O.

Propriété admise

La symétrie centrale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

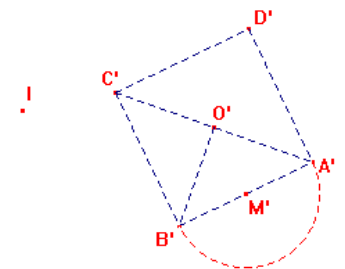
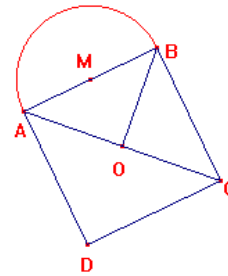


Image par la symétrie de centre I.

Pour mémoire

La symétrie centrale « correspond » à un demi-tour autour du centre de symétrie.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie centrale, il faut donner son centre.

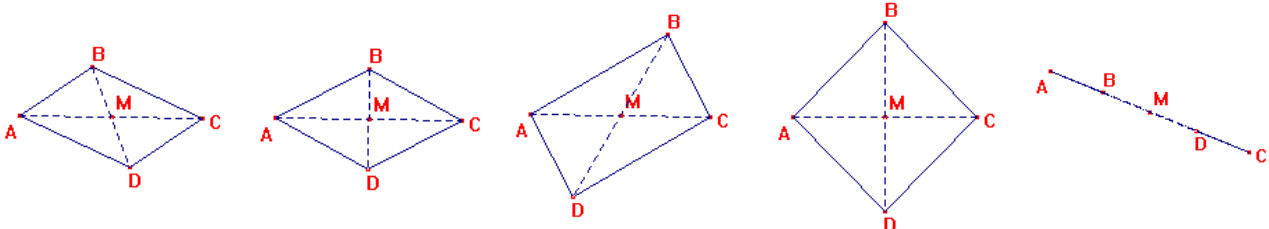
Pour retrouver son centre, il suffit de connaître un point et son image. Le centre de symétrie est le milieu du segment formé par ces 2 points.



III – Translation

Définition

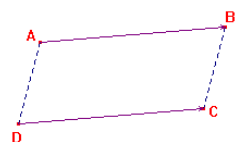
ABCD est un *parallélogramme* si ces diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.



Dans tous les cas ci-dessus, ABCD est un parallélogramme car M est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

Définition

On dit que l'image du point D est le point C par la *translation* qui envoie A sur B si ABCD est un parallélogramme.



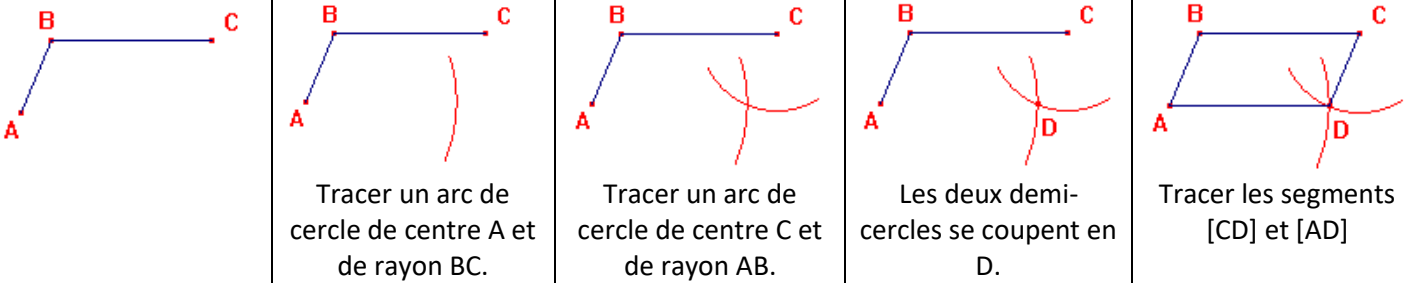
Construction

Pour construire l'image du point C dans la translation qui envoie A sur B il faut construire le parallélogramme ABC'C.

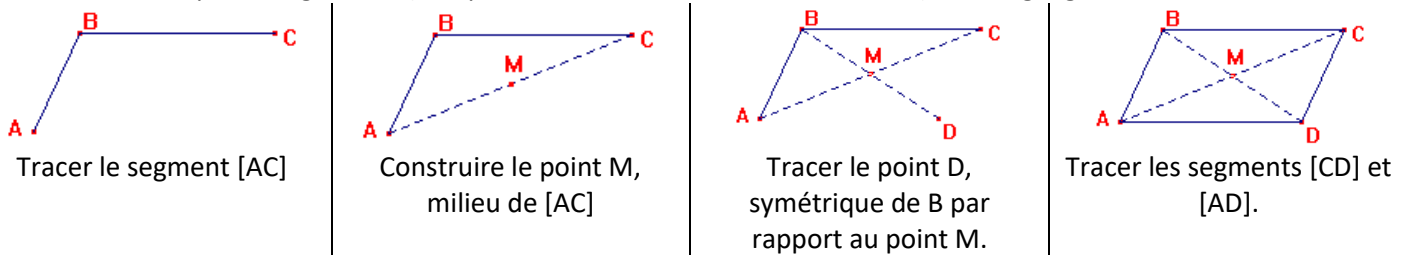
C' est le *translaté* de C par la translation qui envoie A sur B.
On dit aussi que C' est l'*image* de C par la translation qui envoie A sur B.



Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle et compas



Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle graduée



Propriété admise

La translation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

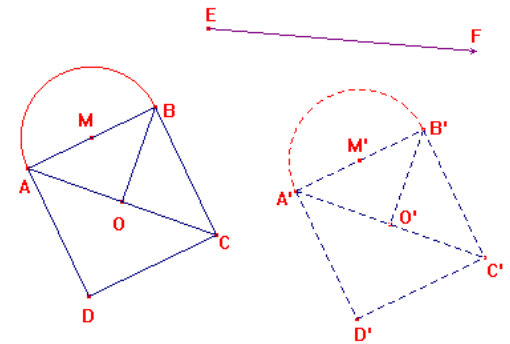


Image par la translation qui envoie E sur F.

Pour mémoire

La translation « correspond » à un glissement sans tourner.

Caractériser

Pour caractériser une translation, il faut donner un point et son image ou le vecteur dont les extrémités sont ces points.

Dans l'exemple, on peut parler de la translation qui envoie A sur B ou de la translation associée au vecteur \vec{AB} . On peut aussi parler de la translation qui envoie C sur C' ou de la translation associée au vecteur $\vec{CC'}$.



IV – Vecteurs

Définition

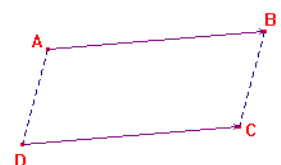
La translation qui envoie le point A sur le point B est associée à \vec{AB} , qui se lit "vecteur A B".

Remarque

La translation qui envoie B sur A est associée au vecteur \vec{BA} . *On ne note pas \overleftarrow{BA} .*

Définition (rappel)

On dit que l'image du point D est le point C par la *translation qui envoie A sur B* si ABCD est un parallélogramme.



Propriétés admises

- Si ABCD est un parallélogramme alors $\vec{AB} = \vec{DC}$.
- Si $\vec{AB} = \vec{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme.

Remarque

Si $\vec{AB} = \vec{CD}$ alors ABCD est un parallélogramme.

Propriétés

- Si $\vec{AB} = \vec{BC}$ alors B est le milieu de [AC]
- Si B est le milieu de [AC] alors $\vec{AB} = \vec{BC}$



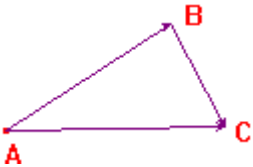
Démonstration

Si $\vec{AB} = \vec{BC}$ alors ABCB est un parallélogramme donc B est le milieu de [AC].

Si B est le milieu de [AC] alors ABCB est un parallélogramme et donc $\vec{AB} = \vec{BC}$.

Relation de CHASLES admise

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



Remarque

Effectuer la translation qui envoie A sur B puis la translation qui envoie B sur C revient à effectuer la translation qui envoie A sur C.

Remarque

La translation qui envoie A sur A laisse la figure inchangée.

Définition

On définit le vecteur nul (noté $\vec{0}$) par : $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \vec{DD} \dots$

Remarque

$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$ d'après la relation de Chasles donc $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$.

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{BA} ont pour somme le vecteur nul. On dit qu'ils sont **opposés** l'un de l'autre et on note :

$$\vec{BA} = -\vec{AB} \text{ et } \vec{AB} = -\vec{BA}$$

Comment construire la somme de deux vecteurs ?

1^{er} cas : A, B et C étant trois points quelconques, construire $\vec{AB} + \vec{BC}$.

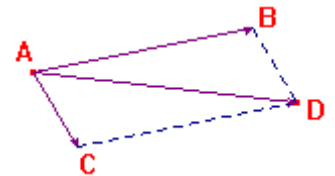
On a $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ d'après la relation de Chasles.

2^{ème} cas : A, B et C étant trois points quelconques, construire $\vec{AB} + \vec{AC}$.

On construit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Comme ABCD est un parallélogramme alors $\vec{AC} = \vec{BD}$.

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ d'après la relation de Chasles.



Exemple d'exercice

ABCD est un parallélogramme.

a- Construire le point E tel que $\vec{DE} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

b- Construire le point F tel que $\vec{BF} = \vec{DA} + \vec{DC}$

a- Comme ABCD est un parallélogramme, $\vec{AD} = \vec{BC}$

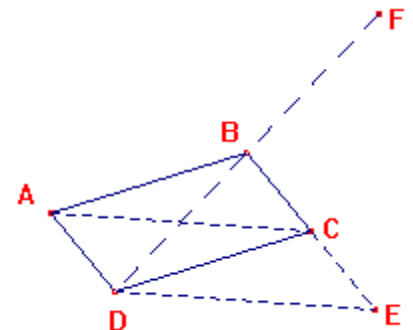
donc $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ d'après la relation de Chasles.

Donc $\vec{DE} = \vec{AC}$ donc ACED est un parallélogramme.

b- Comme ABCD est un parallélogramme, $\vec{DC} = \vec{AB}$

donc $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{DB}$ d'après la relation de Chasles.

Donc $\vec{BF} = \vec{DB}$ (ou $\vec{DB} = \vec{BF}$) donc B est le milieu de [DF].

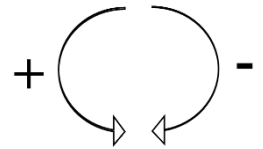


V – Rotations

Définition

Un angle est dit :

- positif s'il tourne dans le sens trigonométrique (l'inverse de la montre / antihoraire)
- négatif s'il tourne dans le sens chronométrique (la montre / horaire).



Remarque

Pour définir une rotation, il faut donner un angle. Pour définir le sens de rotation, on donne un signe à l'angle. Si l'on dit rotation d'angle -50° , il faut comprendre qu'il faut tourner dans le sens chronométrique (montre).

Si l'on dit rotation d'angle $+50^\circ$ (ou 50°), il faut comprendre qu'il faut tourner dans le sens trigonométrique (inverse de la montre).

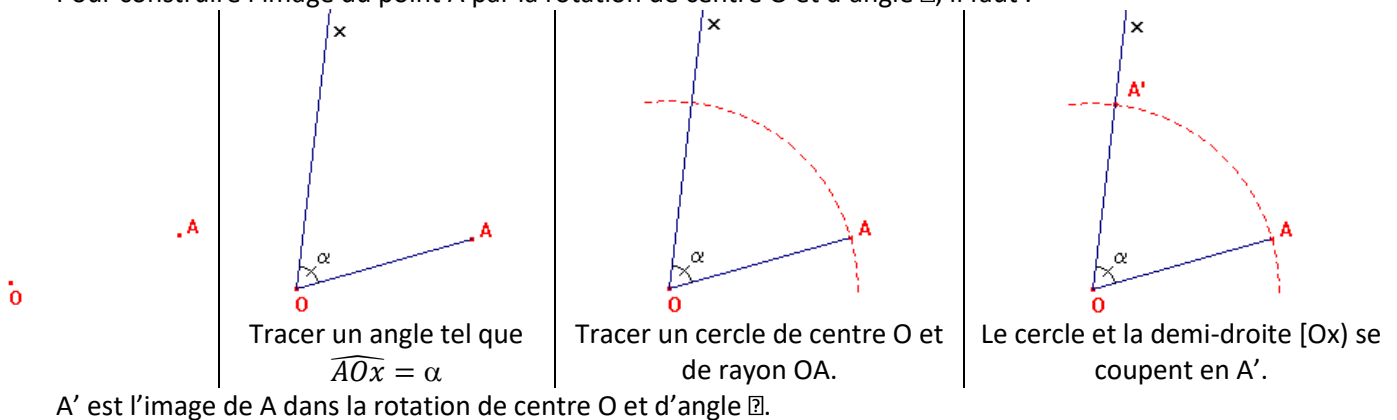
Définition

Le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle α si :

- $OA = OA'$
- $\widehat{AOA'} = \alpha$

Construction avec le rapporteur et le compas

Pour construire l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle α , il faut :



Propriété admise

La rotation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour mémoire

Pour une rotation, on tourne autour d'un point

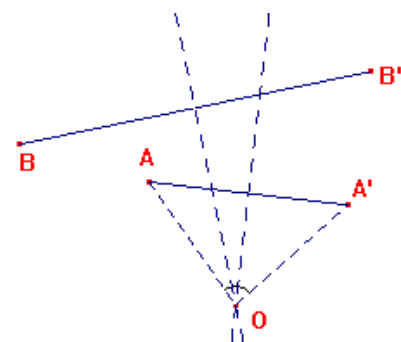
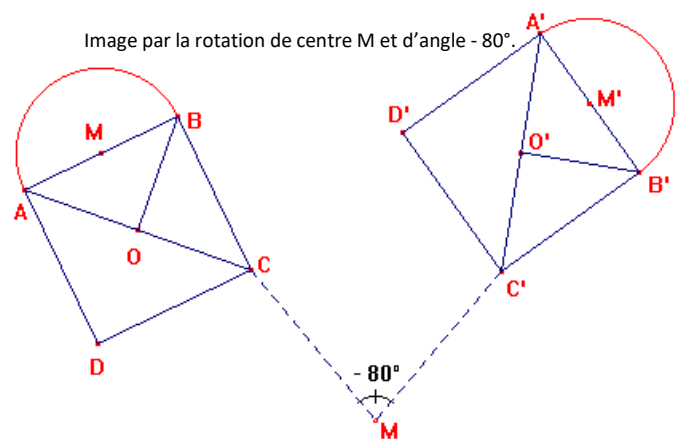
Caractériser

Pour caractériser une rotation, il faut trouver son centre et son angle.

Pour retrouver le centre O , on trace la médiatrice de deux segments formés par deux points et leurs images (médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$). Le point d'intersection de ces médiatrices est le centre de rotation O .

Si les segments $[AA']$ et $[BB']$ sont à supports parallèles, les médiatrices ne seront pas concourantes. Il faut choisir un autre segment $[CC']$ tel que (AA') et (CC') ne soient pas parallèles.

L'angle de la rotation est l'angle $\widehat{AOA'}$ ou $\widehat{BOB'}$.



EQUATIONS du premier degré à une inconnue – DEVELOPPER

I – Développer

Rappels sur la réduction des produits

On peut toujours réduire les produits.

$$2x \times 3x = 6x^2$$

$$-5 \times 3x = -15x$$

$$3x^2 \times 7x = 21x^3$$

Rappels sur la réduction de sommes

$$3x + 2x = 5x$$

$$15x - 8x = 7x$$

$$4x - 12x = -8x$$

$$15x^2 - 8x^2 = 7x^2$$

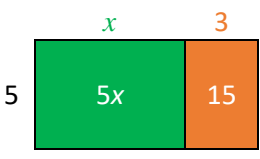
$$33x - 5x^2 + 7x + 11x^2 = 40x + 6x^2$$

$5x^2 + 3x$ ne peut pas se réduire

Remarque

Dans tous les exercices, il faudra réduire les expressions (*même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé*).

Remarque calcul de $5 \times (x + 3)$

| Géométrique | " Répétitif " | Avec la simple distributivité |
|--|--|--|
|  <p>$5 \times (x + 3) = 5x + 15$</p> | $5 \times (x + 3) = x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $= 5 \times x + 5 \times 3$ $= 5x + 15$ | $5 \times (x + 3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5x + 15$ |

Rappel simple distributivité - admise

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Exemples

$$5 \times (2x + 7) = 10x + 35$$

$$8 \times (x - 3) = 8x - 24$$

$$-6 \times (x + 7) = -6x - 42$$

$$-4 \times (x - 7) = -4x + 28$$

Remarque gestion du signe « - »

$$-(2x + 7) = -2x - 7$$

$$-(x - 3) = -x + 3$$

$$-(-3x + 7) = +3x - 7$$

$$-(-6x - 7) = +6x + 7$$

Exemples complexes

$$3(x + 5) + 7(x + 4) = 3x + 15 + 7x + 28 = 10x + 43$$

$$5(x + 7) + 8(x - 3) = 5x + 35 + 8x - 24 = 13x + 11$$

$$6(x - 4) - 9(x + 2) = 6x - 24 - 9x - 18 = -3x - 42$$

$$6(x - 7) + 9x(3x - 2) = 6x - 42 + 27x^2 - 18x = 27x^2 - 12x - 42$$

II – Equations

Rappel

Une équation

$$5x + 5 = 3x - 17$$

Membre de gauche Membre de droite

Remarque

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

Définition

On dit qu'un nombre est une solution d'une équation l'égalité entre les deux membres est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples

Pour l'équation $5x + 5 = 3x - 17$, tester si 2 et -11 sont des solutions.

| Méthode « littéraire » | Méthode en ligne | Méthode en colonne |
|--|--|---|
| Lorsque $x = 2$ alors <ul style="list-style-type: none"> le membre de gauche devient $5 \times 2 + 5 = 15$ et le membre de droite devient $3 \times 2 - 17 = -11$ Donc 2 n'est pas une solution. | Si $x = 2$ alors $5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15$ et $3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11$ Donc 2 n'est pas une solution. | Si $x = 2$ alors $\begin{array}{l l} 5x + 5 & 3x - 17 \\ = 5 \times 2 + 5 & = 3 \times 2 - 17 \\ = 15 & = -11 \end{array}$ Donc 2 n'est pas une solution. |
| Méthode « littéraire » | Méthode en ligne | Méthode en colonne |
| Lorsque $x = -11$ alors <ul style="list-style-type: none"> le membre de gauche devient $5 \times (-11) + 5 = -50$ et le membre de droite devient $3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc -11 est une solution. | Si $x = -11$ alors $5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50$ et $3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc -11 est une solution. | Si $x = -11$ alors $\begin{array}{l l} 5x + 5 & 3x - 17 \\ = 5 \times (-11) + 5 & = 3 \times (-11) - 17 \\ = -50 & = -50 \end{array}$ Donc -11 est une solution. |

Définition

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

Exemples

| Equation n'ayant pas de solution | Equation ayant une seule solution | Equation ayant une infinité de solution |
|---|--|---|
| $2x + 3 = 2x + 5$ | $5x + 5 = 3x - 17$ | $2(x + 5) - 2 = 2x + 8$ |
| On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution. | La solution de cette équation est -11. | On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie. Quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace x , l'égalité sera vraie. |

Remarque

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

Propriété - admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

- On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
- On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

Exemple de résolution d'une équation

Résoudre l'équation $2(x + 5) = 6x + 7$.

| | |
|--|--|
| $2(x + 5) = 6x + 7$ | On réécrit l'équation |
| $2x + 10 = 6x + 7$ | On simplifie l'écriture de chacun des membres en développant et réduisant |
| $\begin{array}{r} -6x \quad -10 \quad -6x \quad -10 \\ -4x \quad = \quad -3 \end{array}$ | On isole les inconnues dans un membre et les nombres dans l'autre en utilisant le point 1 de la propriété ci-dessus. |
| $\begin{array}{r} \div (-4) \quad \quad \div (-4) \\ x \quad = \quad 0,75 \end{array}$ | Pour trouver x , on divise par le nombre devant x en utilisant le point 2 de la propriété ci-dessus. |
| Si $x = 0,75$ alors $\begin{array}{l l} 2(x + 5) & 6x + 7 \\ = 2 \times (0,75 + 5) & = 6 \times 0,75 + 7 \\ = 11,5 & = 11,5 \end{array}$ | On teste si le nombre trouvé est bien une solution de l'équation en remplaçant dans l'équation du départ. |
| La solution de l'équation est 0,75 . On peut aussi noter : S = {0,75} | On conclue par une phrase. |

En contrôle, il faut écrire tout ce qui est en noir ci-dessus.

III – Problèmes

Exemple 1

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des poules et des lapins. J'ai compté 174 têtes et 400 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

| Soit L le nombre de lapins. | Expliciter l'inconnue. C'est souvent la question qui nous indique quelle inconnue choisir. | | | | | | | | | | | | |
|--|---|---------------|--------|-------|-------|---|---------|-----|--------|-------|---------------|-----|-------------------|
| <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Lapins</th> <th>Poules</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Têtes</td> <td>L</td> <td>174 - L</td> <td>174</td> </tr> <tr> <td>Pattes</td> <td>4 × L</td> <td>2 × (174 - L)</td> <td>400</td> </tr> </tbody> </table> <p> $4 \times L + 2 \times (174 - L) = 400$ $4L + 258 - 2L = 400$ $2L + 348 = 400$ $\quad -348 \quad -348$ $2L = 52$ $\div 2 \quad \div 2$ $L = 26$ </p> | | Lapins | Poules | Total | Têtes | L | 174 - L | 174 | Pattes | 4 × L | 2 × (174 - L) | 400 | Ecrire l'équation |
| | Lapins | Poules | Total | | | | | | | | | | |
| Têtes | L | 174 - L | 174 | | | | | | | | | | |
| Pattes | 4 × L | 2 × (174 - L) | 400 | | | | | | | | | | |
| Il y a 26 lapins et $174 - 26 = 148$ poules. | Interpréter le résultat | | | | | | | | | | | | |
| Vérification : Têtes : $26 + 148 = 174$ Pattes : $4 \times 26 + 2 \times 148 = 400$ <i>C'est bon</i> | Vérifier sur les données du problème | | | | | | | | | | | | |

Exemple 2

Jules à 8 ans et son père a 42 ans.

Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

| Soit x le nombre d'années à attendre. | Expliciter l'inconnue. Ici on choisit toujours le temps à attendre. | | | | | | | | | |
|---|---|----------|------|-------------|---|----|-----------------|---------|----------|-------------------|
| <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Jules</th> <th>Père</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Aujourd'hui</td> <td>8</td> <td>42</td> </tr> <tr> <td>Dans x années</td> <td>$8 + x$</td> <td>$42 + x$</td> </tr> </tbody> </table> <p> Père = 3 × Jules $42 + x = 3 \times (8 + x)$ $42 + x = 24 + 3x$ $-24 \quad -x \quad -24 \quad -x$ $18 = 2x$ $\div 2 \quad \div 2$ $9 = x$ </p> | | Jules | Père | Aujourd'hui | 8 | 42 | Dans x années | $8 + x$ | $42 + x$ | Ecrire l'équation |
| | Jules | Père | | | | | | | | |
| Aujourd'hui | 8 | 42 | | | | | | | | |
| Dans x années | $8 + x$ | $42 + x$ | | | | | | | | |
| Il faut attendre 9 ans . | Interpréter le résultat | | | | | | | | | |
| Vérification : dans 9 ans Jules : $8 + 9 = 17$ ans Père : $42 + 9 = 51$ ans $3 \times 17 = 51$ <i>C'est bon</i> | Vérifier sur les données du problème | | | | | | | | | |

Exemple 3

Un kilogramme de poire coûte un euro de plus qu'un kilogramme de pommes.

Marion a acheté trois kilos de pommes et cinq kilos de poires. Elle a payé vingt-cinq euros.

Quel est le prix d'un kilo de pommes ? de poires ?

Soit x le prix d'un kilogramme de pommes.

| | Pommes | Poires | Total |
|----------------|--------------|--------------------|-------|
| Quantité en kg | 3 | 5 | |
| Prix au kg | x | $x + 1$ | |
| Prix à payer | $3 \times x$ | $5 \times (x + 1)$ | 25 |

$$3 \times x + 5 \times (x + 1) = 25$$

$$3x + 5x + 5 = 25$$

$$8x + 5 = 25$$

$$\begin{array}{r} -5 \quad -5 \\ 8x = 20 \end{array}$$

$$8x = 20$$

$$\begin{array}{r} \div 8 \quad \div 8 \\ x = 2,5 \end{array}$$

$$x = 2,5$$

Les pommes coûtent **2,5 €** au kilo

et les poires coûtent $2,5 + 1 = \mathbf{3,5 \text{ €}}$ au kilo.

Vérification :

$$\text{Pommes : } 3 \times 2,5 = 7,5$$

$$\text{Poires : } 5 \times 3,5 = 17,5$$

$$\text{Total : } 7,5 + 17,5 = 25$$

C'est bon

Exemple 5

Kassandra et Arthur ont le même nombre de billes.

Si Arthur donne 10 billes à Kassandra, elle en aura alors deux fois plus que lui.

Combien ont-ils de billes au départ ?

Soit x le nombre de billes au départ.

| | Kassandra | Arthur |
|--------------|-----------|----------|
| Départ | x | x |
| Après calcul | $x + 10$ | $x - 10$ |

$$\text{Kassandra} = 2 \times \text{Arthur}$$

$$x + 10 = 2 \times (x - 10)$$

$$x + 10 = 2x - 20$$

$$30 = x$$

Ils avaient chacun **30 billes**.

Vérification :

$$\text{Kassandra : } 30 \rightarrow 30 + 10 = 40$$

$$\text{Arthur : } 30 \rightarrow 30 - 10 = 20$$

$$2 \times 20 = 40$$

C'est bon

Exemple 4

Marina et Karima pensent au même nombre.

Marina ajoute 8 et multiplie le résultat par 3.

Karima multiplie le résultat par 5 et ajoute 6.

Curieusement, elles trouvent le même résultat.

A quel nombre ont-elles pensé au départ ?

Soit x le nombre pensé au départ.

| | Marina | Karima |
|--------------|--------------------|------------------|
| Départ | x | x |
| Après calcul | $3 \times (x + 8)$ | $5 \times x + 6$ |

$$3 \times (x + 8) = 5 \times x + 6$$

$$3x + 24 = 5x + 6$$

$$\begin{array}{r} -3x \quad -6 \quad -3x \quad -6 \\ 18 = 2x \end{array}$$

$$18 = 2x$$

$$\begin{array}{r} \div 2 \quad \div 2 \\ 9 = x \end{array}$$

$$9 = x$$

Elles ont pensé au nombre **9**.

Vérification :

$$\text{Marina : } 9 \rightarrow 9 + 8 = 17 \rightarrow 17 \times 3 = 51$$

$$\text{Karima : } 9 \rightarrow 9 \times 5 = 45 \rightarrow 45 + 6 = 51$$

C'est bon

Exemple 6

Nathan a déjà eu 4 notes en français : 16, 9, 12 et 5.

Quelle doit être sa prochaine note s'il veut avoir 10 de moyenne ?

Soit x la prochaine note.

$$\frac{16 + 9 + 12 + 5 + x}{5} = 10$$

$$\frac{42 + x}{5} = 10$$

$$42 + x = 50$$

$$x = 8$$

Il doit avoir **8** à son prochain devoir.

Vérification :

$$\frac{16+9+12+5+8}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

C'est bon

IV – Inéquations

Définition

Une **inéquation** est une relation liant deux expressions algébriques séparées par un signe d'inéquation : $<$, $>$, \leq , ou \geq .

Exemples

$$2x + 5 > 3(x - 7)$$

$$5x - 2 < 2x + 7$$

$$2x - 3 \leq x + 4$$

$$x + 4 \geq 3x - 5$$

Définition

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnue pour que l'inégalité soit vraie.

Remarque

Lorsque l'on parle d'inégalité stricte ($<$ ou $>$) on précise "strictement", mais lorsque l'on parle d'inégalités larges (\leq ou \geq), on peut oublier le "ou égal".

On dit "strictement inférieur". Lorsque l'on dit "inférieur", il faut comprendre "inférieur ou égal".

Exemple

L'inéquation $x < 5$ admet pour solutions tous les nombres strictement inférieurs à 5.

Représentation graphique des solutions d'une inéquation

Selon les exercices, on demandera d'hachurer l'ensemble des solutions ou d'hachurer l'ensemble des points qui ne sont pas solutions. Si rien n'est précisé dans l'énoncé à ce sujet, il faudra préciser si l'on a hachuré les solutions ou les points qui ne sont pas solutions.

| | Les solutions sont hachurées | Les points hachurés ne sont pas solutions |
|------------|------------------------------|---|
| $x < 3$ | | |
| $x \leq 3$ | | |
| $x > 3$ | | |
| $x \geq 3$ | | |

Pour préciser si le point limite (ici 3) est solution, on place un crochet, tourné vers :

- les solutions si l'inégalité est large (\leq ou \geq)
- les points qui ne sont pas solutions si l'inégalité est stricte ($<$ ou $>$).

Propriété admise

Les nombres relatifs **ab** et **ac** sont dans le même ordre que **b** et **c** si **a** est strictement positif, dans l'ordre inverse si **a** est strictement négatif.

Exemples

$$2 < 5 \text{ et } 2 \times 7 < 5 \times 7$$

$$78 \geq 25 \text{ et } 78 \times 13 \geq 25 \times 13$$

$$5 < 12 \text{ et } 5 \times (-4) > 12 \times (-4)$$

7 est strictement positif, on ne change pas l'ordre

13 est strictement positif, on ne change pas l'ordre

-4 est strictement négatif, on change l'ordre

Propriété admise

Pour résoudre une inéquation, on peut (cela ne change pas les solutions) :

1. Additionner (ou soustraire) à chaque membre de l'inéquation une même expression.
2. Multiplier (ou diviser) chaque membre de l'inéquation par une même expression non nulle.

MAIS, si on multiplie (ou divise) par une expression négative, il faut INVERSER le sens de l'inéquation.

Pour résoudre une équation, on peut :

1. Additionner (ou soustraire) à chaque membre de l'équation une même expression.
2. Multiplier (ou diviser) chaque membre de l'équation par une même expression non nulle.

Exemples

$$x + 5 < 3 \text{ donc } x + 5 - 5 < 3 - 5 \text{ donc } x < -2$$

$$x - 4 > 7 \text{ donc } x - 4 + 4 > 7 + 4 \text{ donc } x > 11$$

$$2x \leq 12 \text{ donc } 2x \div 2 \leq 12 \div 2 \text{ donc } x \leq 6$$

$$-2x \leq 12 \text{ donc } -2x \div (-2) \geq 12 \div (-2) \text{ donc } x \geq -6$$

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à -2.

Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à 11.

Les solutions sont les nombres inférieurs à 6.

Les solutions sont les nombres supérieurs à -6.

On a divisé par un nombre négatif (-2), donc on inverse le sens de l'inéquation.

Remarque

Pour résoudre une inéquation, on commence par simplifier l'écriture algébrique de chacun des membres, puis on isole les inconnues dans un membre.

Astuce

Afin de ne pas avoir à multiplier (ou diviser) par une quantité négative, il peut être intéressant de "passer" les inconnues du côté où il y en a le plus.

En faisant ainsi, on n'a pas à se soucier du changement éventuel de sens de l'inégalité.

Exemples

$$2x + 5 > 3 \quad (x - 7) \text{ donc } 2x + 5 > 3x - 21 \text{ donc } 5 + 21 > 3x - 2x \text{ donc } 26 > x$$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres strictement inférieurs à 26.

$$x + 4 \geq 3x - 5 \text{ donc } x - 3x \geq -5 - 4 \text{ donc } -2x \geq -9 \text{ donc } x \leq -9 \div (-2) \text{ donc } x \leq 9/2$$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres inférieurs à 9/2.

Exemple de problème n° 1

Paul a déjà eu 4 notes de français : 10, 12, 7 et 9.

Quel doit être sa prochaine note, s'il veut avoir plus de 10 de moyenne ?

Soit x la prochaine note.

$$\frac{10 + 12 + 7 + 9 + x}{5} \geq 10 \text{ donc } \frac{38 + x}{5} \geq 10 \text{ donc } 38 + x \geq 10 \times 5 \text{ donc } 38 + x \geq 50 \text{ donc } x \geq 50 - 38$$

$$\text{donc } x \geq 12$$

Paul doit avoir plus de 12 à son prochain contrôle pour avoir plus de 10 de moyenne.

Exemple de problème n° 2

Patrick veut louer une voiture pour ses vacances.

L'entreprise A propose un tarif de 0,5 € par kilomètre.

L'entreprise B propose un tarif de 0,3 € par kilomètre, mais avec une prise en charge de 10 €.

Quel est le nombre de kilomètres parcourus pour lequel le tarif A est plus avantageux que le tarif B ?

Soit x le nombre de kilomètres parcourus.

Facultatif Le prix avec le tarif A est $0,5x$

Le prix avec le tarif B est $10 + 0,3x$

$$0,5x < 10 + 0,3x \text{ donc } 0,5x - 0,3x < 10 \text{ donc } 0,2x < 10 \text{ donc } x < 10 \div 0,2 \text{ donc } x < 50$$

Le tarif A est le plus avantageux si l'on parcourt moins de 50 kilomètres.

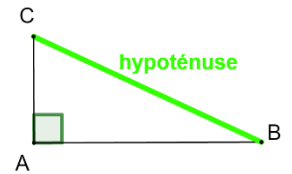
Triangles rectangles : PYTHAGORE

I – PYTHAGORE

Définition

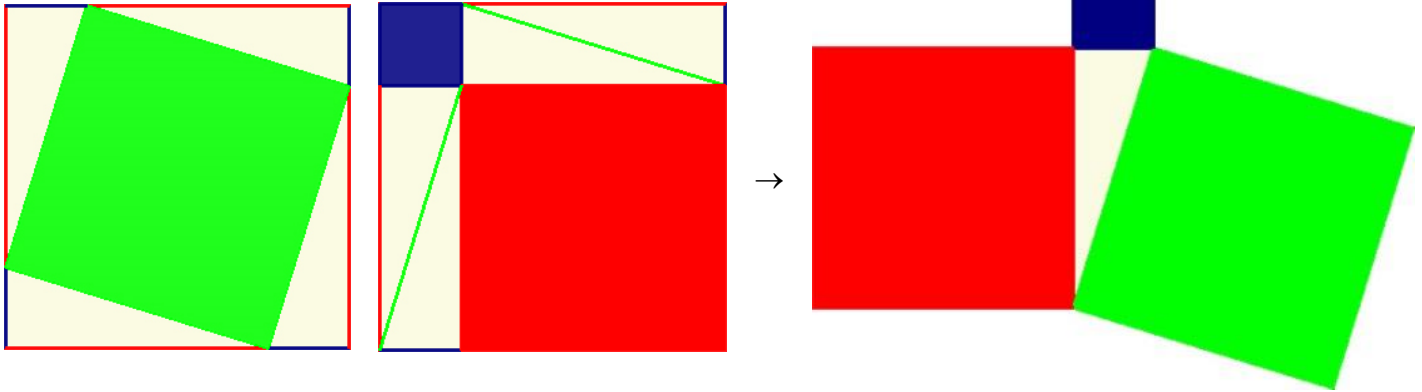
Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.

Hypoténuse vient du latin *hypotenusa* qui vient lui-même du grec *hupoteinousa* qui signifie « celle qui sous-tend ». Ce terme désigne le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit. Les côtés adjacents à l'angle droit étaient appelés cathètes.



Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

⚠ Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.

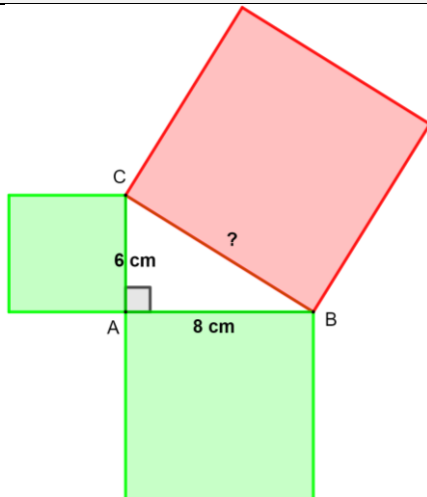
Le théorème d'Al Kashi est une extension de ce théorème de Pythagore dans les triangles quelconques.

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 8 \text{ cm}$
- $AC = 6 \text{ cm}$

Calcule BC.



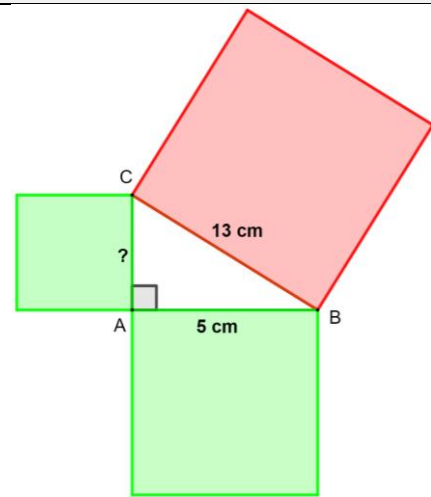
Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 \\ BC^2 &= 6^2 + 8^2 \\ BC^2 &= 36 + 64 \\ BC^2 &= 100 \\ BC &= \sqrt{100} = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 5 \text{ cm}$
- $BC = 13 \text{ cm}$

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ 13^2 &= 5^2 + AC^2 \\ 169 &= 25 + AC^2 \\ -25 \quad -25 & \\ 144 &= AC^2 \\ AC &= \sqrt{144} = 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$.

Calcule BC.

Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

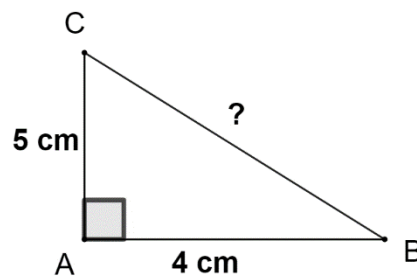
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 4^2 + 5^2$$

$$BC^2 = 16 + 25$$

$$BC^2 = 41$$

$$BC = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ cm}$$



Utilisation de la calculatrice

| CASIO FX92 | CASIO FX92 classwiz | TI collègue |
|---|---|---|
| Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape | | |
| 6 \square \square^2 + 8 \square \square^2 EXE | 6 \square \square^2 + 8 \square \square^2 EXE | 6 \square \square^2 + 8 \square \square^2 = |
| Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape | | |
| SECONDE \square \square^2 100 EXE | $\sqrt{\square}$ 100 EXE | SECONDE \square \square^2 100 = |

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

| Prouver qu'un triangle est rectangle. | Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle. |
|---|--|
| Soit ABC un triangle tel que $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$. | Soit ABC un triangle tel que $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$ et $AC = 6 \text{ cm}$. |
| Quelle est la nature de ABC ? | Quelle est la nature de ABC ? |
| Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté. | Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté. |
| $\begin{array}{l l} AC^2 & AB^2 + BC^2 \\ = 5^2 & = 3^2 + 4^2 \\ = 25 & = 9 + 16 \\ & = 25 \end{array}$ | $\begin{array}{l l} BC^2 & AB^2 + AC^2 \\ = 7^2 & = 5^2 + 6^2 \\ = 49 & = 25 + 36 \\ & = 61 \end{array}$ |
| Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B (car [AC] est l'hypoténuse). | Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors ABC n'est pas rectangle . |

II – RACINES CARREES (et racines cubiques hors programme en France mais nécessaire pour la poursuite en Suisse)

Remarque ♥

| | | | | | |
|-------------|-------------|--------------|--------------|---------------|--------------|
| $2^2 = 4$ | $3^2 = 9$ | $4^2 = 16$ | $5^2 = 25$ | $6^2 = 36$ | $7^2 = 49$ |
| $8^2 = 64$ | $9^2 = 81$ | $10^2 = 100$ | $11^2 = 121$ | $12^2 = 144$ | $13^2 = 169$ |
| $1^3 = 1$ | $2^3 = 8$ | $3^3 = 27$ | $4^3 = 64$ | $5^3 = 125$ | |
| $6^3 = 216$ | $7^3 = 343$ | $8^3 = 512$ | $9^3 = 729$ | $10^3 = 1000$ | |

Définitions

La racine carrée de a est le nombre positif noté \sqrt{a}
tel que $\sqrt{a^2} = a$

La racine cubique de a est le nombre noté $\sqrt[3]{a}$
tel que $\sqrt[3]{a^3} = a$

Remarques sur la racine carrée

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow \blacksquare^2 \rightarrow & \\ 5 & & 25 \\ & \leftarrow \sqrt{\blacksquare} \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt{4} = 2 & \sqrt{9} = 3 & \sqrt{16} = 4 & \sqrt{25} = 5 & \sqrt{36} = 6 & \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{64} = 8 & \sqrt{81} = 9 & \sqrt{100} = 10 & \sqrt{121} = 11 & \sqrt{144} = 12 & \sqrt{169} = 13 \end{array}$$



La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\sqrt{-1}$ n'existe pas
 $\sqrt{-4}$ n'existe pas

Au lycée, une solution sera proposée pour ces racines carrées : les nombres complexes.

Remarques sur la racine cubique

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow \blacksquare^3 \rightarrow & \\ 5 & & 125 \\ & \leftarrow \sqrt[3]{\blacksquare} \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[3]{1} = 1 & \sqrt[3]{8} = 2 & \sqrt[3]{27} = 3 & \sqrt[3]{64} = 4 & \sqrt[3]{125} = 5 \\ \sqrt[3]{216} = 6 & \sqrt[3]{343} = 7 & \sqrt[3]{512} = 8 & \sqrt[3]{729} = 9 & \sqrt[3]{1000} = 10 \\ \sqrt[3]{-1} = -1 & \sqrt[3]{-8} = -2 & \sqrt[3]{-27} = -3 & \sqrt[3]{-64} = -4 & \sqrt[3]{-125} = -5 \\ \sqrt[3]{-216} = -6 & \sqrt[3]{-343} = -7 & \sqrt[3]{-512} = -8 & \sqrt[3]{-729} = -9 & \sqrt[3]{-1000} = -10 \end{array}$$

Propriétés admises

Soient a et b deux nombres positifs avec b non nul.

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a \times b} &= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Pour tous les nombres a et b avec b non nul.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^3} &= a \\ \sqrt[3]{a^3} &= a \\ \sqrt[3]{a \times b} &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \end{aligned}$$

Exemples de calculs

$$\begin{array}{ll} \sqrt{5^2} = 5 & \sqrt{1,2^2} = 1,2 \\ \sqrt{3^2} = 3 & \sqrt{5,2^2} = 5,2 \\ \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} & \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{7^3} = 7 & \sqrt[3]{-8^3} = -8 \\ \sqrt{11^3} = 11 & \sqrt{(-4)^3} = -4 \\ \sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \times 20} = \sqrt[3]{1000} = 10 & \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3} & \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3 \end{array}$$

Définition

Simplifier une racine s'est transformer une racine en produit d'un entier par une racine d'un nombre dont la distance à zéro est plus petite.

Astuce

Pour simplifier la racine d'un entier, il faut écrire l'entier sous la forme du produit d'un carré (ou cube) par un entier

Exemples de simplification de racines carrées

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} & \sqrt{24} &= \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6} \\ \sqrt{147} &= \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3} & \sqrt{20} &= \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ 7\sqrt{50} - 4\sqrt{18} &= 7 \times \sqrt{25 \times 2} - 4 \times \sqrt{9 \times 2} = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 23\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exemples de simplification de racines cubiques

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{32} &= \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4} & \sqrt[3]{250} &= \sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} \\ 11\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{-375} &= 11\sqrt[3]{8 \times 3} + 7\sqrt[3]{-125 \times 3} = 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + 7 \times \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{3} \\ &= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} + 7 \times (-5) \times \sqrt[3]{3} = 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3} = -13\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

Remarques

Les racines doivent être simplifiées.

Les calculatrices simplifient automatiquement les racines carrées.

Exemple avec décomposition en produit de facteurs premiers

$$31104 = 2^7 \times 3^5$$

$$\begin{aligned}\sqrt{31104} &= \sqrt{2^7 \times 3^5} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= 72\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{31104} &= \sqrt[3]{2^7 \times 3^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times 3 \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= 12\sqrt[3]{18}\end{aligned}$$

FONCTIONS généralités

Exemple de la balle

On a lancé une balle en l'air.

Sur l'axe des abscisses se trouve le temps en secondes et sur l'axe des ordonnées se trouve la hauteur de la balle en mètres.

La hauteur de la balle dépend du temps ; on dit qu'on peut donner la hauteur de la balle en fonction du temps. On appelle x le temps et f la hauteur de la balle en fonction du temps. On dit qu'on peut exprimer f en fonction de x .

Après 0 seconde (au départ), la hauteur de la balle est de 15 m. On dit que 15 est l'image de 0 par f et on note $f(0) = 15$, qui se lit *f de 0 égal 15*.

Après 1 seconde, la hauteur de la balle est à son maximum ; elle est de 20 m.

On dit que 20 est l'image de 1 par f et on note $f(1) = 20$.

Après 2 secondes, la hauteur de la balle est de 15 m.

On dit que 15 est l'image de 2 par f et on note $f(2) = 15$.

Après 3 secondes, la hauteur de la balle est de 0 m.

On dit que 0 est l'image de 3 par f et on note $f(3) = 0$.

On a déterminé (par un calcul de physique) que la hauteur en fonction du temps était donnée par la formule : $-5x^2 + 10x + 15$.

On notera :

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

ou

$$f : x \rightarrow -5x^2 + 10x + 15$$

On a vu qu'on pouvait lire l'image d'un nombre sur le graphique. Il est aisé de calculer cette image en utilisant la forme algébrique de la fonction.

Par exemple, on cherche la hauteur de la balle après 1,5 s. On va calculer $f(1,5)$:

$$f(1,5) = -5 \times 1,5^2 + 10 \times 1,5 + 15 = 18,75.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la hauteur de la balle après 1,5 s est de 18,75 m.

On a vu que la hauteur de la balle après 0 ou 2 secondes était la même (15 m). On dira que 0 et 2 secondes sont **des antécédents** de 15 m.

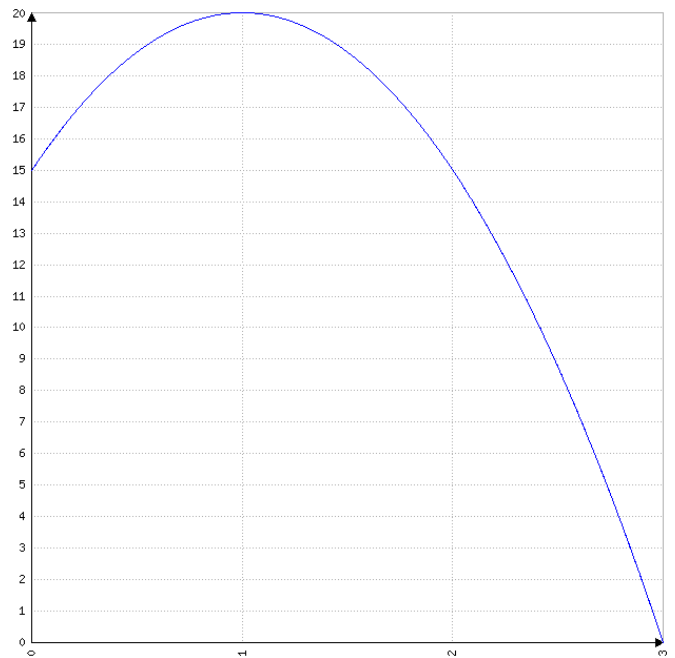
Le nombre 20 a un seul **antécédent** 1.

Le nombre 22 n'a pas **d'antécédent** car la balle n'est jamais montée jusqu'à 22 m.

Remarque

Un nombre a toujours une et une seule image par une fonction.

Un nombre peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents par une fonction.



Comment déterminer l'image d'un nombre par une fonction ?

Par exemple, on cherche l'image de 0,5 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

1^{er} cas : méthode graphique

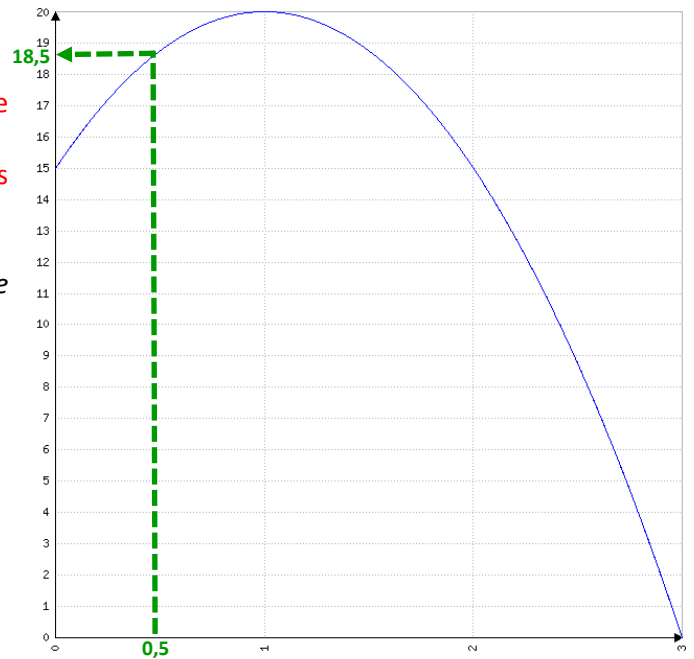
On se positionne à 0,5 sur l'axe des abscisses.

On « monte » (ou « descend ») jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « part horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées et on lit la valeur.

On trouve ici que $f(0,5) \approx 18,5$.

Par lecture graphique, on trouve une valeur dont on ne sait pas si elle est exacte.



2^{ème} cas : par le calcul

Il suffit de remplacer x par 0,5 dans la formule

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15.$$

$$f(0,5) = -5 \times 0,5^2 + 10 \times 0,5 + 15 = 18,75.$$

On trouve une valeur exacte.

Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction ?

1^{er} cas : méthode graphique

Par exemple, on cherche les antécédents de 17 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

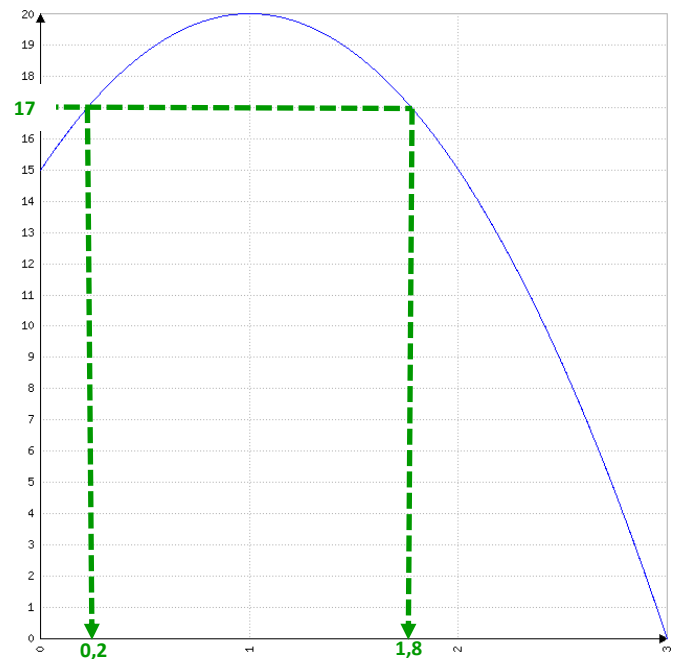
On se positionne à 17 sur l'axe des ordonnées.

On « part horizontalement » jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « monte » (ou descend) jusqu'à l'axe des abscisses et on lit les valeurs.

On trouve ici que les antécédents de 17 sont environ 0,2 et 1,8. Par lecture graphique, on trouve des valeurs dont on ne sait pas si elles sont exactes.

Bien penser à chercher tous les antécédents.



2^{ème} cas : par le calcul

Par exemple, on cherche les antécédents de 15 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

Il faut résoudre une équation. **ATTENTION, ce n'est pas toujours possible.**

Au lycée, on verra comment trouver une valeur approchée avec la calculatrice graphique.

On cherche les nombres x tels que $f(x) = 15$

$$\text{donc } -5x^2 + 10x + 15 = 15$$

$$\text{donc } -5x^2 + 10x = 0$$

$$\text{donc } x(-5x + 10) = 0$$

Or « si un produit est nul, alors l'un, au moins, des facteurs est nul »

$$\begin{array}{l} \text{donc } x = 0 \quad \text{ou} \quad -5x + 10 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad -5x = -10 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad x = 2 \end{array}$$

Les antécédents de 15 sont 0 et 2.

Comment construire la représentation graphique d'une fonction ?

1. On construit un « tableau de valeurs ».
2. On construit un repère et on place les points dans le repère.
3. On relie les points.

Attention, les points ne sont pas obligatoirement alignés ; il faut donc les relier en formant une courbe et non pas nécessairement une droite.

Exemple

On veut construire la représentation graphique de la fonction f définie par la formule $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$ pour x appartenant à l'intervalle $[-4 ; 4]$

On prend n'importe quels nombres.

En général, on prend les bornes de l'intervalle (ici, -4 et 4) et on place des valeurs régulièrement. Ici, le pas (l'écart entre deux nombres) est 1.

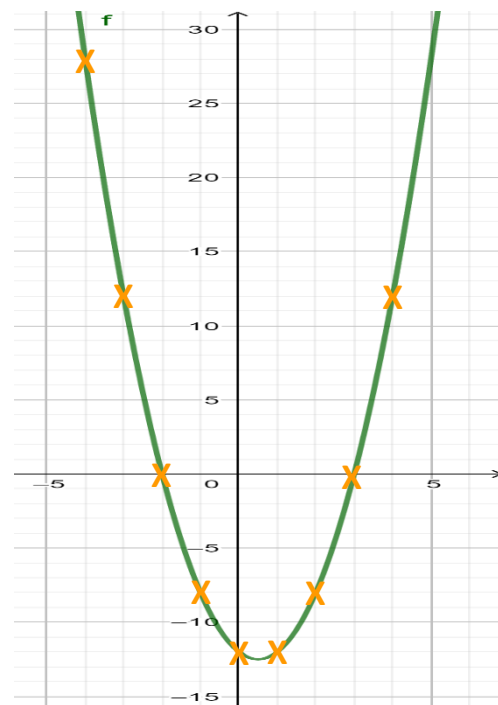
| | | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|-----|-----|----|---|----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 28 | 12 | 0 | -8 | -12 | -12 | -8 | 0 | 12 |

On calcule les images de la première ligne avec la formule $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$

Ce tableau de valeur peut être calculé avec la machine.

Sur la CASIO, taper

| | |
|------------------------------------|---|
| MODE 4 :table | Place la calculatrice en mode tableau de valeur |
| $f(x) = 2X^2 - 2X - 12$ EXE | On rentre la fonction en utilisant la touche X de la calculatrice. |
| Début ? -4 EXE | On rentre le point de départ du tableau de valeur. |
| Fin ? 4 EXE | On rentre le point d'arrivée du tableau de valeur. |
| Pas ? 1 EXE | On rentre le pas du tableau de valeur (l'écart entre deux nombres). |
| | On obtient le tableau de valeur |
| MODE 1 :comp | Pour revenir au mode « normal » |



PROPORTIONNALITE et HOMOTHETIES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

| | | | | |
|---|-------|-------|-------|----------|
| Volume de sans plomb 95 (E10) en litres | 15 | 23 | 12 | ↓ × 1,52 |
| Prix en € | 22,80 | 34,96 | 18,24 | |

Propriété admise

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \quad \text{départ} \xrightarrow{\times \frac{\text{arrivée}}{\text{départ}}} \text{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \quad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \quad 5 \xrightarrow{\begin{matrix} \times \frac{645}{5} \\ \text{ou} \\ \times 129 \end{matrix}} 645 \quad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \quad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

- 1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.
- 2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

| | | | |
|------------------------|------|------|-------|
| Masse de fraises en kg | 3 | 5 | 7 |
| Prix en € | 5,10 | 8,50 | 11,90 |

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5,1}{3} = 1,7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8,5}{5} = 1,7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11,9}{7} = 1,7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

| | | | |
|-----------------------|------|------|-------|
| Masse de poires en kg | 3 | 5 | 7 |
| Prix en € | 4,80 | 8,00 | 11,00 |

$$\frac{4,80}{3} = 1,6 \quad \frac{8,00}{5} = 1,6 \quad \frac{11,00}{7} \approx 1,57$$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

| | | |
|----|----|----|
| 9 | 15 | 18 |
| 12 | 20 | 24 |

$$\frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } a \times d = b \times c$$

$$\text{Si } a \times d = b \times c \text{ alors } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix :

$$65 \times 161 = 10\,465$$

$$\text{et } 91 \times 115 = 10\,465$$

$$\text{donc } 65 \times 161 = 91 \times 115 \text{ donc } \frac{65}{91} = \frac{115}{161}$$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix :

$$7 \times 17 = 119$$

$$\text{et } 13 \times 9 = 117$$

$$\text{donc } 7 \times 17 \neq 13 \times 9 \text{ donc } \frac{7}{13} \neq \frac{9}{17}$$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\frac{5}{4} = \frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$$5 \times ? = 4 \times 7 \quad \text{On effectue les produits en croix}$$

$$5 \times ? = 28 \quad \text{On simplifie chaque membre}$$

$$? = 5,6 \quad \text{On divise par 5}$$

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$$\frac{5}{4} = \frac{7}{a}$$

$$a = \frac{4 \times 7}{5} = 5,6$$

$$\frac{5}{4} = \frac{b}{3}$$

$$b = \frac{3 \times 5}{4} = 3,75$$

$$\frac{c}{4} = \frac{7}{2}$$

$$c = \frac{4 \times 7}{2} = 14$$

$$\frac{5}{d} = \frac{7}{3}$$

$$d = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7}$$

Exemple 5

Trouve le nombre manquant $\frac{6}{4} = \frac{5+a}{a}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$$6 \times a = 4 \times (5 + a) \quad \text{On effectue les produits en croix}$$

$$6a = 20 + 4a \quad \text{On simplifie chaque membre}$$

$$\begin{array}{r} -4a \\ 2a = 20 \end{array}$$

$$2a = 20 \quad \text{On isole les inconnues dans un membre}$$

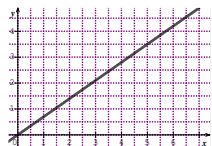
$$a = 10 \quad \text{On divise les deux membres par 2}$$

Propriété – admise

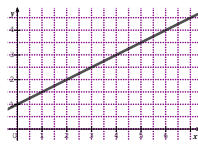
La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

- une droite
- qui passe par l'origine du repère

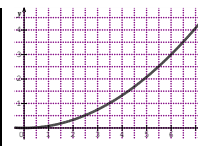
Exemples



Une droite qui passe par l'origine
Situation de proportionnalité



Une droite qui ne passe pas par l'origine
Pas une situation de proportionnalité



Pas une droite

II – Vitesse, distance et temps



$$3,4h \neq 3h 40 \text{ min}$$

$$3,4 \text{ h} = 3h + 0,40h = 3h 24\text{min}$$

$\xrightarrow{\times 60}$

$$3h 18\text{min} \neq 3,18h$$

$$3h 18 \text{ min} = 3h + 0,30h = 3,3h$$

$\xrightarrow{\div 60}$

Conversions avec la calculatrice

Pour convertir 3,15h, je tape

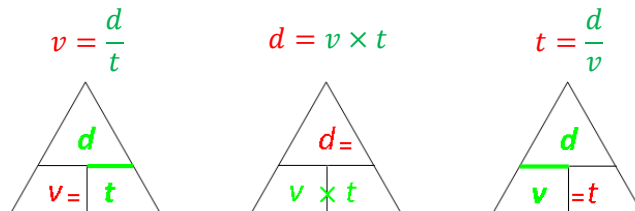
| CASIO FX92 | CASIO FX92 classwiz | Texas Instruments |
|------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| 3,15 [EXE] [000] | 3,15 [EXE] [Format] [Sexagésimal] | 3,15 [2nde] [π] [→DMS] [entrer] |
| 3,15 h = 3h 9min | | |

Pour convertir 3h 12min, je tape

| CASIO FX92 | CASIO FX92 classwiz | Texas Instruments |
|------------------------------|---|-------------------------------------|
| 3 [000] 12 [000] [EXE] [000] | 3 [↑] + 12 [↑] + [EXE] [Format] [Décimal] | 3 [2nde] [π] 12 [2nde] [π] [entrer] |
| 3h 12min = 3,2h | | |

Propriétés admises

Si d est la distance, t le temps et v la vitesse moyenne on a alors



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$$v = \frac{d}{t} = \frac{183}{3} = 61$$

Méthode 2

| Distance | Temps |
|----------|-------|
| 183 km | 3h |
| ? | 1h |

↓ ÷3

$$? = \frac{183 \times 1}{3} = 61$$

Sa vitesse moyenne est de **61 km/h**.

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$$

Méthode 2

| Distance | Temps |
|----------|-------|
| 43 km | 1h |
| ? | 3h |

↓ ×3

$$? = \frac{43 \times 3}{1} = 129$$

La distance parcourue est **129 km**.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4,5} = \frac{8}{3}$$

Méthode 2

| Distance | Temps |
|----------|-------|
| 4,5 km | 1h |
| 12 km | ? |

→ ÷ 4,5

$$? = 12 \div 4,5 = \frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$ h = 2h 40min.

Exemple 4 : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Convertir 15 m/s en km/h

| Distance | Temps |
|-----------|---------|
| 135 km | 1 h |
| = | = |
| 135 000 m | 3 600 s |
| ? | 1 s |

↓ ÷ 3 600

$$? = 135\ 000 \div 3\ 600 = 37,5$$

$$135\text{ km/h} = 37,5\text{ m/s}$$

| Distance | Temps |
|----------|---------|
| 15 m | 1 s |
| ? m | 3 600 s |
| = | = |
| ? km | 1h |

↓ × 3600

$$? = 15 \times 3600 = 54\ 000\text{ m} = 54\text{ km}$$

$$15\text{ m/s} = 54\text{ km/h}$$

III – Ratios

Définitions

Deux nombres a et b sont dans le *ratio* 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$



Trois nombres a, b, c sont dans le *ratio* 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$



Exemple d'application 1

Les ingrédients de la pâte brisée sont dans le ratio 1 : 1 : 2

Cela signifie qu'il faut 1 part de beurre pour 1 part de sucre et 2 parts de farine.

| Beurre | Sucre | Farine |
|--------|--------|---------|
| 1 part | 1 part | 2 parts |
| 125 g | 125 g | 250 g |

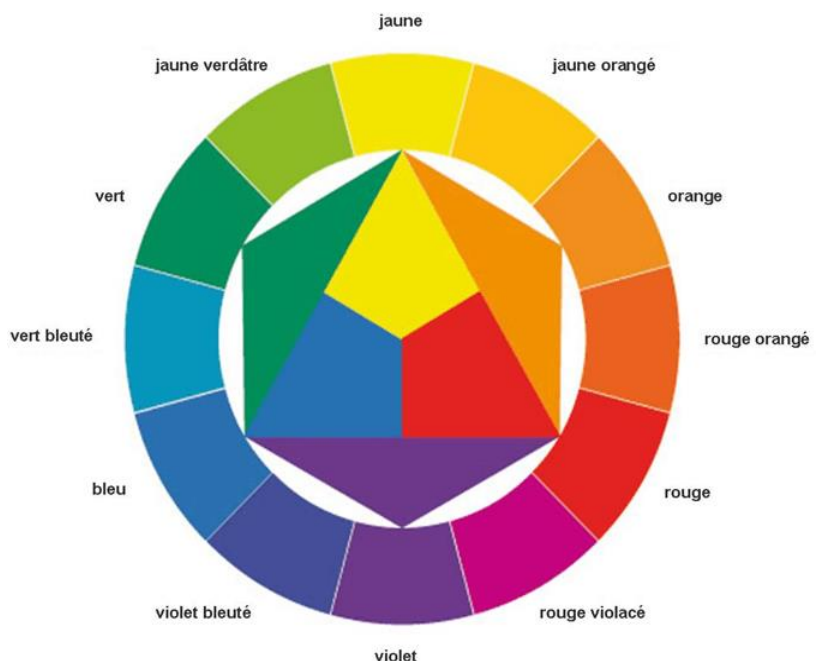
Pour une pâte à tarte

Exemple d'application 2

Les couleurs secondaires (vert, orange et violet) sont dans le ratio 1:1. Par exemple, pour obtenir du vert, on prend 1 part de jaune et 1 part de bleu.

Pour obtenir le jaune verdâtre, on prend 1 part de vert et une part de jaune. On dit qu'il est dans le ratio 1:1 avec le vert et le jaune.

Pour obtenir le jaune verdâtre, on peut aussi pendre 1 part de bleu et 3 parts de jaune. On dit alors qu'il est dans la ration 1:3 avec le bleu et le jaune.



Exemple d'application 3

Julien a rangé ses jouets dans des petites boîtes en carton.

Il a 3 boîtes de voitures et 4 boîtes de poupées.



On peut dire que ses jouets sont dans le ration 3:4 pour les voitures et les poupées.

Il y a $\frac{3}{7}$ de boîtes de voitures et $\frac{4}{7}$ de boîtes de poupées.

| Voitures | Poupées | Total |
|----------|---------|-------|
| 3 | 4 | 7 |

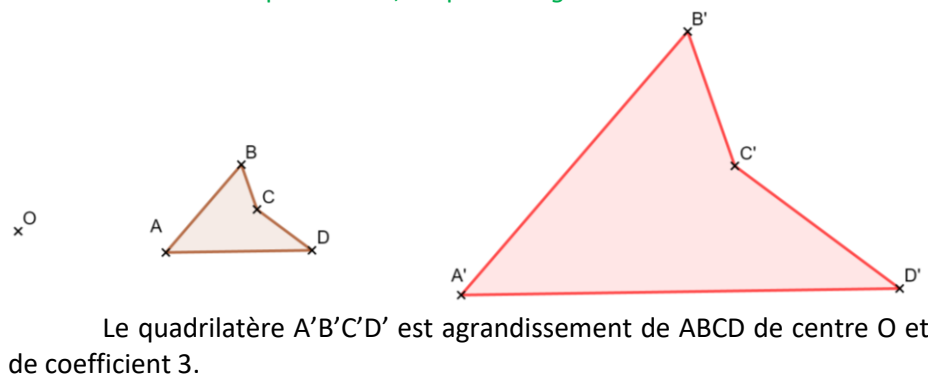
IV – Agrandissement/réduction - Homothéties

Définition

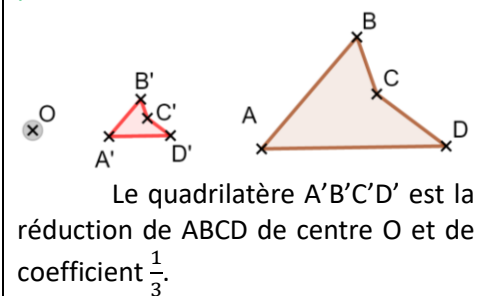
Le point A' est l'image du point A par l'homothétie de centre O et de coefficient k si :

- $A' \in (OA)$
- $OA' = k \times OA$

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'agrandissement.



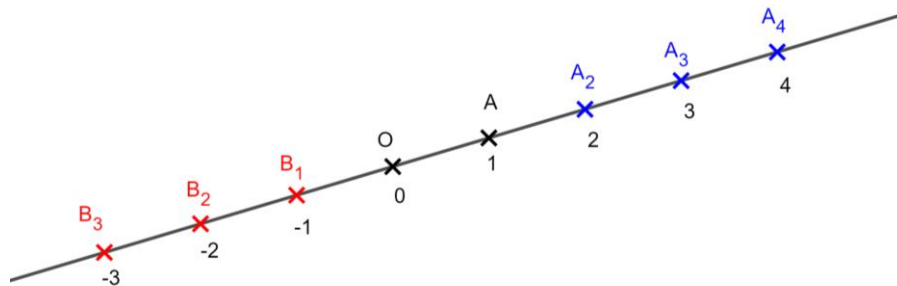
Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de réduction.



Construction

Pour construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k , il faut :

- Si $k > 0$, tracer $[OA)$ puis mesurer $[OA]$ et placer A' sur $[OA)$ tel que $OA' = k \times OA$
- Si $k < 0$, tracer $[AO)$ puis mesurer $[OA]$ et placer A' sur $[AO)$ tel que $OA' = (\text{distance à zéro de } k) \times OA$



- A_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d'agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l'année).

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré $A'B'C'D'$.
4. Tracer la diagonale $[A'C']$
5. Placer son milieu E' .
6. Tracer le segment $[B'E']$.
7. Placer le point M' au milieu de $[A'B']$.
8. Tracer le demi-cercle de diamètre $[A'B']$ à l'extérieur du carré.

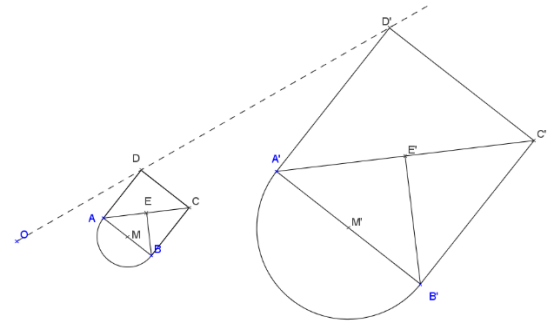


Image par l'homothétie de centre O
et de rapport 3.

Caractériser

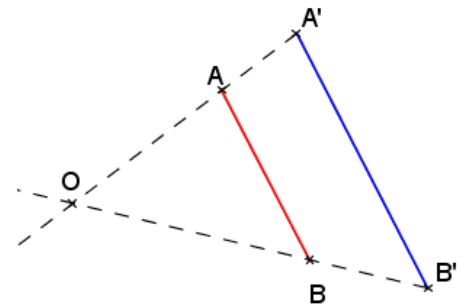
Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites $[A'A]$ et $[B'B]$; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer $[OA]$ et $[OA']$.

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.



ARITHMETIQUE

Exemple

Les diviseurs de 45 sont : 1, 3, 5, 9, 15 et 45.

Définition

Un *diviseur commun* à deux nombres entiers est un nombre entier qui divise chacun d'eux.

Exemples

- ▶ 2 est un diviseur commun à 6 et à 10
- ▶ Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.
Les diviseurs de 18 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18.
Donc les diviseurs communs à 12 et 18 sont 1 ; 2 ; 3 et 6.

Définition

Le *plus grand des nombres* parmi les diviseurs communs à plusieurs nombres entiers est appelé le *plus grand diviseur commun*, noté *PGCD*.

Exemple

Le PGCD de 12 et 18 est 6.
On note : **PGCD (12 ; 18) = 6**.

Définition

Le *plus petit des multiples* à plusieurs nombres entiers est appelé le *plus petit multiple commun*, noté *PPCM*.

Exemple

Les multiples de 15 sont 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ...
Les multiples de 20 sont 20 ; 40 ; 60 ; 80 ; 100 ...
Le plus petit multiple commun à 15 et 20 est 60
On note : **PPCM (15 ; 20) = 60**.

Remarque

C'est ce que l'on a intérêt à faire lorsque l'on cherche un dénominateur commun lors de l'addition (ou la soustraction de deux fractions).

Exemple

$$\frac{7 \times 4}{15 \times 4} + \frac{11 \times 3}{20 \times 3} = \frac{28}{60} + \frac{33}{60} = \frac{61}{60}$$

Comment trouver le PGCD et le PPCM de deux entiers ?

Par exemple, je veux calculer le PGCD et le PPCM de 1620 et 4704.

Je décompose 1620

| | |
|------|---|
| 1620 | |
| 810 | 2 |
| 405 | 2 |
| 135 | 3 |
| 45 | 3 |
| 15 | 3 |
| 5 | 3 |
| 1 | 5 |

$$1620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$$

Je décompose 4704

| | |
|------|---|
| 4704 | |
| 2352 | 2 |
| 1176 | 2 |
| 588 | 2 |
| 294 | 2 |
| 147 | 2 |
| 49 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | 7 |

$$4704 = 2^5 \times 3 \times 7^2$$

Je décompose les 2 nombres en produits de facteurs premiers.
Voir la page 8.

$$1620 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$4704 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$$

$$\text{PGCD (1620 ; 4704)} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

Pour calculer le PGCD, j'écris la décomposition sous la forme d'un produit sans puissances.

Je cherche tout ce qui est commun.

J'écris le produit de tous les facteurs communs et j'obtiens le PGCD.

$$1620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$$

$$4704 = 2^5 \times 3 \times 7^2$$

$$\text{PPCM (1620 ; 4704)} = 2^5 \times 3^4 \times 5 \times 7^2 = 635\,040$$

Pour calculer le PPCM, j'écris les nombres sous la forme du produit de puissances.

J'écris tous les facteurs des décompositions avec la plus forte puissance puis j'effectue le produit ; j'obtiens le PPCM.

Définitions

Deux nombres entiers sont dits *premiers entre eux* si leur PGCD vaut 1.

Une fraction est dite *irréductible* si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux (donc si leur PGCD vaut 1).

Exemples

- ▶ Comme $\text{PGCD}(233 ; 377) = 1$ alors 233 et 377 sont premiers entre eux donc $\frac{233}{377}$ est irréductible.
- ▶ Comme $\text{PGCD}(42 ; 75) = 3$ alors 42 et 75 ne sont pas premiers entre eux donc $\frac{75}{42}$ est réductible (on peut la simplifier).

Comment rendre une fraction irréductible ?

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ que l'on veut rendre irréductible.

Si $\text{PGCD}(a ; b) = 1$ alors $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Si $\text{PGCD}(a ; b) \neq 1$ alors on divise le numérateur et le dénominateur de la fraction par ce PGCD et on obtient une fraction irréductible.

Exemples

- ▶ $\frac{180}{170} = \frac{18}{17}$ est irréductible car on a divisé le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur PGCD, qui est ici 10.
- ▶ $\frac{180 \div 10}{170 \div 10} = \frac{18}{17}$
- ▶ $\frac{307}{315}$ est irréductible car $\text{PGCD}(307 ; 315) = 1$

Propriété - admise

Les diviseurs communs à deux entiers sont les diviseurs de leur PGCD.

Exemples

- ▶ Comme $\text{PGCD}(1000 ; 750) = 250$ alors les diviseurs communs à 1000 et 750 sont les diviseurs de 250, ce sont donc 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50 ; 125 ; 250.
- ▶ Comme $\text{PGCD}(233 ; 373) = 1$ alors 233 et 373 n'ont que 1 comme diviseur commun.

Comment déterminer ce que l'on trouve lorsque l'on a un diviseur commun ou le PGCD ?
 Lorsqu'il s'agit d'un mélange, le PGCD est le nombre de paquets.
 Lorsqu'il ne s'agit pas d'un mélange, le PGCD est le nombre d'objets dans un paquet.

Exemple

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|--|--|-----|--|----|---|----|---|----|---|---|---|---|---|---|---|----|--|----|---|----|---|---|---|---|---|
| Enoncés | Jacques dispose de 144 billes et 40 soldats de plomb. Il veut tout donner à ses copains de telle sorte que chaque copain ait ... | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | le même nombre d'objets de chaque sorte. Combien a-t-il de copains au maximum et que recevront-ils ? | le même nombre d'objets : soit des billes, soit des soldats. Que recevra au maximum chaque personne et combien a-t-il de copains ? | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Réponses | Pourquoi un diviseur commun ? | Comme il veut utiliser toutes les billes et tous les soldats de plomb et comme chacun recevra la même chose, alors le nombre de copains est un diviseur commun à 144 et 40. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Pourquoi le plus grand ? | Comme il veut partager en un maximum de copains, alors le nombre de copains est le PGCD de 144 et 40. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Calcul du PGCD | <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>Je décompose 144</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>144</td><td></td></tr> <tr><td>72</td><td>2</td></tr> <tr><td>36</td><td>2</td></tr> <tr><td>18</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> </table> <p>$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Je décompose 40</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>40</td><td></td></tr> <tr><td>20</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> </table> <p>$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">PGCD (144 ; 40) = $2 \times 2 \times 2 = 8$</p> | 144 | | 72 | 2 | 36 | 2 | 18 | 2 | 9 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 40 | | 20 | 2 | 10 | 2 | 5 | 2 | 1 | 5 |
| | 144 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 72 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 36 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 40 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Phrase réponse | Il a 8 copains et chacun aura $144 \div 8 = 18$ billes et $40 \div 8 = 5$ soldats. | Chacun recevra 8 objets . Il y aura $144 \div 8 = 18$ copains qui auront 8 billes et $40 \div 8 = 5$ copains qui auront 8 soldats. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

PGCD avec la calculatrice ou sur l'ordinateur

Pour calculer le PGCD d 18 et 12, je tape

| CASIO FX92 | CASIO FX92 classwiz | TI COLLEGE PLUS |
|--|--|---------------------------------------|
| [SECONDE] [CALC] 18 [SECONDE] [3] 12 [)] [EXE] | [CATALOG] puis [Calcul numérique] puis [PGCD] [EXE] 18 ; 12) | [maths] 1 18 [2nde] , 12 [)] [entrer] |

Théorème de THALES

Rappel

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \quad \text{départ} \xrightarrow{\times \frac{\text{arrivée}}{\text{départ}}} \text{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \quad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \quad 5 \xrightarrow{\begin{matrix} \times \frac{645}{5} \\ \text{ou} \\ \times 129 \end{matrix}} 645 \quad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \quad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

Soit ABC un triangle.

Si $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$ et $(BC) \parallel (DE)$ alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

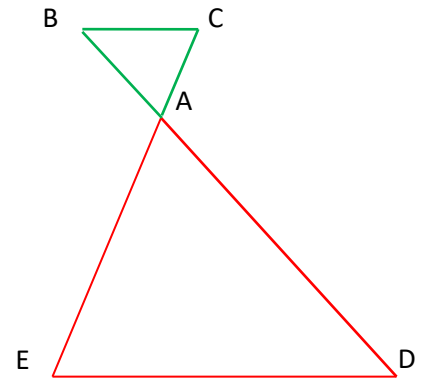
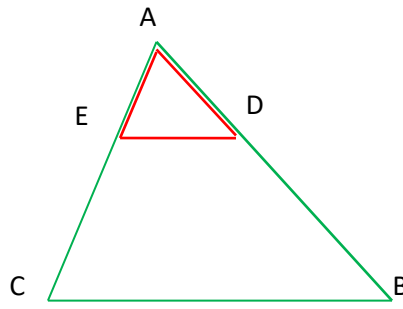
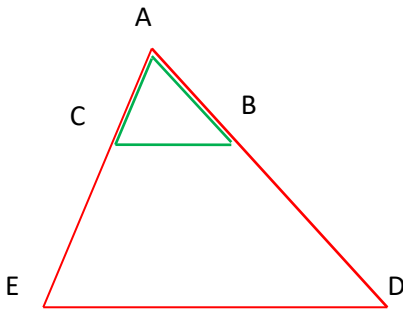
Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$ tels que $(BC) \parallel (DE)$ alors

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



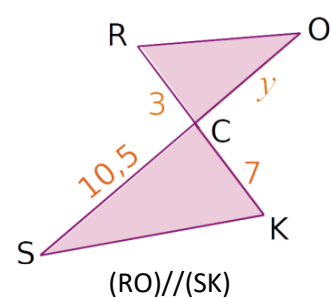
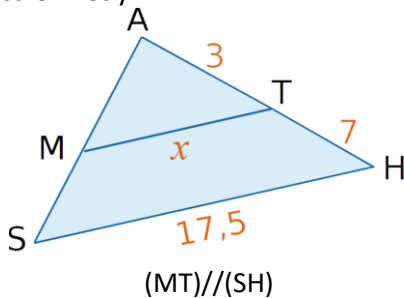
"Démonstration"

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

Exemples

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.



Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme $(MT) \parallel (HS)$, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{AM}{AS} = \frac{x}{17,5}$$

$$x = \frac{3 \times 17,5}{10} = 5,25 \text{ cm}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme $(RO) \parallel (KS)$, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CR}{CK} = \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{y}{10,5} = \frac{RO}{SK}$$

$$y = \frac{3 \times 10,5}{7} = 4,5 \text{ cm}$$

Propriété réciproque de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AD}$$

alors **(BC) // (DE)**

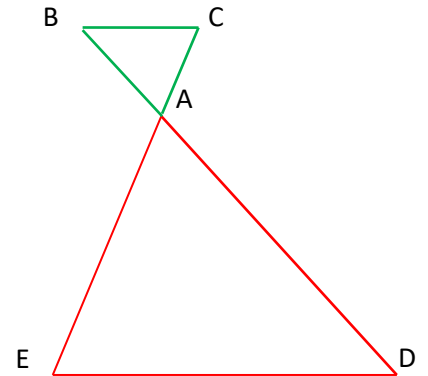
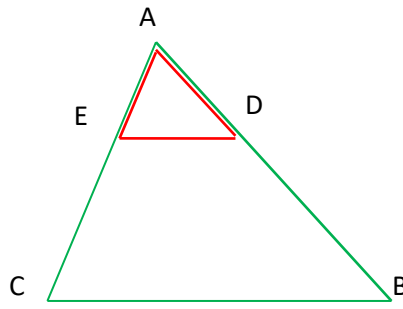
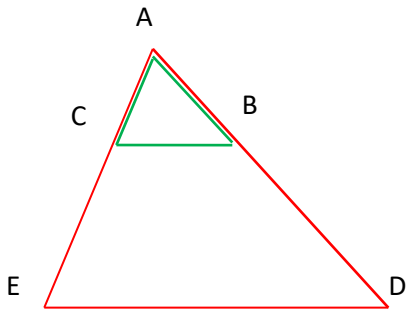
Propriété contraposée de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$$\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$$

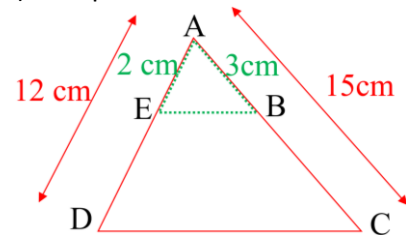
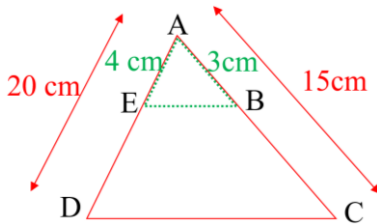
$$\frac{AD}{AE} \neq \frac{AE}{AD}$$

alors **(BC) et (DE) ne sont pas parallèles**



Exemples

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.



Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$. On calcule séparément ces deux rapports

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE) // (CD).

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

donc $\frac{AB}{AC} \neq \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

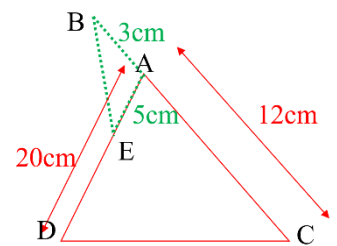
Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.

$$\text{On a : } \frac{AB}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{On a aussi : } \frac{AE}{AD} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.



Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA] sans appartenir à [DA].

DOUBLE DISTRIBUTIVITE – IDENTITES REMARQUABLES

I – Double distributivité

Propriété double distributivité

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration

$$(a + b)(c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = ac + ad + bc + bd$$

| | | |
|---|----|----|
| | c | d |
| a | ac | ad |
| b | bc | bd |

Exemples

$$(x + 3)(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$$

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$(x + 5)(x - 4) = x^2 - 4x + 5x - 20 = x^2 + x - 20$$

$$(x - 8)(x + 3) = x^2 + 3x - 8x - 24 = x^2 - 5x - 24$$

$$(x - 4)(x - 6) = x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$$

$$(2x + 3)(3x + 7) = 6x^2 + 14x + 9x + 21 = 6x^2 + 23x + 21$$

Exemples complexes

$$(x + 5)(x + 4) + (x + 2)(x + 9) = x^2 + 4x + 5x + 20 + x^2 + 9x + 2x + 18 = 2x^2 + 20x + 38$$

$$(x + 5)(x - 4) + (x - 2)(x - 9) = x^2 - 4x + 5x - 20 + x^2 - 9x - 2x + 18 = 2x^2 - 10x - 2$$

$$(x + 3)(x - 2) + 5(x - 6)(x + 7) = x^2 - 2x + 3x - 6 + 5(x^2 + 7x - 6x - 42) = x^2 + x - 6 + 5x^2 + 35x - 42x - 210 = 6x^2 - 6x - 216$$

$$(x - 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 4) = x^2 - 3x - 2x + 6 - (x^2 + 4x - 5x - 20) = x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 4x + 5x + 20 = -4x + 26$$

$$(2x + 7)(3x - 4) - 8(x + 2)(x - 5) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8(x^2 - 5x + 2x - 10) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8x^2 + 40x - 16x + 80 = -2x^2 + 37x + 52$$

II – Identités remarquables

Propriété 1^{ère} identité remarquable

$$\heartsuit (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemples

$$(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\heartsuit (a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(3x + 7)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2 = 9x^2 + 42x + 49$$

⚠ Attention

Dans la réponse, il y a la somme des deux carrés mais il ne faut pas oublier le double

Propriété 2^{ème} identité remarquable

$$\heartsuit (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemples

$$(x - 5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$\heartsuit (a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$$

$$(x - 8)^2 = x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2 = x^2 - 16x + 64$$

$$(5x - 4)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 4 + 4^2 = 25x^2 - 40x + 16$$

| | | |
|---|----------------|----------------|
| | a | b |
| a | a ² | ab |
| b | ab | b ² |

Propriété 3^{ème} identité remarquable

$$\heartsuit \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Démonstration

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Exemples

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$$

$$\heartsuit \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + 8)(x - 8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$$

$$(5x + 4)(5x - 4) = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$$

$$(t - 7)(t + 7) = t^2 - 7^2 = t^2 - 49$$

PROBABILITES

Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.

Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

| Nombre de piles | Nombre de faces | Total |
|-----------------|-----------------|-------|
| 4 374 | 4 626 | 9 000 |

Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est $\frac{4\,374}{9\,000} \approx 0,486$ et la fréquence de « Face » est $\frac{4\,626}{9\,000} \approx 0,514$.

Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

| Méthode 1 | Méthode 2 | Méthode 3 | | | | | | |
|----------------------------|---|-----------|-------|---|-------|-------|-----|--|
| $0,486 = \frac{48,6}{100}$ | <table border="1"> <tr> <td>Pile</td> <td>4 374</td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>9 000</td> <td>100</td> </tr> </table> $? = \frac{4\,374 \times}{9\,000}$ $? = \frac{4\,374 \times 100}{9\,000} \approx 48,6$ | Pile | 4 374 | ? | Total | 9 000 | 100 | $\text{Fréquence de A en \%} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$ $\text{Fréquence de "pile" en \%} = \frac{4\,374}{9\,000} \times 100 \approx 48,6$ |
| Pile | 4 374 | ? | | | | | | |
| Total | 9 000 | 100 | | | | | | |
| | La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%. | | | | | | | |

Définitions

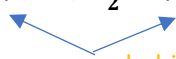
Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{2}$ et que la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{2}$.

On notera $p(\text{Pile}) = \frac{1}{2}$ et $p(\text{Face}) = \frac{1}{2}$.

 p comme probabilité

Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

| | | | | | | | | | | |
|---------------------------|----|----|-----|-----|------|------|-------|--------|--------|---------|
| Nombre de tirages | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10000 | 50000 | 100000 | 1000000 |
| Nombre de "Pile" | 2 | 23 | 46 | 240 | 494 | 2470 | 4908 | 24853 | 49914 | 500 557 |
| Fréquence de "Pile" en % | 20 | 46 | 46 | 48 | 49,4 | 49,4 | 49,08 | 49,706 | 49,914 | 50,0557 |
| Ecart avec la probabilité | 30 | 4 | 4 | 2 | 0,6 | 0,6 | 0,92 | 0,294 | 0,086 | 0,0557 |

Exemple des dés

On tire deux dés et on effectue leur somme.

Les issues possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

On a répété de nombreuses fois l'expérience en 3^{ème}.

Voici les résultats de l'expérience :

| Somme | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Total |
|----------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|-------|
| Effectif | 73 | 156 | 223 | 335 | 410 | 445 | 367 | 288 | 208 | 182 | 101 | 2788 |
| Fréquence en % | 2,62 % | 5,60 % | 8,00 % | 12,02 % | 14,71 % | 15,96 % | 13,16 % | 10,33 % | 7,46 % | 6,53 % | 3,62 % | 100 % |

Les issues n'apparaissent pas avec la même fréquence.

Le premier dé a 6 issues possibles et le second aussi. Au total, il y a 6x6 issues possibles pour la somme ... mais certaines sont identiques :

$$p(2) = p(12) = 1/36 \approx 2,8\%$$

$$p(4) = p(10) = 3/36 \approx 8,3\%$$

$$p(6) = p(8) = 5/36 \approx 13,9\%$$

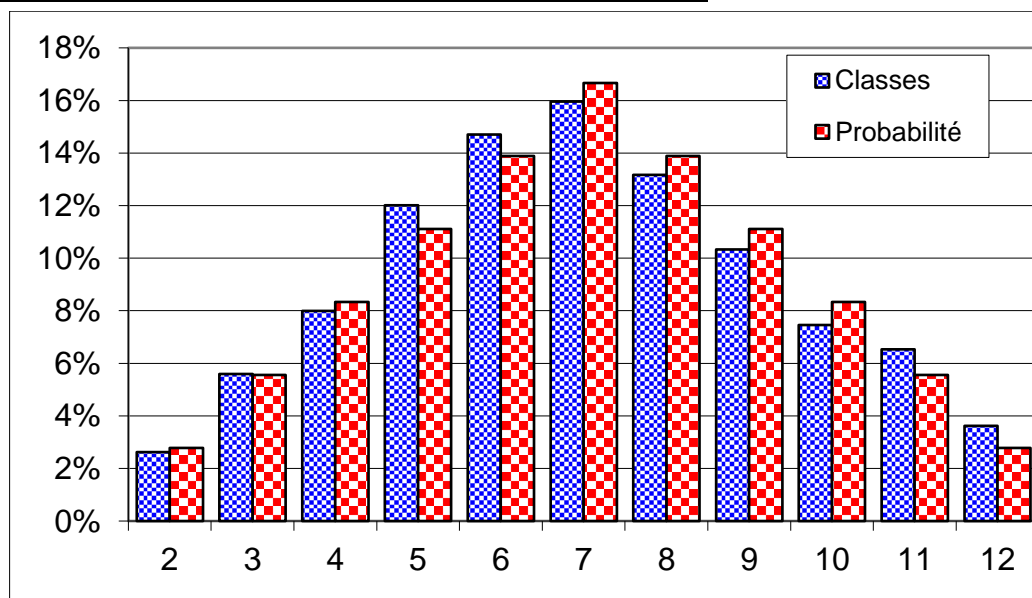
$$p(3) = p(11) = 2/36 \approx 5,6\%$$

$$p(5) = p(9) = 4/36 \approx 11,1\%$$

$$p(7) = 6/36 \approx 16,7\%$$

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| Somme | Issues possibles dé rouge + dé vert | Nombre d'issues possibles | Probabilité |
|-------|--|---------------------------------|--------------|
| 2 | 1+1 | 1 | 1/36 ≈ 2,8% |
| 3 | 1+2=2+1 | 2 | 2/36 ≈ 5,6% |
| 4 | 1+3=2+2=3+1 | 3 | 3/36 ≈ 8,3 % |
| 5 | 1+4=2+3=3+2=4+1 | 4 | 4/36 ≈ 11,1% |
| 6 | 1+5=2+4=3+3=4+2=5+1 | 5 | 5/36 ≈ 13,9% |
| 7 | 1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1 | 6 | 6/36 ≈ 16,7% |
| 8 | 2+6=3+5=4+4=5+3=6+2 | 5 | 5/36 ≈ 13,9% |
| 9 | 3+6=4+5=5+4=6+3 | 4 | 4/36 ≈ 11,1% |
| 10 | 4+6=5+5=6+4 | 3 | 3/36 ≈ 8,3% |
| 11 | 5+6=6+5 | 2 | 2/36 ≈ 5,6% |
| 12 | 6+6 | 1 | 1/36 ≈ 2,8% |
| Total | | 36 | 1 |



Propriété admise

La somme des probabilités de toutes les issues possibles est toujours 1.

Définitions

Un événement est constitué d'une (ou plusieurs) issue(s) d'une expérience aléatoire ; on dit qu'une de ces issues réalise l'évènement.

Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple des dés

- ▶ Soit A l'évènement "on obtient un résultat strictement inférieur à 5".
Les issues qui réalisent cet évènement sont 2, 3 et 4.

$$p(A) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{On ajoute les probabilités car les issues sont incompatibles.}$$

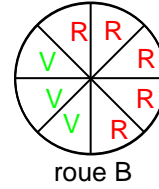
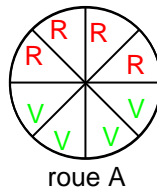
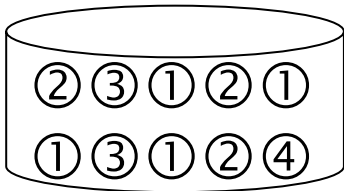
- ▶ Soit B l'évènement "on obtient un nombre pair".
Les issues qui réalisent cet évènement sont 2, 4, 6, 8, 10 et 12.

$$p(B) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

- ▶ Soit C l'évènement "on obtient un nombre impair".
Les issues qui réalisent cet évènement sont 3, 5, 7, 9 et 11

$$p(C) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Exemple d'expérience à deux épreuves



Une urne contient des boules numérotées de 1 à 4.

On tire une boule au hasard et on lit la valeur de la boule.

Si la boule est paire, on tourne la roue A ; si la boule est impaire, on tourne la roue B. Les roues sont colorées en rouge et vert.

Dans l'urne, les issues possibles sont 1, 2, 3 ou 4.

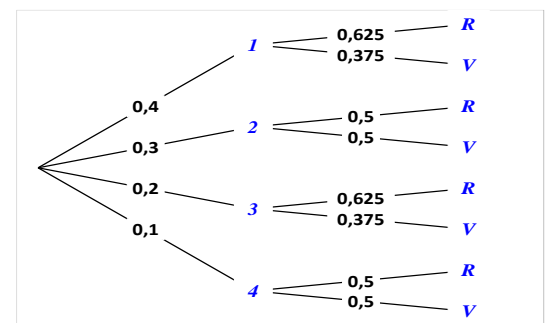
| Valeur de la boule | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|--------------------|---|---|---|---|-------|
| Effectif | 4 | 3 | 2 | 1 | 10 |

On a $p(1) = \frac{4}{10} = 0,4$ et $p(2) = \frac{3}{10} = 0,3$ et $p(3) = \frac{2}{10} = 0,2$ et $p(4) = \frac{1}{10} = 0,1$.

Sur la roue A, on a $p(R) = \frac{4}{8} = 0,5$ et $p(V) = \frac{4}{8} = 0,5$.

Sur la roue B, on a $p(R) = \frac{5}{8} = 0,625$ et $p(V) = \frac{3}{8} = 0,375$.

On peut représenter l'ensemble de ces résultats par un arbre :



Définitions

Deux événements sont dits *contraires* si la somme de leur probabilité vaut 1.

Le contraire de l'évènement A est noté \bar{A} .

L'évènement contraire de « il pleut » est « il ne pleut pas »

Un événement est dit *certain* si sa probabilité vaut 1.

Exemple de l'expérience à deux épreuves

Soit A l'évènement "obtenir 1 et rouge".

$$p(A) = 0,4 \times 0,625 = 0,25$$

Soit B l'évènement "obtenir 2 et rouge".

$$p(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

Soit C l'évènement "obtenir 3 et rouge".

$$p(C) = 0,2 \times 0,625 = 0,125$$

Soit D l'évènement "obtenir 4 et rouge".

$$p(D) = 0,1 \times 0,5 = 0,05$$

Comme A, B, C et D sont incompatibles (voir plus bas), alors $p(R) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D)$, donc $p(R) = 0,25 + 0,15 + 0,125 + 0,05 = 0,575$.

Soit V l'événement "obtenir vert".

V et R sont contraires donc $V = \bar{R}$

donc $p(V) = p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - 0,575 = 0,425$

Exemple du jeu de cartes

▶ On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ? un roi

▶ Soit C l'événement "tirer un cœur".

$$p(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Soit R l'événement "tirer un roi".

$$p(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Définitions

L'événement "A et B", noté $A \cap B$ et qui se lit « A inter B », est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.

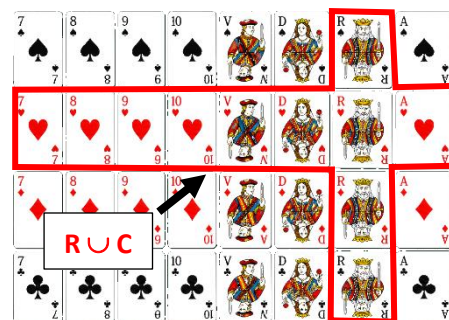
L'événement "A ou B", noté $A \cup B$ et qui se lit « A union B », est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.

Exemple du jeu de cartes

L'événement $R \cap C$ signifie « Tirer un roi et un cœur » ; il est vérifié pour une issue : le roi de cœur.

L'événement $R \cup C$ signifie « Tirer un roi ou un cœur » ; il est vérifié pour plusieurs issues : le roi de cœur mais aussi tous les cœurs et aussi tous les rois.

En comptant les cartes, on trouve $p(R \cap C) = \frac{1}{32}$ et $p(R \cup C) = \frac{11}{32}$



Propriété admise

Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors : $p(A \cup B) = p(B) + p(A) - p(A \cap B)$

Définition

On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$, ou \emptyset signifie « ensemble vide » ce qui veut dire qu'aucune issue vérifie l'appartenance à A et à B en même temps.

Propriété admise

Si deux événements A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(B) + p(A)$

Exemple du jeu de cartes

$$p(C \cup R) = p(C) + p(R) - p(C \cap R) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

Soit T : « tirer un trèfle »

On ne peut pas tirer une carte qui soit un cœur et un trèfle en même temps donc $C \cap T = \emptyset$ donc cœur et trèfle sont incompatibles.

$$p(C \cup T) = p(C) + p(T) = \frac{8}{32} + \frac{8}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

Triangles rectangles : TRIGONOMETRIE

Premier temps : le mathématicien indien Āryabhata (VI^e siècle) utilise le mot *jīva* qui signifie corde.

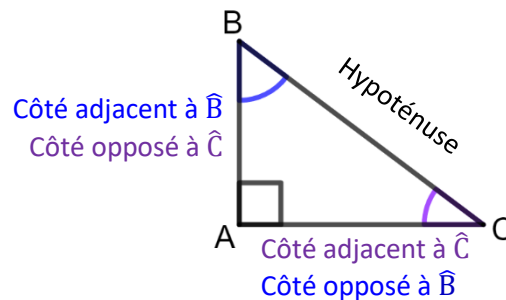
Deuxième temps : le mathématicien arabe Al-Fazzārī (VIII^e siècle) arabise ce mot en *jība*, mot n'ayant pas de signification en arabe.

Troisième temps : Gérard de Crémone (XII^e siècle) confond *jība* avec *jaīb*, d'autant plus facilement qu'en arabe, les voyelles sont parfois omises ; or *jaīb* signifie « poche, cavité » et il le traduit naturellement en latin par *sinus*...

Quant au cosinus, c'est tout simplement le sinus du complémentaire (de l'angle) ; « co- » vient du latin *cum*, qui signifie « avec ».

La tangente, elle, vient de ce qu'elle mesure une portion d'une tangente au cercle trigonométrique.

Définitions



Préliminaire

Dans un triangle rectangle, les rapports suivants ne dépendent que de la mesure de l'angle et non de celles des côtés :

- Côté adjacent à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé sur côté adjacent du même angle aigu.

On les appelle respectivement cosinus, sinus et tangente de l'angle aigu.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC) // (A'C').

Comme (AC) // (A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$BA' \times BC = BC' \times BA$$

$$\div BC' \quad \div BC \quad \div BC' \quad \div BC$$

donc $\frac{BA'}{BC'} = \frac{BA}{BC} = \text{cosinus de l'angle } \hat{B}$

$$BC' \times AC = BC \times A'C'$$

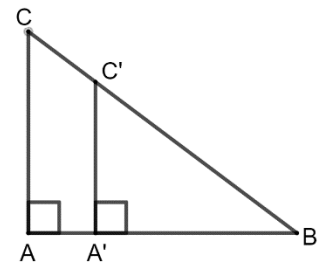
$$\div BC' \quad \div BC \quad \div BC \quad \div BC'$$

donc $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{BC'} = \text{sinus de l'angle } \hat{B}$

$$BA' \times AC = BA \times A'C'$$

$$\div BA' \quad \div BA \quad \div BA \quad \div BA'$$

donc $\frac{AC}{BA} = \frac{A'C'}{BA'} = \text{tangente de l'angle } \hat{B}$



Propriété

Dans un triangle rectangle :

- Le **cosinus** d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.
- Le **sinus** d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
- La **tangente** d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par son côté adjacent.

⚠ **Comment** se rappeler des formules ?

Méthode 1 : ♥ **SOH CAH TOA** Sin = Opposé / Hypoténuse Cos = Adjacent / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

Méthode 2 : ♥ **CAH SOH TOA** Cos = Adjacent / Hypoténuse Sin = Opposé / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

Méthode 3 :

♥ **COS ADJ HYP**

COSinus = ADJacent / HYPoténuse

♥ **SIN OPP HYP**

SINus = OPPosé / HYPoténuse

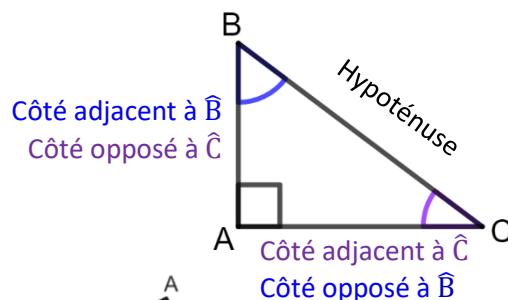
♥ **TANG OPPADJ**

TANGente = OPPosé / ADJacent

Formules

$$\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC} \quad \sin(\hat{B}) = \frac{AC}{BC} \quad \tan(\hat{B}) = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{AC}{BC} \quad \sin(\hat{C}) = \frac{AB}{BC} \quad \tan(\hat{C}) = \frac{AB}{AC}$$



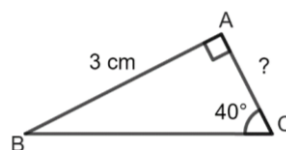
Exemple de recherche d'un côté

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3 \text{ cm}$ et $\widehat{ACB} = 40^\circ$.
Calcule AC ; donne une valeur approchée au centième près.

Réponse

| | |
|--|---|
| Dans ABC rectangle en A | On cite le triangle rectangle |
| On connaît : • \hat{C} • AB : opposé | On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché. |
| On cherche : • AC : adjacent | |
| La formule doit contenir opposé et adjacent ; on va utiliser la tangente | On cherche la formule qui comprend ces informations. |
| $\tan(\hat{C}) = \frac{AB}{AC}$ | On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit. |
| $\tan(40^\circ) = \frac{3}{AC}$ | On remplace les valeurs connues |
| $\frac{\tan(40^\circ)}{1} = \frac{3}{AC}$ | On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales |
| $AC = \frac{3 \times 1}{\tan(40^\circ)} \approx 3,58 \text{ cm}$ | On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité |



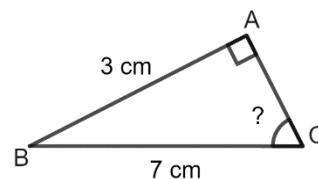
Exemple de recherche d'un angle

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3 \text{ cm}$ et $BC = 7 \text{ cm}$.
Calcule \hat{C} ; donne une valeur approchée au degré près.

Réponse

| | |
|--|---|
| Dans ABC rectangle en A | On cherche : • \hat{C} |
| $\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{BC}$ | On connaît : • BC : hypoténuse • AB : opposé |
| $\sin(\hat{C}) = \frac{3}{7}$ | |
| $\hat{C} = \arcsin\left(\frac{3}{7}\right) \approx 25^\circ$ | La formule doit contenir opposé et hypoténuse ; on va utiliser le sinus |



Utilisation de la calculatrice

| CASIO FX92 et CASIO FX92 classwiz | |
|---|---|
| Pour calculer $\frac{3 \times 1}{\tan(40^\circ)}$, je tape | Pour calculer $\arcsin\left(\frac{3}{7}\right)$, je tape |
| | |

ANGLES, TRIANGLES SEMBLABLES, DROITES DU TRIANGLE et PARALLELOGRAMMES

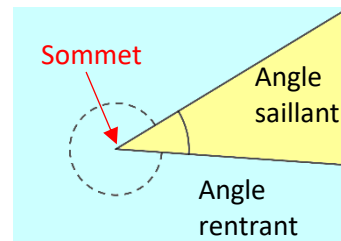
I - Angles

Définition

Un angle est une portion de droite délimité par deux demi-droites de même origine.

Le point d'intersection des demi-droites est appelé le *sommet* de l'angle.

On définit, alors, même deux angles : un *angle rentrant* et un *angle saillant*.

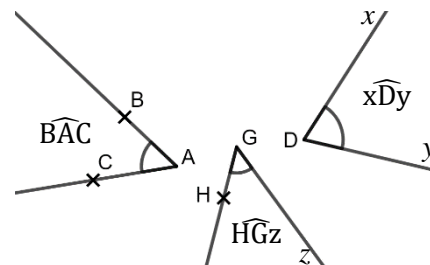


Notation

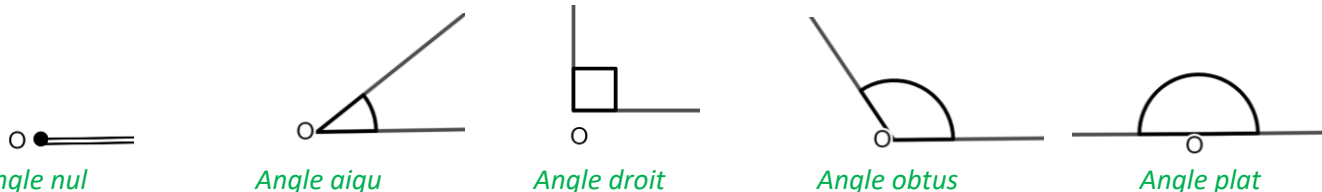
Pour nommer un angle, on prend une lettre sur chacune des demi-droites que l'on écrit de chaque côté de la lettre représentant le sommet de l'angle. On ajoute un chapeau pour signifier que c'est un angle *et non un triangle*.

On peut aussi prendre la lettre en minuscule qui représente la demi-droite.

Dans le cas où il n'y a pas plusieurs angles, on peut juste noter le sommet : \hat{A} , \hat{G} ou \hat{D} .

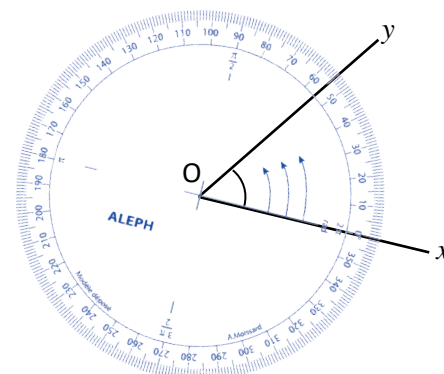


Définitions



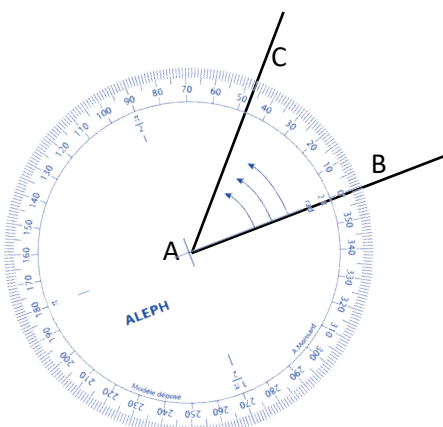
Comment mesurer un angle ?

1. On positionne le centre du rapporteur (*la croix*) sur le sommet de l'angle (*ici le point O*).
2. On tourne le rapporteur de telle sorte que le 0 de la graduation du rapporteur passe sur une des demi-droites formant l'angle, *en veillant à ce que l'angle soit bien du côté des 3 flèches du rapporteur*.
3. On lit sur quelle graduation du rapporteur passe la seconde demi-droite (*ici 55*).
4. On obtient $\hat{xOy} = 55^\circ$

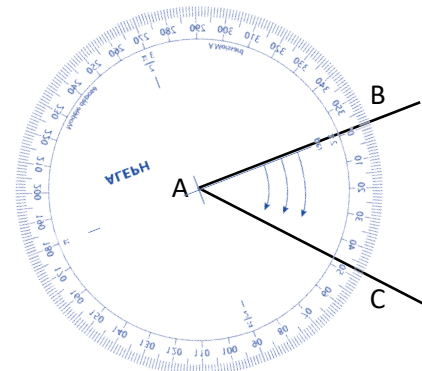


Comment construire un angle de mesure donnée ?

Par exemple, construire l'angle $\hat{BAC} = 48^\circ$



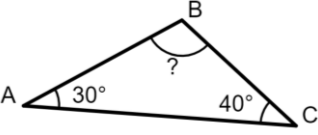
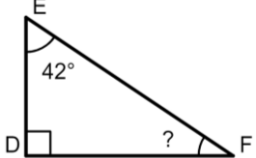
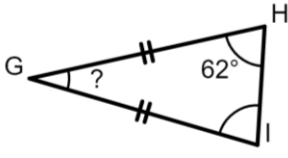
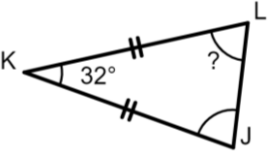
1. Le sommet de l'angle est A ; construire la demi-droite [AB]
2. Placer le centre du rapporteur sur A et le 0 de la graduation sur la demi-droite [AB]. *On peut placer le rapporteur à l'envers selon le « côté » où on veut construire l'angle.*
3. Placer le petit C sur la graduation 48 puis tracer la demi-droite [AC]



Propriété admise

Dans un triangle, la somme des mesures des angles vaut 180° .

Exemples d'exercices résolus

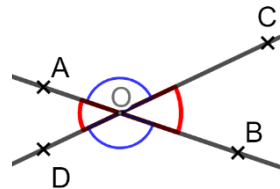
| | | | |
|---|--|---|--|
|  |  |  |  |
| <p>Dans ABC, on a :</p> $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C})$ $\hat{B} = 180 - (30 + 40)$ $\hat{B} = 110^\circ$ | <p>Dans DEF, on a :</p> $\hat{F} = 180 - (\hat{D} + \hat{E})$ $\hat{F} = 180 - (90 + 42)$ $\hat{F} = 48^\circ$ | <p>Comme GHI est isocèle en G, alors $\hat{H} = \hat{I} = 62^\circ$</p> <p>Dans GHI, on a :</p> $\hat{G} = 180 - (\hat{H} + \hat{I})$ $\hat{G} = 180 - (62 + 62)$ $\hat{G} = 56^\circ$ | <p>Comme JKL est isocèle en K, alors $\hat{J} = \hat{L}$</p> <p>Dans JKL, on a :</p> $\hat{J} + \hat{K} + \hat{L} = 180$ $\hat{J} + 32 + \hat{J} = 180$ $2\hat{J} = 148$ $\hat{J} = 74^\circ$ |

Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites sécantes en O.
Les angles \widehat{AOD} et \widehat{BOC} sont dits *opposés par le sommet*.

Propriété admise

Des angles opposés par le sommet sont égaux.



Exemple

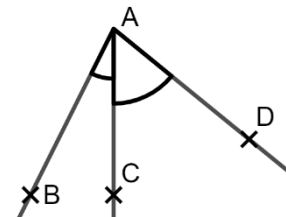
$$\widehat{AOD} = \widehat{BOC} \text{ et } \widehat{AOC} = \widehat{BOD}$$

Définition

Deux angles ayant une demi-droite en commun sont dit *adjacents*.

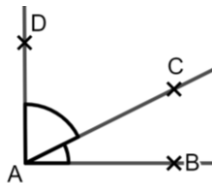
Exemple

$$\widehat{BAC} \text{ et } \widehat{CAD} \text{ sont adjacents et } \widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$$



Définitions

Deux angles adjacents dont la somme des mesures vaut 90° sont dits *complémentaires*



Deux angles adjacents dont la somme des mesures vaut 180° sont dits *supplémentaires*



Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites ; ces deux droites forment une "bande".
Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).
Les angles \widehat{EGB} et \widehat{EHD} sont dits *correspondants*

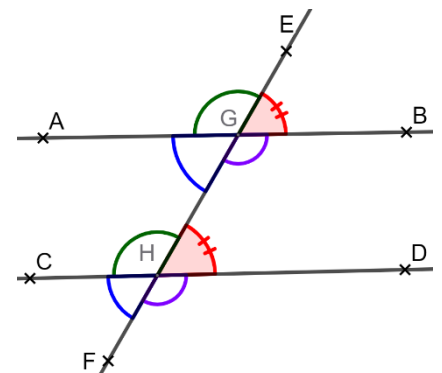
Propriétés admises

$$\text{Si } (AB) \parallel (CD) \text{ alors } \widehat{EGB} = \widehat{EHD}$$

$$\text{Si } \widehat{EGB} = \widehat{EHD} \text{ alors } (AB) \parallel (CD)$$

Exemple ci-contre

$$\text{Si } (AB) \parallel (CD) \text{ on a : } \widehat{EGB} = \widehat{EHD} \text{ et } \widehat{EGA} = \widehat{EHA} \text{ et } \widehat{FHC} = \widehat{FGA} \text{ et } \widehat{FGB} = \widehat{FHD}$$



Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites ; ces deux droites forment une "bande".
Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).
Les angles \widehat{EGB} et \widehat{CHF} sont dits *alternes externes*

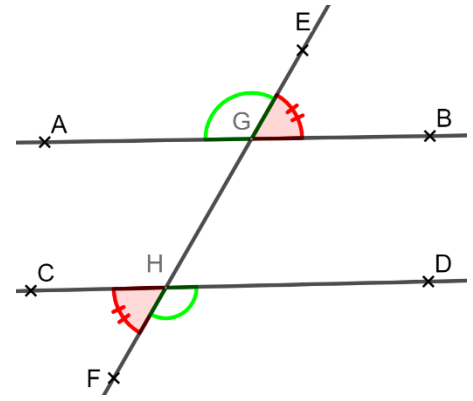
Propriétés admises

Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$

Si $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$ alors $(AB) \parallel (CD)$

Exemple ci-contre

Si $(AB) \parallel (CD)$ on a : $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$ et $\widehat{EGA} = \widehat{FHD}$



Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites ; ces deux droites forment une "bande".
Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).
Les angles \widehat{AGF} et \widehat{EHD} sont dits *alternes internes*

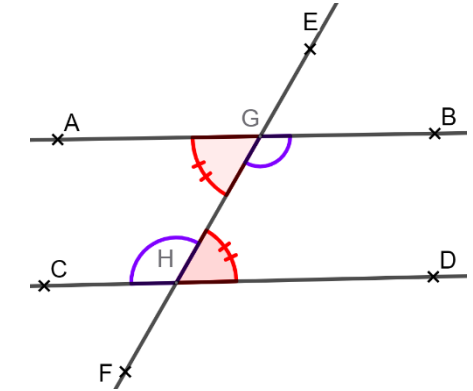
Propriétés admises

Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $\widehat{AGF} = \widehat{EHD}$

Si $\widehat{AGF} = \widehat{EHD}$ alors $(AB) \parallel (CD)$

Exemple ci-contre

Si $(AB) \parallel (CD)$ on a : $\widehat{AGF} = \widehat{EHD}$ et $\widehat{FGB} = \widehat{EHC}$



II – Triangles semblables

Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels
- ou
- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles

Dans le triangle ABC, on a

$$\widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180 - (102 + 49) = 29^\circ.$$

Dans le triangle A'B'C', on a

$$\widehat{B}' = 180 - (\widehat{A}' + \widehat{C}') = 180 - (49 + 29) = 102^\circ.$$

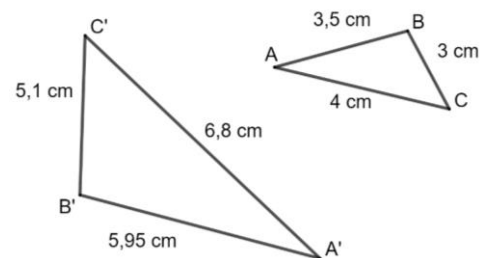
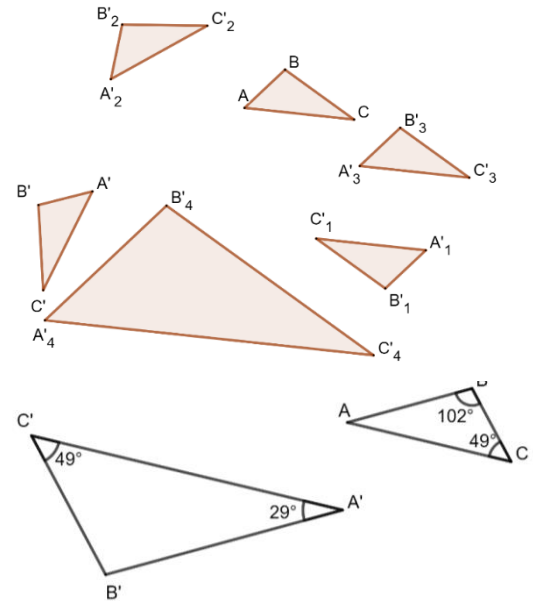
On a donc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Exemple 2 : avec des côtés proportionnels

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{5,95}{3,5} = 1,7 \quad \left| \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{6,8}{4} = 1,7 \quad \left| \quad \frac{C'B'}{CB} = \frac{5,1}{3} = 1,7 \right.$$

$$\text{Donc } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}$$

donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.



III – Droites du triangle

A. Hauteurs

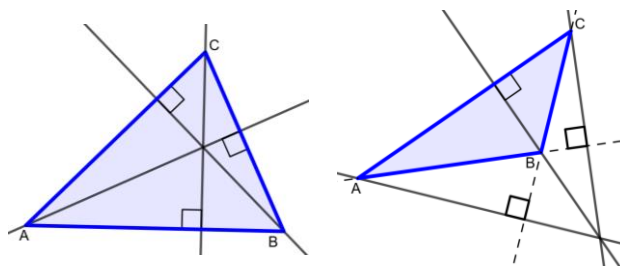
Définition

La *hauteur* d'un triangle est la droite issue d'un sommet qui est perpendiculaire au support du côté opposé.

Dans le triangle ABC , la hauteur issue de A est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à (BC) .

Propriété admise

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé *orthocentre du triangle*.



B. Médianes

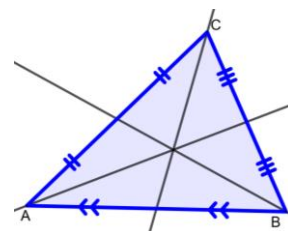
Définition

La *médiane* d'un triangle est la droite issue d'un sommet qui passe par le milieu du côté opposé.

Dans le triangle ABC , la médiane issue de A est la droite qui passe par A et par le milieu de $[BC]$.

Propriété admise

Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre de gravité du triangle*.

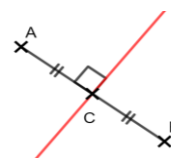


C. Médiatrices

Définition

La *médiatrice* d'un segment est la droite qui passe par le milieu d'un segment ET qui est perpendiculaire au support de ce segment.

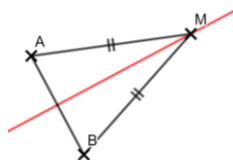
La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite qui passe par le milieu de $[AB]$ et qui est perpendiculaire à (AB) .



Propriétés admises

Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant (même distance) des extrémités de ce segment.

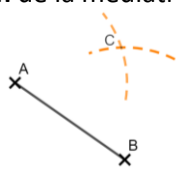
Si M est sur la médiatrice de $[AB]$ alors $MA = MB$.



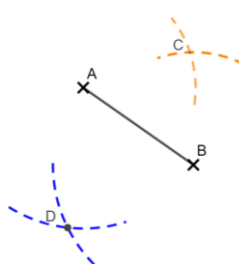
Si un point est équidistant (même distance) des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Si $MA = MB$ alors M est sur la médiatrice de $[AB]$.

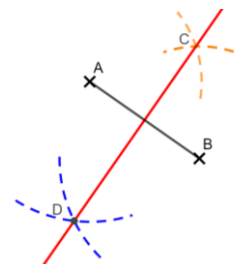
Construction de la médiatrice du segment $[AB]$



Tracer deux arcs de cercle de même rayon et de centres A et B .
Ils se coupent en C .



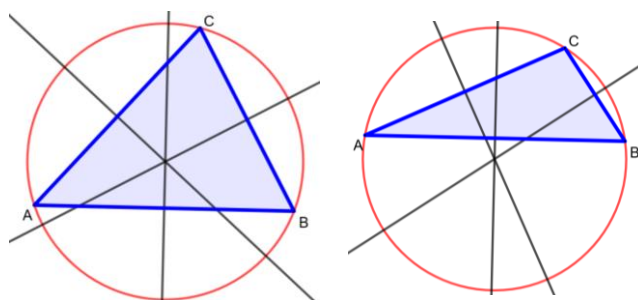
Tracer deux autres arcs de cercle de même rayon et de centres A et B .
Ils se coupent en D .



La médiatrice de $[AB]$ est la droite (CD) .

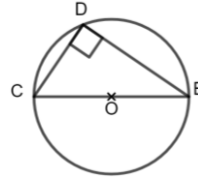
Propriété admise

Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle circonscrit au triangle*.



Propriétés admises

Si un triangle a ses 3 sommets sur un cercle et a un côté qui est un diamètre du cercle alors ce triangle est rectangle.



Si un triangle est rectangle alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

D. Bissectrices

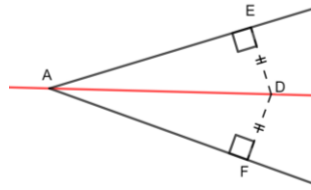
Définition

La bissectrice d'un angle est une droite qui partage l'angle en 2 angles de même mesure.

Propriétés admises

Si un point est sur la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des demi-droites formant cet angle.

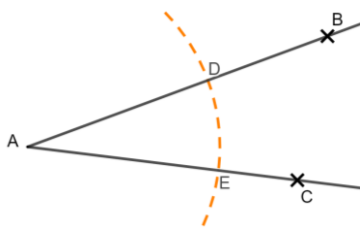
Si D est sur la bissectrice de \widehat{EAD} alors $DE = DF$.



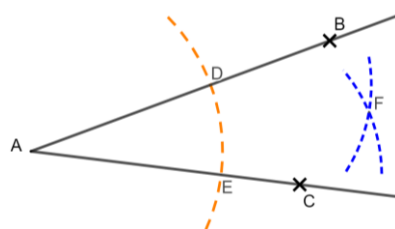
Si un point est équidistant des demi-droites formant un angle il est sur la bissectrice de cet angle.

Si $DE = DF$ alors D est sur la bissectrice de \widehat{EAD} .

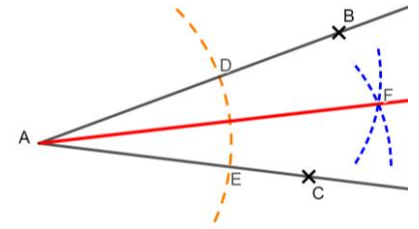
Construction de la bissectrice de l'angle \widehat{BAC}



Trace un cercle de centre A ; il coupe [AB] et [AC] en D et E.



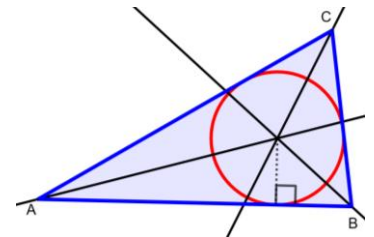
Trace 2 cercles de même rayon et de centres D et E ; ils se coupent en F.



La bissectrice de \widehat{BAC} est la droite (AF)

Propriété admise

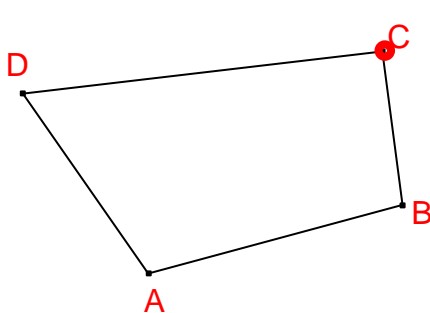
Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle inscrit*.



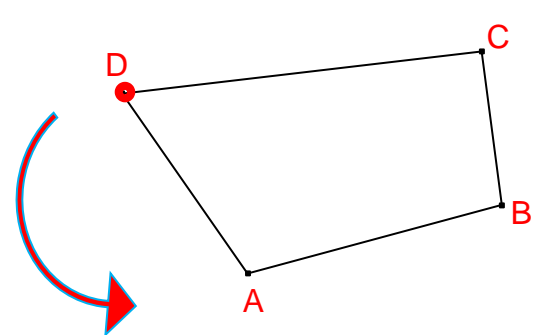
IV – Quadrilatères

Rappel

Pour nommer une figure, on choisit un point de départ et un sens de rotation.



Le quadrilatère est CBAD.

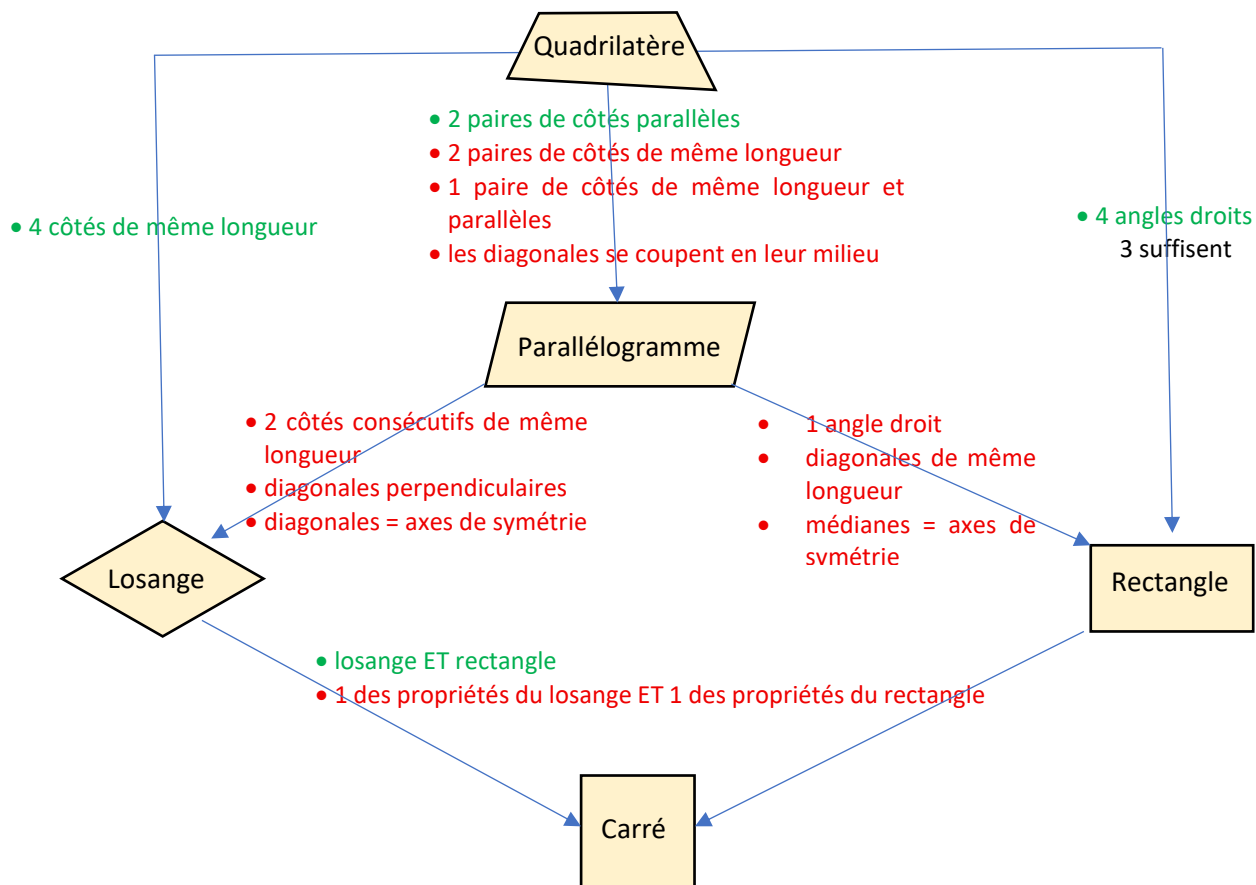


Le quadrilatère est DABC.

Propriété admise

Dans un quadrilatère, la somme des mesures des angles vaut 360° .

Définitions et propriétés



FACTORISER, équations produits, équations $x^2 = a$

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Développer, c'est transformer un produit en une somme.

Exemples

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$$

Développer

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$$

Factoriser

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Développer

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Factoriser

$$(x+5)x(x-5) = x^2 - 25$$

Développer

$$(x+5)x(x-5) = x^2 - 25$$

Factoriser

Remarque

Il est toujours possible de développer, mais il n'est pas toujours possible de factoriser.

Comment factoriser en reconnaissant un facteur commun ?

On coupe l'expression en « blocs » séparés par les additions et les soustractions.

On ne coupe pas en 2 une parenthèse.

On reconnaît (ou on fait apparaître) un facteur commun dans une expression.

On peut souligner le facteur commun.

On isole ce facteur commun en utilisant la propriété de simple distributivité :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b).$$

Dans la parenthèse on place alors tout ce qui n'a pas été souligné.

Exemple

$$5x + 3x$$

$$= 5 \times x + 3 \times x$$

$$= x \times (5 + 3)$$

$$= 8x$$

Exemples

$$5x^2 - 3x + 2xy = 5 \underline{x}x - 3 \underline{x} + 2 \underline{x}y = x(5x - 3 + 2y)$$

$$(5x+3)(2x-7) + (5x+3)(4x+5)$$

$$= (5x+3)[(2x-7) + (4x+5)]$$

$$= (5x+3)[2x-7+4x+5]$$

$$= (5x+3)(6x-2)$$

$$(3x+4)(5x-2) + 7(3x+4)(4x+5)$$

$$= (3x+4)[(5x-2) + 7(4x+5)]$$

$$= (3x+4)[5x-2+28x+35]$$

$$= (3x+4)(33x+33)$$

$$(7x-2)(2x-7) - (5x+4)(7x-2)$$

$$= (7x-2)[(2x-7) - (5x+4)]$$

$$= (7x-2)[2x-7-5x-4]$$

$$= (7x-2)(-3x-11)$$

$$(3x+4)(5x-2) - 7(3x+4)(4x+5)$$

$$= (3x+4)[(5x-2) - 7(4x+5)]$$

$$= (3x+4)[5x-2-28x-35]$$

$$= (3x+4)(-23x-37)$$

Exemple complexe

$$(3x+5)(x-2) + 3(5x-10) \quad \downarrow \quad 5x-10 = 5 \times x - 5 \times 2 = 5(x-2)$$

$$= (3x+5)(x-2) + 3 \times 5(x-2)$$

$$= (x-2)[(3x+5) + 3 \times 5]$$

$$= (x-2)[3x+5+15]$$

$$= (x-2)(3x+20)$$

Remarque

Si on ne trouve pas de facteur commun, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant une différence de 2 carrés ?

1. On transforme, si possible, l'expression en une différence de deux carrés.

2. On factorise en utilisant la propriété $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Exemples

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5)(2x-5)$$

$$(3x+5)^2 - 49 = (3x+5)^2 - 7^2 = [(3x+5)+7][(3x+5)-7] = [3x+5+7][3x+5-7] = (3x+12)(3x-2)$$

$$(3x+5)^2 - (7x-6)^2 = [(3x+5)+(7x-6)][(3x+5)-(7x-6)] = [3x+5+7x-6][3x+5-7x+6] = (10x-1)(-4x+11)$$

Remarque

Si on ne trouve pas de différence de deux carrés, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant le développement de la 1^{ère} ou 2^{ème} identité remarquable ?

1. On identifie l'identité remarquable.
2. On identifie les deux « carrés ».
3. On vérifie que le double produit est le bon.
4. On factorise en utilisant une des propriétés : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemple

On veut factoriser $x^2 + 6x + 9$.

Il y a trois termes et cela ressemble au développement de la première identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2$.

On identifie x^2 et 9 comme les carrés de x et 3.

On calcule $2 \times x \times 3 = 6x$ et on reconnaît le morceau non choisi de l'expression.

On conclut : $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

Exemples

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

x^2 est le carré de x

25 est le carré de 5

Il y a un « + » devant le double produit.

On vérifie que $2 \times x \times 5$ est bien égal au troisième terme $10x$

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

x^2 est le carré de x

49 est le carré de 7

Il y a un « - » devant le double produit.

On vérifie que $2 \times x \times 7$ est bien égal au troisième terme : $14x$

$$16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$$

Remarque

On veut factoriser $x^2 + 7x + 49$

x^2 et 49 sont les carrés de x et 7

On calcule $2 \times x \times 7 = 14x$. On ne trouve pas $7x$

On ne peut pas factoriser $x^2 + 7x + 49$ avec cette méthode.

Propriété équation produit - admise

♥ Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Exemple

On veut résoudre l'équation $(2x + 5)(5x - 3) = 0$

$$(2x + 5)(5x - 3) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

$$2x + 5 = 0$$

$$2x = -5$$

$$x = -2,5$$

Si $x = -2,5$ alors $(2x + 5)(5x - 3)$

$$= (2 \times (-2,5) + 5) \times (5 \times (-2,5) - 3)$$

$$= 0$$

Si $x = 0,6$ alors $(2x + 5)(5x - 3)$

$$= (2 \times 0,6 + 5) \times (5 \times 0,6 - 3)$$

$$= 0$$

Les solutions de l'équation sont -2,5 et 0,6.

On peut aussi écrire : $S = \{-2,5 ; 0,6\}$

On réécrit l'équation

On cite la propriété

On résout séparément les équations.

Bien laisser le trait vertical.

On vérifie en testant si les nombres trouvés sont solution de l'équation

On conclue par une phrase

Remarques

Pour utiliser cette propriété, il faut que l'on ait un produit.

Pour cela, il peut être nécessaire de factoriser l'expression ; c'est même le principal intérêt de la factorisation.

Propriété

L'équation $x^2 = a$ admet :

- aucune solution si $a < 0$.
- une seule solution si $a = 0$; la solution est 0.
- deux solutions si $a > 0$; les solutions sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

Démonstration

Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré ne peut pas être négatif.

Si $a > 0$ on a alors : $a = \sqrt{a}^2$

L'équation $x^2 = a$ devient $x^2 = \sqrt{a}^2$ soit $x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$ soit $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$
Or « un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul »,

$$\begin{array}{l|l} x + \sqrt{a} = 0 & x - \sqrt{a} = 0 \\ x = -\sqrt{a} & x = \sqrt{a} \end{array}$$

Exemples

L'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution car $-4 < 0$.

L'équation $x^2 = 0$ a une seule solution 0.

L'équation $x^2 = 64$ a deux solutions : $\sqrt{64}$ et $-\sqrt{64}$ soit 8 et -8.

L'équation $x^2 = 11$ a deux solutions : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$.

Exemple complexe

Résoudre l'équation $(x + 3)^2 = 7$.

$$(x + 3)^2 = 7$$

$$\begin{array}{l|l} x + 3 = \sqrt{7} & x + 3 = -\sqrt{7} \\ x = -3 + \sqrt{7} & x = -3 - \sqrt{7} \end{array}$$

Les solutions sont $-3 + \sqrt{7}$ et $-3 - \sqrt{7}$

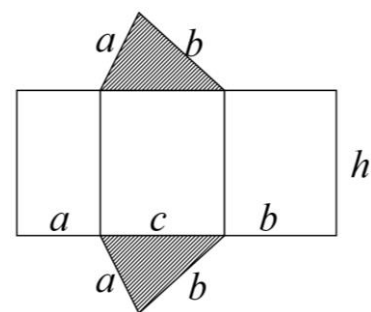
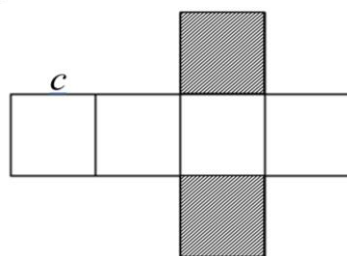
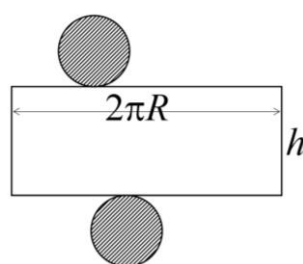
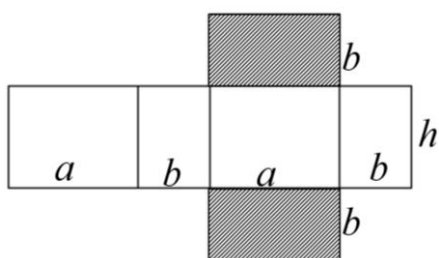
SOLIDES, agrandissement/réduction

I – Rappel sur les aires

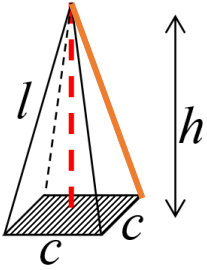
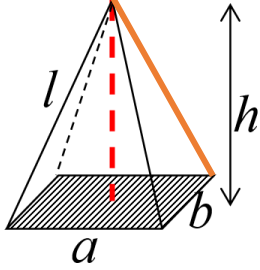
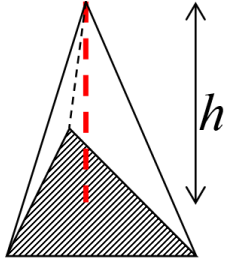
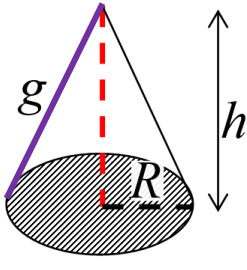
| | | | |
|---|--|--|--|
| <p>Carré</p> <p>$A = c^2$</p> | <p>Rectangle</p> <p>$A = L \times l$</p> | <p>Losange</p> <p>$A = d \times d' \div 2$</p> | <p>Parallélogramme</p> <p>$A = b \times h$</p> |
| <p>Triangle rectangle</p> <p>$A = \frac{b \times h}{2}$</p> | <p>Triangle quelconque</p> <p>$A = \frac{b \times h}{2}$</p> | <p>Trapèze</p> <p>$A = \frac{(b + B) \times h}{2}$</p> | <p>Disque</p> <p>$A = \pi \times r^2$</p> |

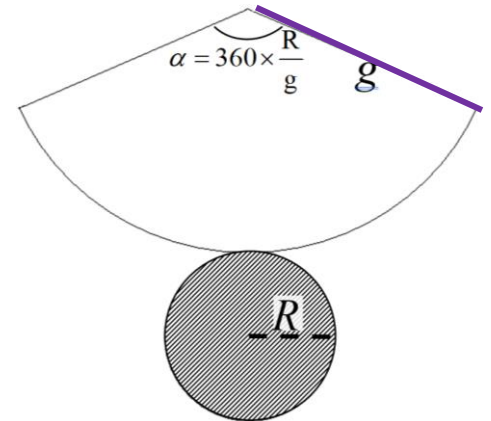
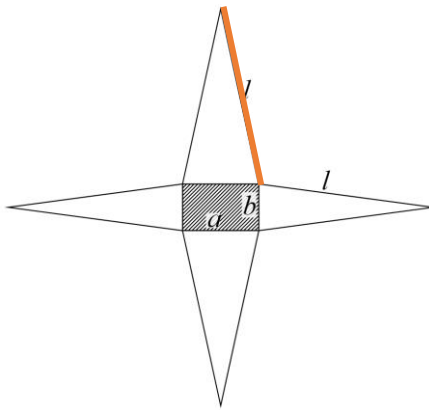
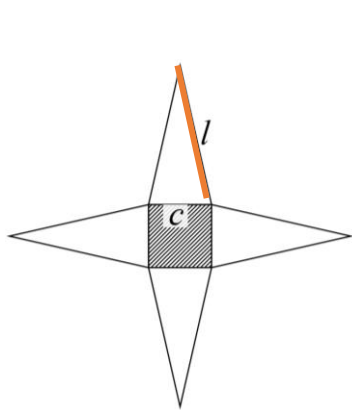
II – La famille des prismes

| | | | |
|--|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| <p>Parallélépipède rectangle Pavé droit</p> | <p>Cube</p> | <p>Cylindre</p> | <p>Prisme droit</p> |
| ♥ Volume = Aire de la base × hauteur | | | |
| $V = a \times b \times h$ | $V = c \times c \times c = c^3$ | $V = \pi \times R^2 \times h$ | $V = \text{aire triangle} \times h$ |



III – La famille des pyramides

| Pyramide régulière | Pyramide | Tétraèdre | Cône |
|---|---|--|---|
|  |  |  |  |
| ♥ Volume = $\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$ | | | |
| $V = \frac{c^2 \times h}{3}$ | $V = \frac{a \times b \times h}{3}$ | $V = \frac{\text{aire triangle} \times h}{3}$ | $V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$ |



IV – La boule et la sphère

Définition

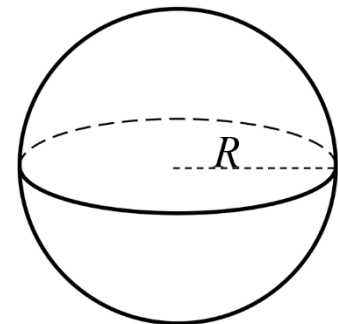
La *boule* est l'intérieur.

La *sphère* est l'extérieur, l'enveloppe

Formules

$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$

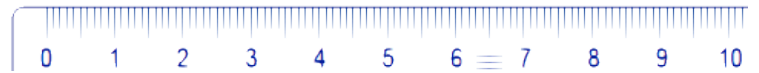
$$\text{Aire} = 4 \times \pi \times R^2$$



V – Conversions

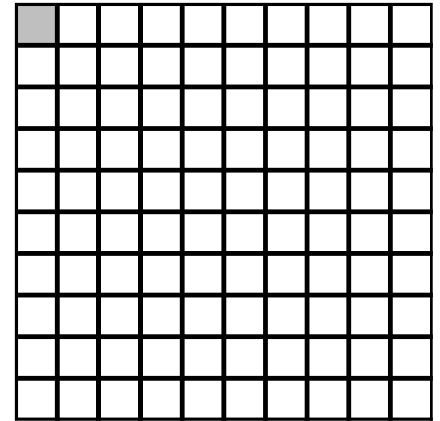
Longueurs

| km | hm | dam | m | dm | cm | mm |
|----|----|-----|---|----|----|----|
| | | | | | 1 | 0 |
| | | | | | | |
| | | | | | | |



Aires

| km ² | | hm ² | | dam ² | | m ² | | dm ² | | cm ² | | mm ² | |
|-----------------|--|-----------------|---|------------------|---|----------------|---|-----------------|--|-----------------|--|-----------------|--|
| | | ha | | a | | ca | | | | | | | |
| | | | | | | 1 | 0 | 0 | | | | | |
| | | | | 3 | 5 | 0, | | | | | | | |
| | | 7 | 0 | | | | | | | | | | |



1 ha se lit « un hectare »

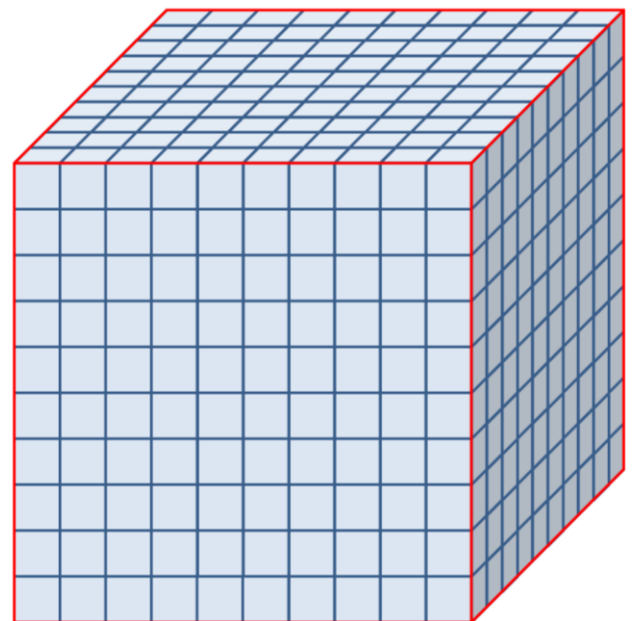
1 a se lit « un are »

1 ca se lit « un centiare »

Volumes

| km ³ | | | hm ³ | | | dam ³ | | | m ³ | | | dm ³ | | | cm ³ | | | mm ³ | | | |
|-----------------|--|--|-----------------|--|--|------------------|--|--|----------------|---|----|-----------------|----|----|-----------------|----|--|-----------------|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | hL | daL | L | dL | cL | mL | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | 1 | 5, | 3 | 4 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | 2, | 4 | 5 | 4 | | | | | |

1 dm³ = 1L



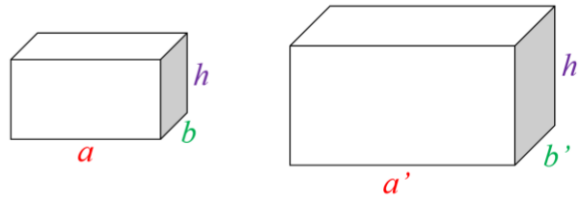
VI – Agrandissements / réductions

Propriété admise

Si une figure est un agrandissement (ou une réduction) d'une autre figure de rapport k :

- les distances sont multipliées par k ,
- les aires sont multipliées par k^2 ,
- les volumes sont multipliés par k^3 .

Démonstration dans le cas des pavés droits.



Si le pavé de droite est un agrandissement du pavé gauche de coefficient k , alors on a :

$$a' = k \times a, b' = k \times b, \text{ et } h' = k \times h.$$

Le volume du pavé de gauche est $V = a \times b \times h$

Le volume du pavé de droite est $V' = a' \times b' \times h'$

$$V' = a' \times b' \times h' = k \times a \times k \times b \times k \times h = k^3 \times a \times b \times h = k^3 \times V$$

Comment calculer le coefficient d'agrandissement-réduction ?

1. On repère une distance connue sur les 2 solides.
2. On calcule le coefficient par la formule :

$$k = \frac{\text{distance sur le solide d'arrivée}}{\text{distance correspondante sur le solide de départ}}$$

Pour trouver le coefficient d'agrandissement-réduction, on repère une longueur connue sur le solide de départ et sur le solide d'arrivée.

Exemple 1

On donne une pyramide régulière de base ABCD et de sommet S.

On donne $AB = 12 \text{ cm}$ et $OS = 21 \text{ cm}$.

1°) Calculer le volume de SABCD.

2°) On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base ABCD.

On obtient une réduction $SA'B'C'D'$.

On donne $A'B' = 9 \text{ cm}$.

Calculer le rapport de réduction.

En déduire le volume de $SA'B'C'D'$.

1°) Soit V le volume de SABCD.

$$V = \frac{AB \times BC \times SO}{3} = \frac{12 \times 12 \times 21}{3} = 1008$$

Le volume de la pyramide SABCD est 1008 cm^3 .

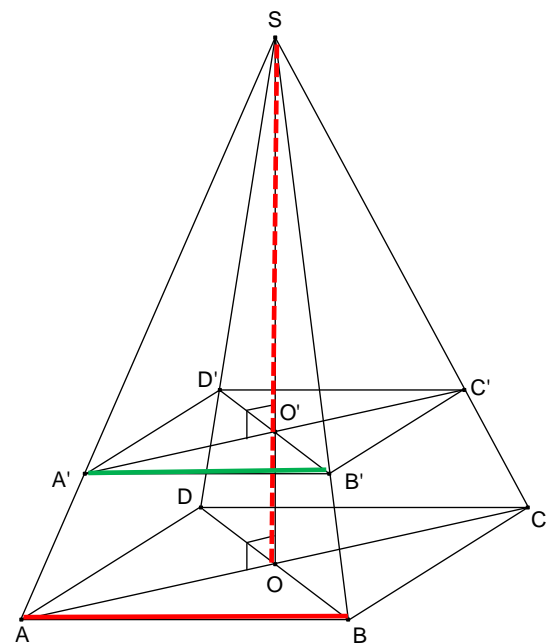
2°) Soit k le coefficient de réduction de SABCD vers $SA'B'C'D'$.

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Soit V' le volume de $SA'B'C'D'$.

$$V' = k^3 \times V = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 1008 = 425,25$$

Le volume de $SA'B'C'D'$ est $425,25 \text{ cm}^3$.



Exemple 2

Sur la figure suivante, on donne les informations suivantes :

- $SO = 6 \text{ cm}$
- $AO = 5 \text{ cm}$
- $SO' = 15 \text{ cm}$.

Calculer le volume du grand cône.

On donnera le volume en litre, arrondi au millilitre près.

Soit V le volume du petit cône.

$$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times OA^2 \times OS}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 6}{3} = 50\pi \text{ cm}^3$$

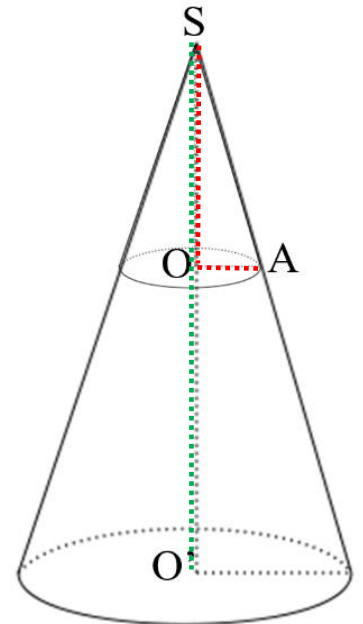
Soit k le coefficient d'agrandissement du petit vers le grand cône.

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{15}{6} = 2,5$$

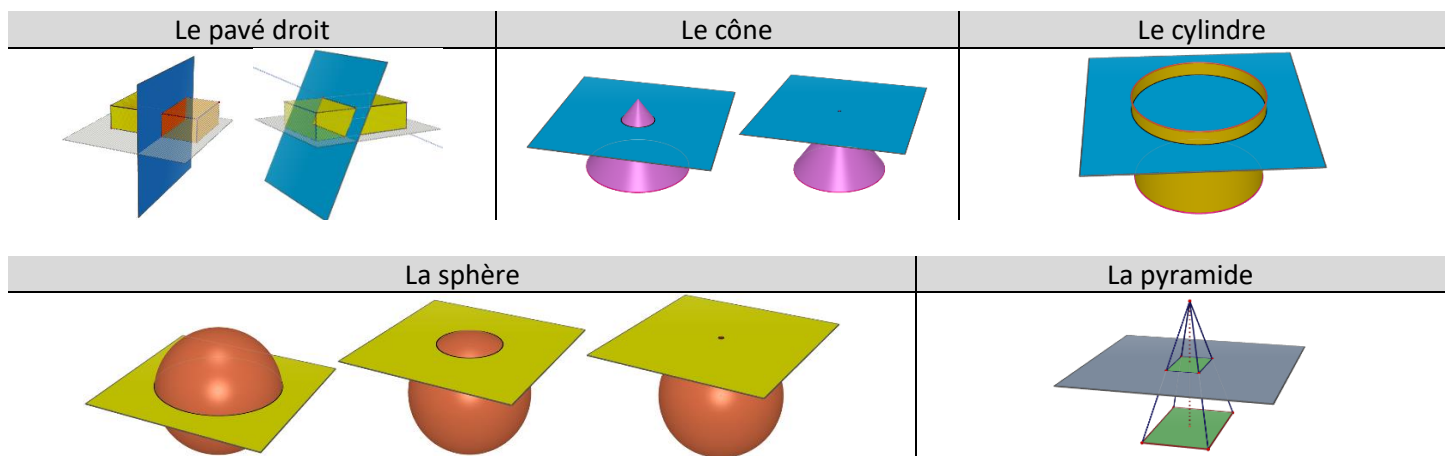
Soit V' le volume du grand cône.

$$V' = k^3 \times V = 2,5^3 \times 50\pi = 781,25\pi$$

Le volume du grand cône est $781,25\pi \approx 2454 \text{ cm}^3 = 2,454 \text{ L}$.



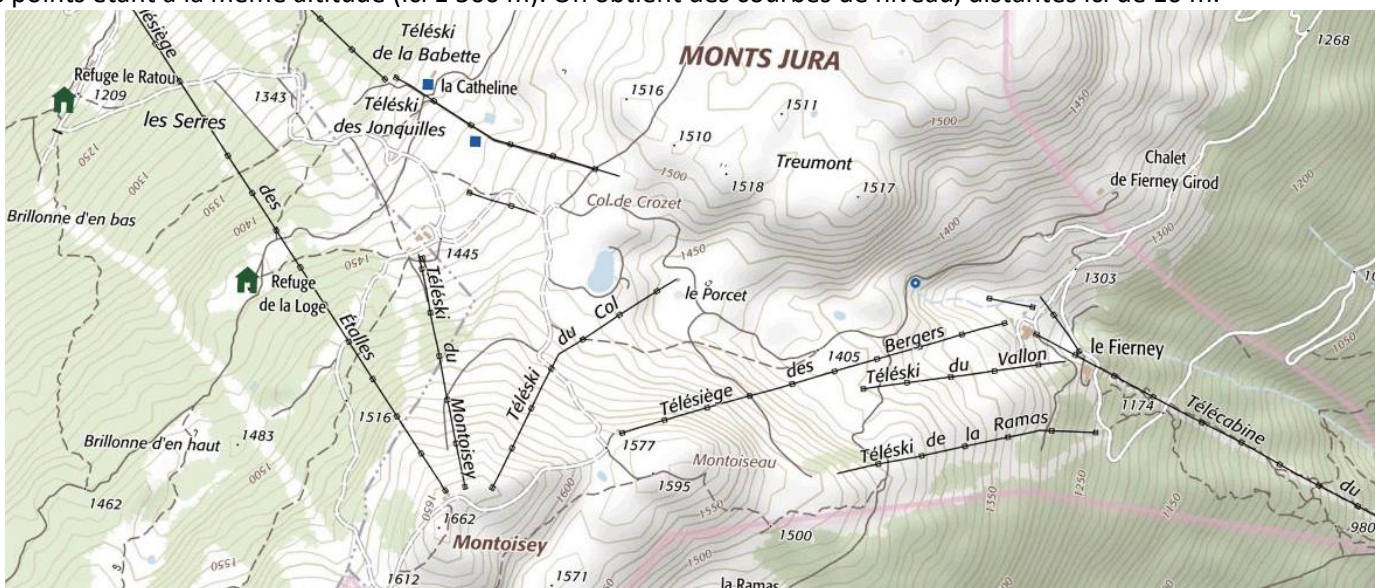
VII – Sections



Courbes de niveau

Pour une carte géographique, on sectionne la terre par des sphères de rayons différents correspondant à des altitudes différentes.

Par exemple, on sectionne par une sphère de rayon 1 500 m de plus que le rayon terrestre. On visualise ainsi tous les points étant à la même altitude (ici 1 500 m). On obtient des courbes de niveau, distantes ici de 10 m.



VIII – Repérage

Avec 1 dimension

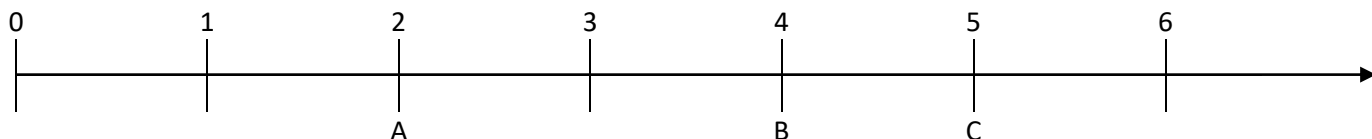
Pour se repérer, on a besoin de 2 points :

- l'origine (souvent le point O)
- l'unité (souvent le point I, ou le nombre 1).

On appelle *droite graduée*, une droite sur laquelle on a placé une origine et une unité.



Pour graduer la droite, il faut reporter l'unité.



Au lieu de parler de droite graduée, on pourra aussi parler d'axe gradué.

Lorsque l'on place un point sur une droite graduée, le nombre correspondant à ce point est appelé l'affixe de ce nombre.

Certaines fois on emploiera le mot abscisse.

L'affixe de A est 2 ; on notera A(2).

L'abscisse de B est 4.

Le nombre 4 est l'affixe du point B.

Le point C a pour affixe 5.

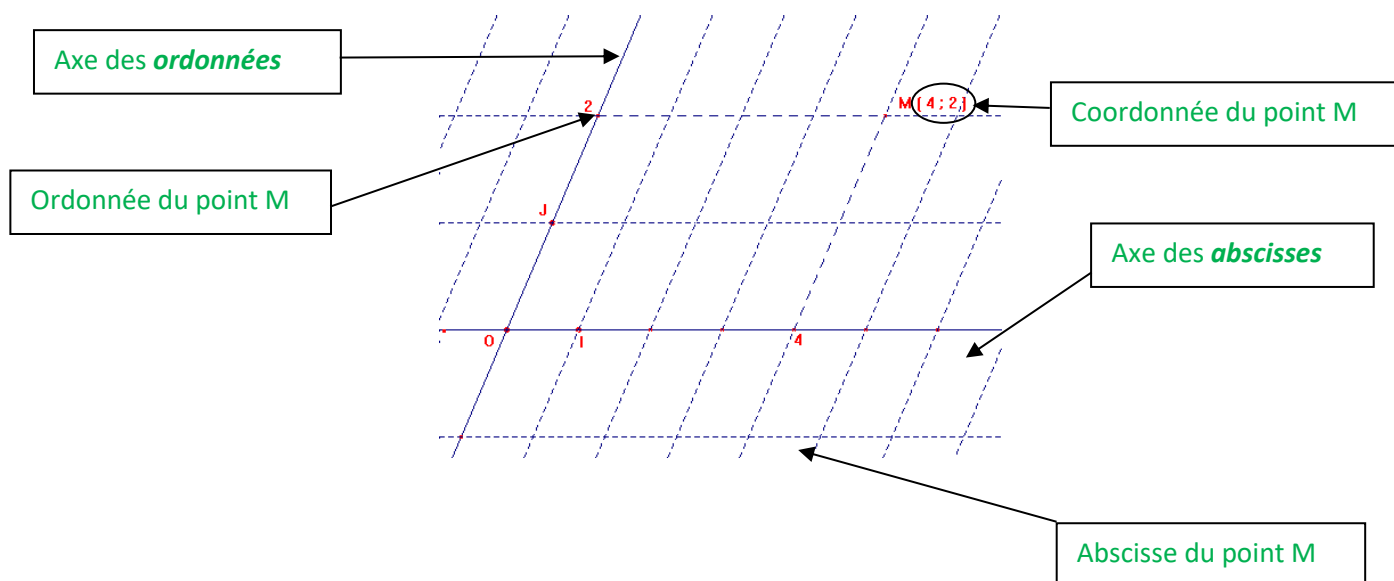
Avec 2 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 3 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.

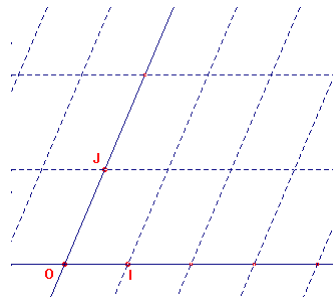
Le repère (O ; I ; J) est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées.



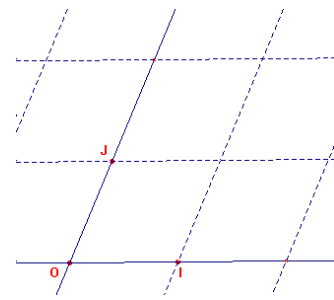
Le repère (O ; I ; J) est dit *quelconque* si

- ses axes ne sont pas perpendiculaires
- les unités ne sont pas les mêmes sur les deux axes.



Le repère (O ; I ; J) est dit *normé* ou *normal* si :

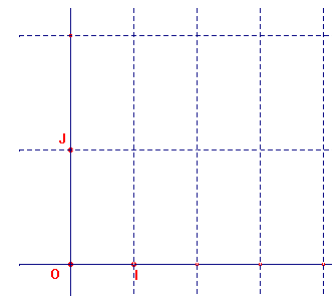
- $OI = OJ$



Même unité sur les deux axes.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthogonal* si :

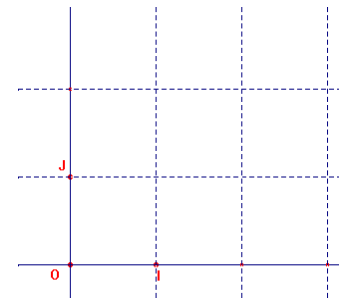
- $(OI) \perp (OJ)$



Axes perpendiculaires.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthonormé* ou *orthonormal* si :

- $OI = OJ$
- $(OI) \perp (OJ)$



Axes perpendiculaires
Même unité sur les deux axes.

Avec 3 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 4 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.
- un point sur l'axe des hauteurs.

Le repère (O ; I ; J ; K) est un repère pour lequel :

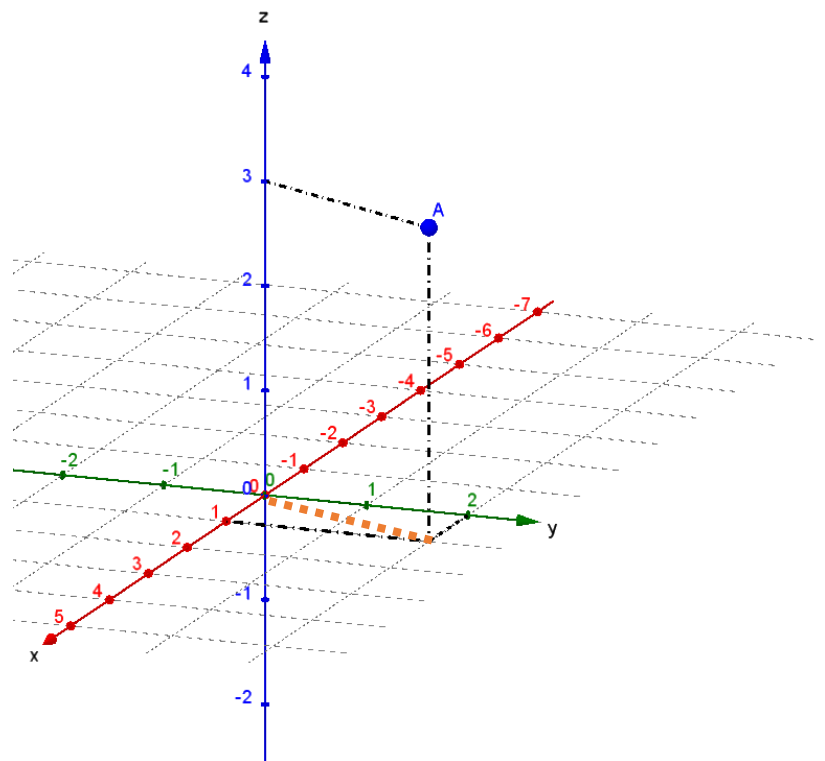
- est l'origine du repère
- **I** donne l'unité sur l'axe des abscisses
- **J** donne l'unité sur l'axe des ordonnées
- **K** donne l'unité sur l'axe des hauteurs.

Pour se repérer dans l'espace, on « projette » le point sur le plan « horizontal ».

On commence par donner les coordonnées de ce point sur le plan en traçant les parallèles aux axes du plan de base ; ici on obtient 1 et 2 ; les coordonnées de ce point sont (1 ; 2).

On relie de point à l'origine du repère puis on trace la parallèle qui passe par A ; cette parallèle coupe l'axe des hauteurs qui indique alors la hauteur du point ; ici c'est 3.

Le point A a pour coordonnées : A(1 ; 2 ; 3).



Avec 3 dimensions, sur une sphère par exemple la Terre

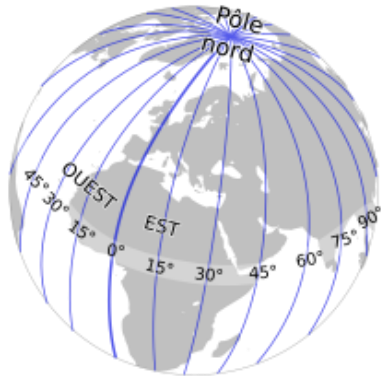
Sur une sphère, il suffit de donner deux nombres pour situer un point car on ne donne pas le troisième (qui correspondrait à l'altitude).

On va donc réaliser un « quadrillage » sur la sphère.

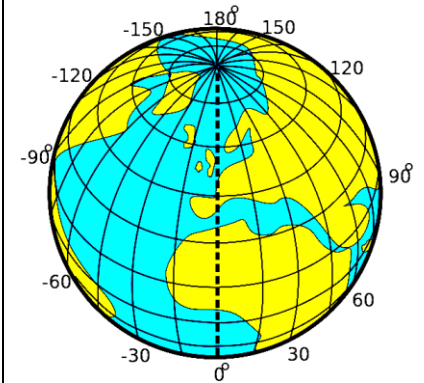
On va commencer par tracer des demi-cercles reliant les deux pôles ; on obtiendra les **méridiens**.

On va d'abord choisir un méridien particulier : celui qui passe par l'observatoire royal de Greenwich à proximité de Londres. Ce méridien coupe l'équateur en point qui sera l'origine de la graduation.

On gradue l'équateur de 0 à 180° vers l'Est et de 0 à 180° vers l'Ouest.



On va ensuite tracer les sections de la sphère par des plans parallèles à l'équateur ; on obtiendra des **parallèles**. On gradue le méridien de Greenwich de 0 à 90° vers le Nord et de 0 à 90° vers le Sud.



Les parallèles sont tous parallèles.

Les méridiens se coupent tous aux pôles Nord et Sud.

Les parallèles et les méridiens sont perpendiculaires.

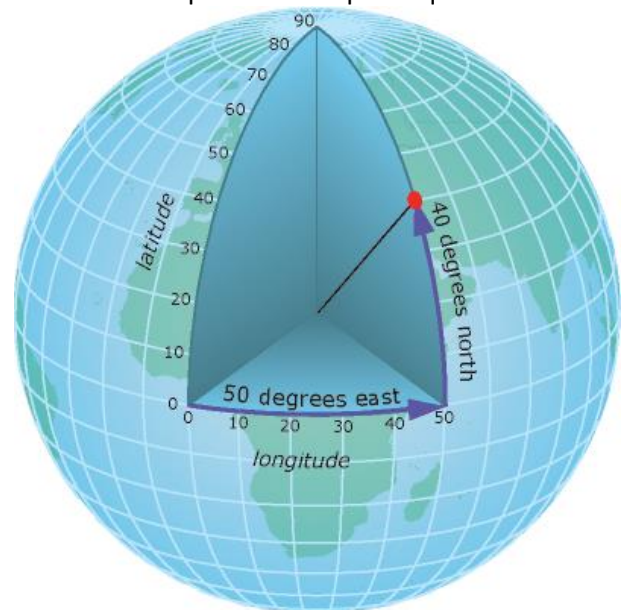
Cela donne donc un quadrillage pour lequel les mailles ressemblent plus à des trapèzes qu'à des carrés.

Pour repérer un point sur la Terre, on donne d'abord le parallèle sur lequel on se trouve.

Par exemple : 40° Nord. On appelle cela la latitude.

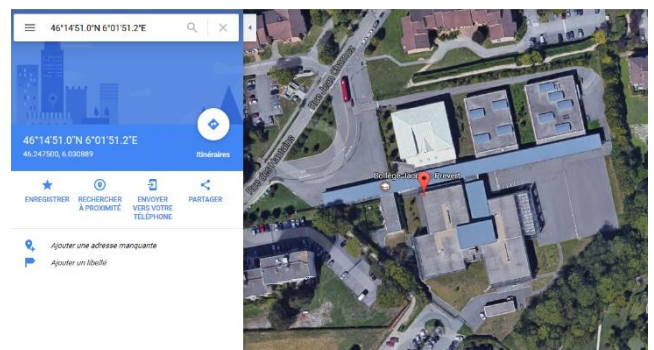
On donne ensuite le méridien. Par exemple : 50° Est. On appelle cela la longitude.

On dira que les coordonnées sont 40°N et 50°E.



Les logiciels de cartographie disponibles directement sur internet (google map, google earth, geoportail ...) permettent d'obtenir facilement les coordonnées d'un lieu sur la Terre.

Par exemple, les coordonnées de la salle de classe sont : 46°14'51.0"N 6°01'51.2"E.



STATISTIQUES

Exemple

Voici la liste des âges en mois d'élèves de troisième :

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 180 | 176 | 179 | 176 | 182 | 178 | 184 | 181 | 179 | 173 | 182 |
| 187 | 175 | 181 | 174 | 183 | 178 | 180 | 178 | 184 | 173 | 175 |
| 173 | 180 | 195 | 179 | 174 | 182 | 172 | 174 | 195 | 183 | 192 |
| 190 | 181 | 173 | 177 | 180 | 183 | 180 | 183 | 186 | 180 | |

Définitions

On appelle **effectif total** le nombre de valeurs de la série.

Ici, l'effectif total est 43.

On appelle **effectif de A** le nombre de fois où A apparaît dans la série.

L'effectif de 178 est 3 car il y a 3 personnes ayant 178 mois.

On appelle **fréquence de A** le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

La fréquence de 178 est $\frac{3}{43}$, ce qui signifie que 3 élèves sur les 43 du groupe ont 178 mois.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Les fréquences sont (souvent) exprimées en pourcentages.

La fréquence de 178 est $\frac{3}{43} \approx 7\%$.

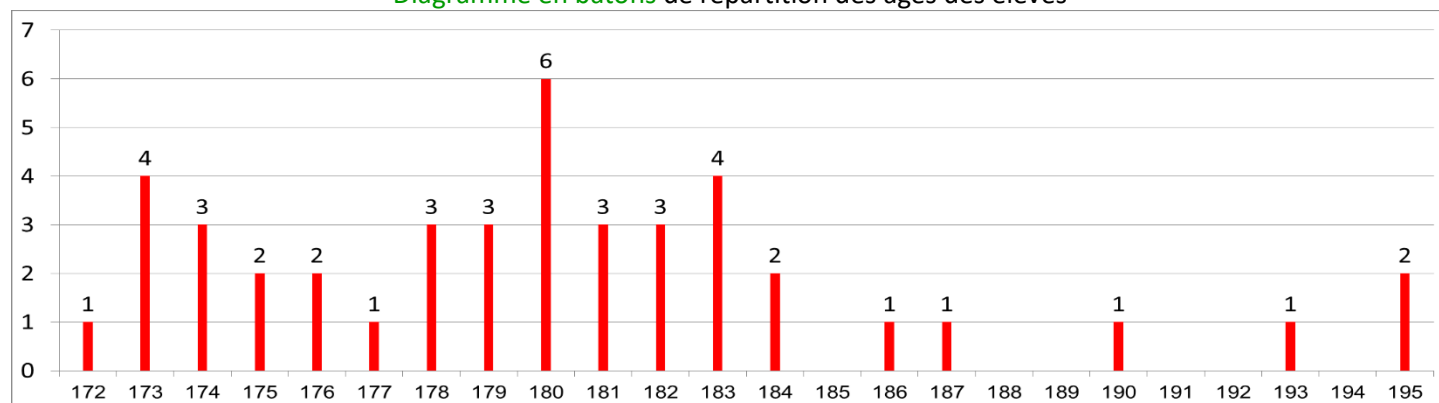
$$\text{Fréquence de A en \%} = \text{Fréquence de A} \times 100 = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$$

Exemple des âges

| Age en mois | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 186 | 187 | 190 | 192 | 195 | Total |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| Effectif | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 6 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 43 |
| Fréquence | 1/43 | 4/43 | 3/43 | 2/43 | 2/43 | 1/43 | 3/43 | 3/43 | 6/43 | 3/43 | 3/43 | 4/43 | 2/43 | 1/43 | 1/43 | 1/43 | 1/43 | 2/43 | 1 |
| Fréquence en % | 2% | 9% | 7% | 5% | 5% | 2% | 7% | 7% | 14% | 7% | 7% | 9% | 5% | 2% | 2% | 2% | 2% | 5% | 100% |

} ÷ 43
} × 100

Diagramme en bâtons de répartition des âges des élèves



Définitions

On appelle **minimum** la plus petite valeur de la série.

Le minimum est 172.

On appelle **maximum** la plus grande valeur de la série.

Le maximum est 195.

On appelle **étendue** l'écart entre le minimum et le maximum.

L'étendue est $195 - 172 = 23$ mois.

On appelle *médiane* une valeur qui partage la série en deux sous-parties de même effectif tel que dans une sous-partie sont regroupées toutes les valeurs inférieures ou égales à la médiane et dans l'autre sont regroupées toutes les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

On appelle *premier quartile* la plus petite valeur de la série telle que 25% au moins des valeurs lui soit inférieure ou égale.

On appelle *troisième quartile* la plus petite valeur de la série telle que 75% au moins des valeurs lui soit inférieure ou égale.

Remarques

Une médiane peut être une valeur de la série (ou non).
Les quartiles sont obligatoirement des valeurs de la série.

Comment déterminer une médiane ?

On ordonne (on trie) la série (par ordre croissant).

On détermine l'effectif total N.

Si N est impair, la médiane est une des valeurs de la série ; c'est la $\frac{N+1}{2}$ ème.

Si N est pair, une médiane est entre deux valeurs de la série ; entre la $\frac{N}{2}$ ème et la $\frac{N}{2} + 1$ ème.

Astuce pour déterminer la position de la médiane

On calcule $\frac{N+1}{2}$

Si on trouve un nombre entier, c'est la position de la médiane dans la série

Si ce n'est pas un nombre entier, la position de la médiane est donnée par les deux entiers consécutifs encadrant $\frac{N+1}{2}$.

Exemple 1

Dans la série 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10, l'effectif total est 9, donc la médiane est la 5^{ème} valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée est 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 donc la médiane est 6.

On prend les 2 entiers consécutifs encadrant $\frac{10+1}{2} = 5,5$

On calcule $\frac{9+1}{2} = 5$

Exemple 2

Dans la série 1 ; 2 ; 6 ; 7 ; 11 ; 15 ; 15 ; 17 ; 17 ; 17, l'effectif total est 10, donc une médiane est entre la 5^{ème} valeur et la 6^{ème} valeur de la série ordonnée.

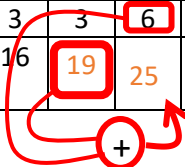
La série est déjà ordonnée donc la médiane est entre 11 et 15. On peut prendre n'importe quelle valeur, mais on choisit le « milieu » de l'intervalle. Ici, une médiane est 13.

Définition

L'*effectif cumulé croissant* (noté souvent ECC) de A est le nombre de valeur de la série inférieures ou égales à A.

Exemple des âges

| Age en mois | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 186 | 187 | 190 | 192 | 195 | Total |
|---------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| Effectif | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 6 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 43 |
| Effectif Cumulé Croissant | 1 | 5 | 8 | 10 | 12 | 13 | 16 | 19 | 25 | 28 | 31 | 35 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 43 | |



Dans l'exemple des âges, l'effectif total est 43. Une médiane est la 22-ème valeur de la série ordonnée.

19 dans la colonne 179 mois signifie qu'il y a 19 élèves qui ont jusqu'à 179 mois.

25 dans la colonne 180 mois signifie qu'il y a 25 élèves qui ont jusqu'à 180 mois donc de la 20^{ème} et la 25^{ème} valeur, il y a 180.

La médiane est 180 mois.

Comment déterminer les quartiles ?

On ordonne la série par ordre croissant.

On détermine l'effectif total : N.

On calcule $\frac{N}{4}$. Si ce n'est pas un entier, on arrondi à l'entier supérieur. Ce nombre est le rang du premier quartile.

On calcule $\frac{3}{4} \times N = \frac{3N}{4}$. Si ce n'est pas un entier, on arrondi à l'entier supérieur. Ce nombre est le rang du troisième quartile.

Exemple 1

On cherche les premier et troisième quartiles de la série :

5 13 27 38 4 16 32 49

La série ordonnée est : 4 ; 5 ; 13 ; 16 ; 27 ; 32 ; 38 et 49.

L'effectif total est 8.

On calcule $\frac{8}{4} = 2$ et $\frac{3}{4} \times 8 = 6$.

Le premier quartile est la 2^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 5.

Le troisième quartile est la 6^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 32.

Exemple 2

On cherche les premier et troisième quartiles de la série :

7 9 15 18 19 25 29 32 37

La série est déjà ordonnée.

L'effectif total est 9.

On calcule $\frac{9}{4} = 2,25$; on arrondit à 3.

On calcule $\frac{3}{4} \times 9 = 6,75$; on arrondit à 7.

Le premier quartile est la 3^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 15.

Le troisième quartile est la 7^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 29.

Exemple des âges

La série ordonnée commence par : 172, 173, 173, 173, 173, 174, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 177, 178, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, 180, 180, 180, 180, 180, 180, 181, 181, 181, 181, 182, 182, 182, 182, 183, 183, 183, 183, 184, 184, 186, ...

L'effectif total est 43.

On calcule $\frac{43}{4} = 10,75$; on arrondit à 11.

On calcule $\frac{3}{4} \times 43 = 32,25$; on arrondi à 33.

Le premier quartile est la 11^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 176.

Le troisième quartile est la 33^{ème} valeur de la série ordonnée ; ici c'est 183.

Utilisation d'un tableur

Pour calculer la médiane d'une série de valeur comprise entre la cellule A3 et la cellule F5, je tape la formule

`=mediane(A3:F5)`

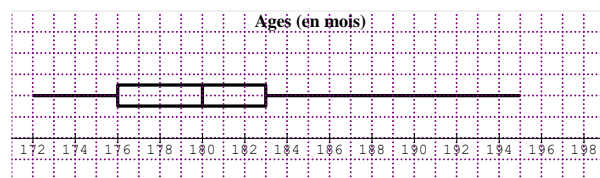
Pour calculer le premier quartile d'une série de valeur comprise entre la cellule A3 et la cellule F5, je tape la formule `=quartile(A3:F5;1)`

Pour calculer le troisième quartile d'une série de valeur comprise entre la cellule A3 et la cellule F5, je tape la formule `=quartile(A3:F5;3)`

Pour les quartiles, le tableur donne une valeur qui n'est pas obligatoirement une valeur de la série ...

Certaines fois, on présente ses valeurs sur une « boîte à moustaches » (ou box plot).

En voici une (simplifiée) pour la série des âges :



Comment calculer la moyenne

Méthode 1

1. On additionne toutes les valeurs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Soit M la moyenne de cette série.

$$M = (180 + 176 + 179 + 176 + 182 + 178 + 184 + 181 + 179 + 173 + 182 + 187 + 175 + 181 + 174 + 183 + 178 + 180 + 178 + 184 + 173 + 175 + 173 + 180 + 195 + 179 + 174 + 182 + 172 + 174 + 195 + 183 + 192 + 190 + 181 + 173 + 177 + 180 + 183 + 180 + 183 + 186 + 180) \div 43$$

$$= 7750 \div 43 \approx 180,2 \text{ mois.}$$

L'âge moyen est de $7750 \div 43 \approx 180,2$ mois.

Comment calculer la « moyenne pondérée »

Méthode 2

1. On calcule la somme de toutes les valeurs en utilisant le tableau d'effectifs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Age en mois | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 186 | 187 | 190 | 193 | 195 |
| Effectif | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 6 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |

Soit M la moyenne de cette série.

$$M = (172 + 4 \times 173 + 3 \times 174 + 2 \times 175 + 2 \times 176 + 177 + 3 \times 178 + 3 \times 179 + 6 \times 180 + 3 \times 181 + 3 \times 182 + 4 \times 183 + 2 \times 184 + 186 + 187 + 190 + 193 + 2 \times 195) \div 43$$

$$= 7750 \div 43 \approx 180,2 \text{ mois.}$$

L'âge moyen est de $7750 \div 43 \approx 180,2$ mois.

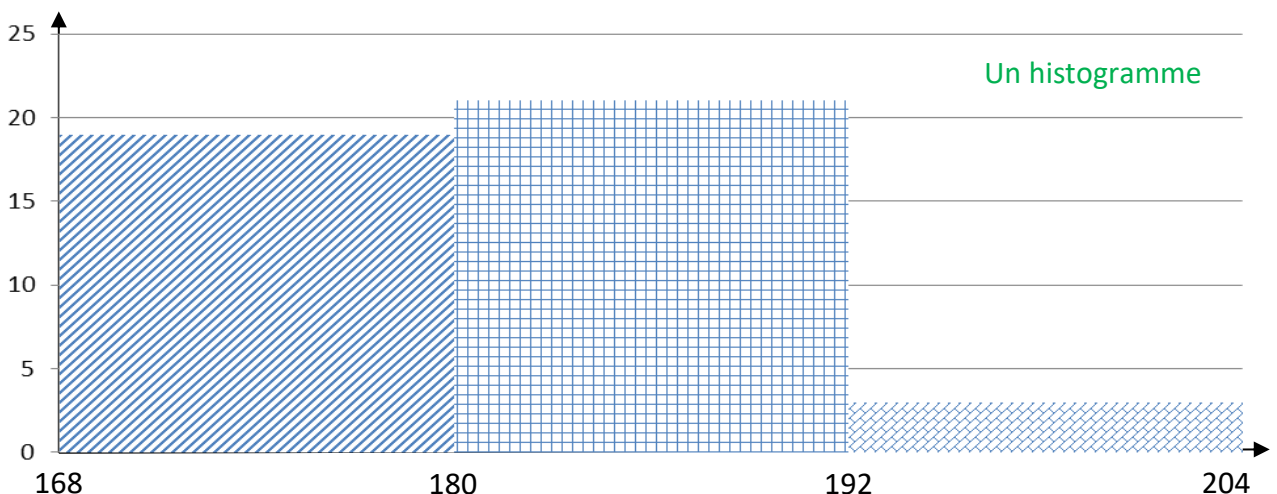
Partage en classes de valeurs

On regroupe les valeurs de la série en classes de valeurs.

Par exemple, on peut regrouper les personnes qui ont le même nombre d'années.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Age en mois | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 186 | 187 | 190 | 193 | 195 |
| Effectif | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 6 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |

| Age en mois | Effectif | Fréquence | Fréquence en % |
|-------------|----------|-----------|----------------|
| [168 ; 180[| 19 | 19/43 | 44 % |
| [180 ; 192[| 21 | 21/43 | 49 % |
| [192 ; 204[| 3 | 3/43 | 7 % |
| Total | 43 | 1 | 100 % |



Définition

On appelle *centre de la classe*, le milieu de l'intervalle définissant la classe.

Exemple des âges.

Le milieu de l'intervalle [168 ; 180[est 174. Pour le calculer on effectue $\frac{168+180}{2}$.

| Age en mois | Effectif | Fréquence | Fréquence en % | Centre de la classe |
|-------------|----------|-----------|----------------|---------------------|
| [168 ; 180[| 19 | 19/43 | 44 % | 174 |
| [180 ; 192[| 21 | 21/43 | 49 % | 186 |
| [192 ; 204[| 3 | 3/43 | 7 % | 198 |
| Total | 43 | 1 | 100 % | |

Calcul d'une valeur approchée de la moyenne.

On suppose que les valeurs sont regroupées aux centres des classes.

Soit M une valeur approchée de la moyenne de cette série.

$$M = (19 \times 174 + 21 \times 186 + 3 \times 198) \div 43 = 7806 \div 43 \approx 181,5 \text{ mois.}$$

Une valeur approchée de l'âge moyen est $7806 \div 43 \approx 181,5$ mois.

Remarques

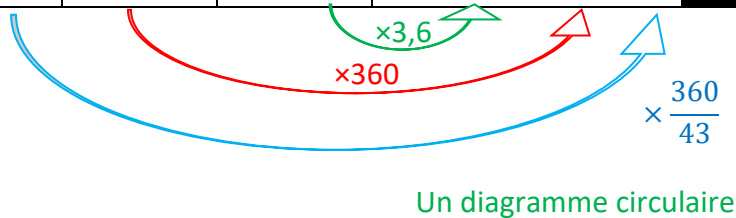
Le résultat est très bon.

La précision de la mesure est le mois et on trouve 1,3 mois d'écart avec la valeur exacte.

Cette méthode (malgré sa forte approximation) donne souvent de très bons résultats.

Exemple des âges

| Age en mois | Effectif | Fréquence | Fréquence en % | Angle sur le diagramme circulaire en degré | Centre de la classe |
|-------------|----------|-----------|----------------|--|---------------------|
| [168 ; 180[| 19 | 19/43 | 44 % | 159° | 174 |
| [180 ; 192[| 21 | 21/43 | 49 % | 176° | 186 |
| [192 ; 204[| 3 | 3/43 | 7 % | 25° | 198 |
| Total | 43 | 1 | 100 % | 360° | |



FONCTIONS AFFINES et LINEAIRES, pourcentages

I - Fonctions affines et linéaires

Définition

Soit p et q deux nombres.

Une fonction est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x$

Une fonction est dite affine si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x + q$

Exemples

| Fonction | Linéaire ? | Affine ? |
|------------------|------------|-------------------------|
| $f(x) = 3x$ | Oui | Oui car $3x = 3x + 0$ |
| $g(x) = -6x$ | Oui | Oui car $-6x = -6x + 0$ |
| $h(x) = 5x + 3$ | Non | Oui |
| $i(x) = 7$ | Non | Oui car $7 = 0x + 7$ |
| $j(x) = \cos(x)$ | Non | Non |
| $k(x) = x^2$ | Non | Non |

Propriété admise

Une situation de proportionnalité de coefficient p

- a une représentation graphique qui est une droite qui passe par l'origine du repère,
- correspond à la fonction linéaire $f(x) = p \cdot x$.

Soit $f(x) = p \cdot x + q$ une fonction affine.

Sa représentation graphique est une droite.

Exemple

Gabriel souhaite acheter des fraises pour faire de la confiture. Sur le marché, il a trouvé des fraises de France à 2,5€ le kilogramme.

Le prix des fraises est proportionnel à la masse de fraises.

Le coefficient de proportionnalité est 2,5.

On appelle x la masse de fraises en kilogrammes.

Cela correspond à la fonction linéaire $f(x) = 2,5 \cdot x$.

Marine est plus courageuse. Elle a trouvé un producteur qui lui offre de ramasser ses fraises pour 1,5€ le kilogramme après paiement d'une redevance forfaitaire de 20€.

Le prix des fraises chez ce producteur est donné par la fonction affine $g(x) = 1,5 \cdot x + 20$.

Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine ?

Comme leurs représentations graphiques sont des droites, il suffit de placer 2 points.

Afin de vérifier, il est intéressant d'en placer 3.

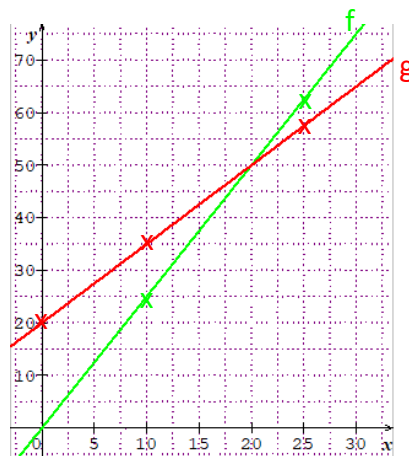
On construit donc un tableau de valeur avec 3 points.

Exemple des fraises

$$f(x) = 2,5 \cdot x$$

$$g(x) = 1,5 \cdot x + 20$$

| | | | |
|--------|----|----|------|
| x | 0 | 10 | 25 |
| $f(x)$ | 0 | 25 | 62,5 |
| $g(x)$ | 20 | 35 | 57,5 |



Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction affine ?

On cherche les antécédents de a par la fonction affine $f(x) = p \cdot x + q$

Il suffit de résoudre l'équation $p \cdot x + q = a$

Exemple des fraises

On cherche combien Marine peut acheter de fraises avec 38€.

On cherche les antécédents de 38 donc les nombres x tels que $g(x) = 38$ donc $1,5x + 20 = 38$

$$1,5x + 20 = 38$$

$$1,5x = 18$$

$$x = 12$$

L'antécédent de 38 est 12.

On interprète ce résultat en disant que Marie peut donc acheter 12kg de fraises.

Propriété

Soit $f(x) = px + q$ une fonction affine.

La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; q)$.

Le nombre q est appelé *ordonnée à l'origine*.

Si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p .

Le nombre p est appelé *coefficient directeur*

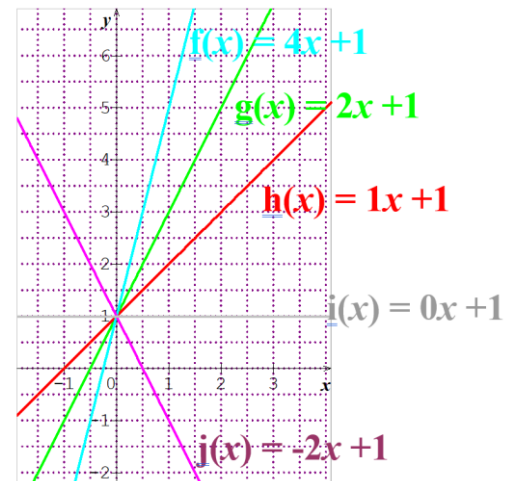
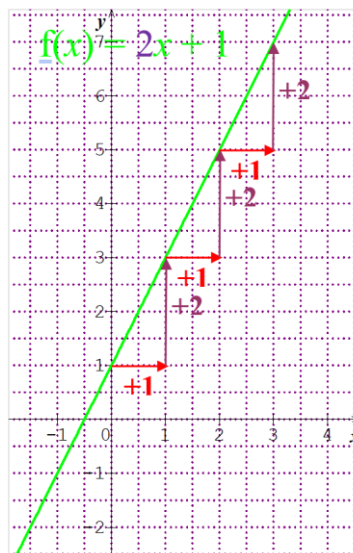
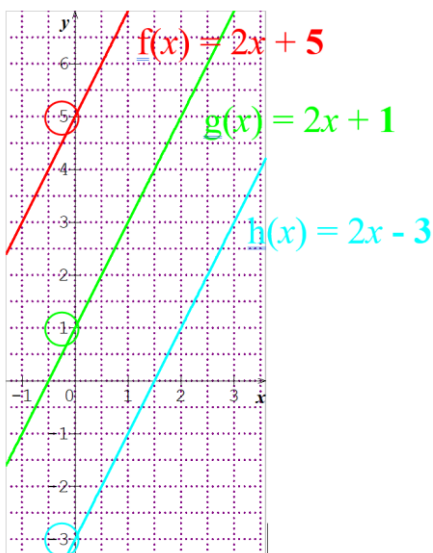
Démonstration

Si $x = 0$ alors $f(x) = f(0) = p \times 0 + q = q$, donc si $x = 0$ alors la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; q)$.

$$f(x + 1) = p(x + 1) + q = px + p + q = px + q + p = f(x) + p$$

Donc si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p .

Exemples



Remarque

Deux fonctions qui ont le même coefficient directeur ont des représentations graphiques qui sont parallèles.

Propriété

Soit $f(x) = px + q$ une fonction affine.

Soient x_1 et x_2 deux nombres et $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images.

$$p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Démonstration

$$f(x_1) = px_1 + q \quad f(x_2) = px_2 + q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 + q - (px_1 + q)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 + q - px_1 - q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 - px_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = p(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = p$$

Exemple 1

Soit $f(x) = px + q$ une fonction affine tel que $f(2) = 5$ et $f(6) = 21$ leurs images.
 Trouver l'expression algébrique de f .

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ avec $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$, $x_2 = 6$ et $f(x_2) = 21$.

$$\text{On a } p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{21 - 5}{6 - 2} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\text{Donc } f(x) = 4x + q.$$

Dans l'énoncé On remplace x par 2 dans la formule $f(x) = 4x + q$



$$\text{On a } f(2) = 5 \text{ et } f(2) = 4 \times 2 + q$$

$$\text{donc } 5 = 4 \times 2 + q$$

$$\text{donc } 5 = 8 + q$$

$$\text{donc } -3 = q$$

$$\text{donc } \boxed{f(x) = 4x - 3}$$

Exemple 2

Soit $A(4 ; 7)$ et $B(6 ; 11)$ deux points.

Trouver l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B .

Soit $C(5 ; 9)$ et $D(8 ; 17)$

Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

Soit $f(x) = px + q$ la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A et B .

$$\text{On a } f(4) = 7 \text{ et } f(6) = 11$$

$$\text{On a } x_1 = 4 \text{ et } f(x_1) = 7 \text{ et } x_2 = 6 \text{ et } f(x_2) = 11$$

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$$\text{Donc } p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{11 - 7}{6 - 4} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Donc } f(x) = 2x + q.$$

$$\text{On a } f(4) = 7 \text{ et } f(4) = 2 \times 4 + q$$

$$\text{donc } 7 = 2 \times 4 + q$$

$$\text{donc } 7 = 8 + q$$

$$\text{donc } -1 = q$$

$$\text{donc } \boxed{f(x) = 2x - 1}$$

$$f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9 \text{ donc } \boxed{C \in (AB)}.$$

$$f(8) = 2 \times 8 - 1 = 15 \neq 17 \text{ donc } \boxed{D \notin (AB)}.$$

Soit $M(x ; y)$ un point sur cette droite.

Les coordonnées de ce point vérifient l'équation $y = 2x - 1$; on dit que $y = 2x - 1$ est l'équation de la droite (AB) .

II - Pourcentages

Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.

Le mot français « de » se traduit en mathématiques par une multiplication.

Exemple

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120€, c'est prendre $\frac{3}{5} \times 120 = 72$ €.

Prendre 12% de 45€, c'est prendre $\frac{12}{100}$ de 45€, ce qui revient à prendre $\frac{12}{100} \times 45 = 5,40$ €.

Comment calculer le produit d'une fraction par une quantité ?

$$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$$

$$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$$

$$\frac{a}{b} \times c = (c \div b) \times a$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{10}{5} \times 7 &= (10 \div 5) \times 7 \\ &= 2 \times 7 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \times 6 &= (5 \times 6) \div 3 \\ &= 30 \div 3 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{5} \times 15 &= (15 \div 5) \times 7 \\ &= 3 \times 7 = 21 \end{aligned}$$

Propriété

Ajouter $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Soustraire $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Démonstration

Soit Q la quantité.

$p\%$ de Q c'est $\frac{p}{100} \times Q$

Si on ajoute $p\%$ à Q , on trouve $Q + \frac{p}{100} \times Q = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times Q$.

Si on soustrait $p\%$ à Q on trouve $Q - \frac{p}{100} \times Q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \times Q$.

Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15% .

Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?

Calculons le prix soldé.

$$74 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 74 \times 0,85 = 62,90$$

Le prix soldé est $62,90\text{€}$.

Exemple 2

Le taux de TVA est de $33,3\%$.

a. Le prix HT est de 126€ . Quel est le prix TTC ?

b. Le prix TTC est de 150€ . Quel est le prix HT ?

Pour passer du prix HT au prix TTC, on multiplie par $1 + \frac{33,3}{100} = 1,333$ donc pour passer du prix TTC au prix HT, on divise par $1,333$

a. Calculons le prix TTC.

$$126 \times 1,333 \approx 167,96$$

Le prix TTC est d'environ $167,96\text{€}$.

b. Calculons le prix HT.

$$150 \div 1,333 \approx 112,53$$

Le prix HT est d'environ $112,53\text{€}$.

Résumé

