3.1415926535897932384626433832795**02**88419716939937510582097494459230781640628620899862803
482534**2117067982148086513282306647**093844609550582231725359408128481117450284102701938521
1055**59644622948954930381964428810**9756659334461284756482337867831652712019091456485669234
603**486104543266482133936072602491**4127372458700660631558817488152092096282925409171536436
78**92**590360**011**33053054**8820**466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611
7**93**1051185**480**74462379**9627**495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213
9494639522**473**71907021**798**6094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526
3560827785**771**34275778**960**9173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542
0199561121**290**21960864**034**4181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328
160963185**9502**4459455**3469**0830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320
838142061**717**76691473**0359**8253490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226
80661300**1927**87661119**5909**21642019**8**9380952572010654858632788659361533818279682303019520353
018529**689957**736225994**1389**124972**17**7528347913151557485724245415069595082953311686172785588
90750**983817**5463746493**93192550604**0092770167113900984882401285836160356370766010471018194 2
9555**961989**46767837449**44825537977**4726847104047534646208046684259069491293313677028989152 1
04752**1620**56966024058038**1501935**1125338243003558764024749647326391419927260426992279678235
4781636009341721641219924586315030286182974555706749838505494588586926995690927210797509
3029553211653449872027559602364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746
7289097777279380008164706001614524919217321721477235014144197356854816136115735255213347
5741849468438523323907394143334547762416862518983569485562099219222184272550254256887671
7904946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642251252
051173929848960841284886269456042419652850222106611863067442786220391949450**47123713786**96
09563**6437**1917**2874**677646**57**573962**413890865**8**32**64599**58**1339**047802**759009946576407**89512694683**98
35259**57098**25**82262**05224**8940**77267194**78**26848**26**01476**99**090**26**4013**63**9443745530506820349625**245**17
49399**65**1**43**14**29**8**09**1906**59**25**09**3722169**64**61515**709858387**4105**978859**5977297549893016175**3928468**13
82686**83**86**8942**77**41**559**91855925**245953**95**94310**49**97252**46**80845987**273**644695848653836736**2226260**99
12460**80**51**2438**84**39**04**51**244136**54**97627**80**79771**56**91435**99**770**01**2961**60**8944169486855584840635**342**20
72225**82**848**86**481**58**4**56**02850601**68**4273**94**52267**46**76788**95**2521**385225**499546667278239**86456596116**35
488623057745649803559363456817432411251507606947945109659609402522887971089**31456691368**67
2287489405601015033086179286809208747609178249385890097149096759852613655497818931297848
2168299894872265880485756401427047755513237964145152374623436454285844479526586782105114
1354735739523113427166102135969536231442952484937187110145765403590279934403742007310578
5390621983874478084784896833214457138687519435064302184531910484810053706146806749192781
9119793995206141966342875444064374512371819217999839101591956181467514269123974894090718
6494231961567945208095146550225231603881930142093762137855956638937787083039069792077346
7221825625996615014215030680384477345492026054146659252014974428507325186660021324340881
9071**0486331**73**4649651**45**3905796**26**8561005**508106658796**9981635**74**7363840**52**5714591**02**8970641**4011
0971206280**4**39**0**39759**5**15677157**7**00**4**203378699360072305587631**7**63**5**94218**7**31251471**2**0532928**1**91826
1861258673**2**15**7**91984**1**48488291**6**44**7**060957527069572209175671**1**67**2**29109**8**16909152**8**017350**6**712748
5832**2287183**52**0**93539**6**57**2512108**35**7915136**988**209144**421**0067510**33**4**67110**3**14**1267111**369**90865**85163
9831**5**01970165**1**51168**5**17**1**43765761**8**35155**6**508849099898**5**99823873**4**55283**3**16**3**5507647918**5**35893226
1854**8**96321329**3**30898**5**70**6**42046752**5**90709**1**548141654985**9**46163718**0**27098**1**99**4**309924488**9**575712828
9059**2323326**09**7299712**08**4433573**26**5489382**391193259746**3667305**83**6041428**13**8830320**38**2**4903758985
2437441702913276561809377344403070746921120191302033038019762110110044929321516084244485
9637669838952286847831235526582131449576857262433441893039686426243410773226978028073189
1544110104468232527162010526522721116603966655730925471105578537634668206531098965269186
2056**4**769**3**125**70586**35**66201**855**8**100**7**293**60659**876486117910453348850346113657686753249441668039
6265**7**9787**7**718**5**56084**5**296**5**412**6**654**0**853**0**6143444318586769751456614068007002378776591344017127
4947**04205**622**305**3899**45613**1407**1**1**2**7000**407**85473326993908145466464588079727082668306343285878
5698**3**052**3**580**8**933065**7**57**4**06795**4**5**7**1637**7**5254202114955761581400250126228594130216471550979259
2309**9**079**6**547**37612**55**1**765**6**75135**7**51782**96664**547791745011299614890304639947132962107340437518
9573596145890193897131117904297828564750320319869151402870808599048010941214722131794764
7772622414254854540332157185306142288137585043063321751829798662237172159160771669254748
7389**8**6654949**45011**465**40628**433**66393**790**0**397**69265**672**1**463**8**530**6**736**0**965**71209**1807638327166416274
8888**0**0786925**6**0290228**4**721040317**2**11860**8**204**1**9000422**9**66**17**119**6**37**79**213**3**75751149595015660496318
6294**7**2654736**425**23081**77036**75159**0**67350**2**350**728**35405**6**7**0**4**0**386**7**4**3**5**1**362**222**477158915049530984448
9333**0**9634087**8**07693259939**7**80541**9**34144**7**377**4**4184263**12**98**6**080**99**88**8**687**4**13260472156951623965864
5730**21631**598**19319**516**73538**12974**1**67729**4**786**72422**924**6**543**6**680**0**980**6**769**28238**2806899640048243540
3701416314965897940924323789690706977942236250822168895738379862300159377647165122893578
6015881617557829735233446042815126272037343146531977774160319906655418763979293344195215
4134189948544473456738316249934191318148092777710386387734317720754565453220777092120190
516609628049092636019759882816133231666365

www.lesmathsdherve.net

Sommaire

LES NOMBRES RELATIFS

Les nombres négatifs sont apparus après le 0. Ce n'est qu'en 456, dans un traité de cosmologie en sanscrit qu'on trouve pour la première fois un mot qui représente le zéro. Au VII$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien indien Brahmagupta énoncé des règles pour opérer sur trois sortes de nombres : « biens », « dettes » et « zéro ».
Les hommes furent longtemps réticents à accepter les nombres négatifs. Les mathématiciens ne commencent à travailler avec qu'au XV$^{\text{ème}}$ siècle, et ils les appellent numeri absurdi ("les nombres absurdes"), en leur refusant le statut de solution d'une équation. Au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, René DESCARTES, qualifiait encore de "fausses" ou "moindres que rien" les solutions négatives d'une équation. A cette même époque, John WALLIS osa attribuer des coordonnées négatives aux points d'une courbe. A la fin du 18$^{\text{ème}}$ siècle, on peut lire ceci dans un livre de Lazare CARNOT : « Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que zéro, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres ».

Définitions

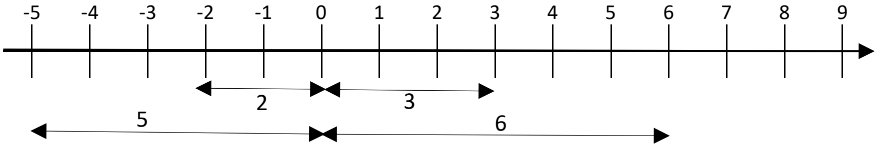
Un *nombre relatif* est un nombre précédé d'un signe.
Si ce signe est "+", le nombre est dit *positif*.
Si ce signe est "-", le nombre est dit *négatif*.
La *valeur absolue* d'un nombre relatif est la distance séparant ce nombre de 0.

Astuce

La valeur absolue d'un nombre est le nombre privé de son signe.

Exemples

La valeur absolue de -5 est 5.
La valeur absolue de -2 est 2.
La valeur absolue de +3 est 3.
La valeur absolue de +6 est 6.

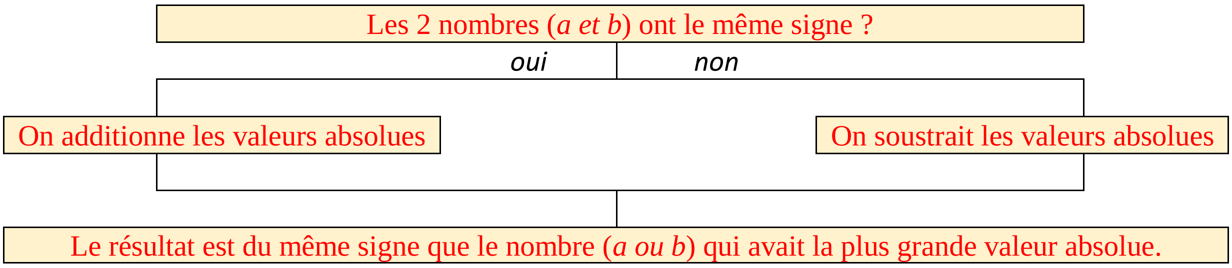


Convention

Les mathématiciens ont décidé de ne pas mettre de signe devant les nombres positifs.

Propriété admise

Pour additionner deux nombres relatifs (a + b), on procède comme suit :



Exemples

5 + 3 = 8	5 et 3 ont le même signe, donc on additionne leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.
(-5) + (-3) = -8	-5 et -3 ont le même signe, donc on additionne leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.
5 + (-3) = 2	5 et -3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.
(-5) + 3 = -2	-5 et 3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

Définition

L'opposé d'un nombre a est le nombre noté – a tel que a + (-a) = 0.

Astuce

Pour prendre l'opposé d'un nombre, il suffit de changer son signe.

Exemples

L'opposé de 2 est noté -2 et vaut -2
L'opposé de -2 est noté - (-2) et vaut 2 donc - (-2) = +2.

Définition

Soustraire, c'est additionner l'opposé.

Exemples	**Astuce**
Soustraire 2 c'est additionner –2.	- 2 = + (-2)
Soustraire 5 c'est additionner –5.	- 5 = + (-5)
Soustraire -4 c'est additionner 4.	- (-4) = + 4
Soustraire -7 c'est additionner 7.	- (-7) = +7

Exemples de soustractions

5 – 2 = 5 + (-2) = 3　　4 – 5 = 4 + (-5) = -1　　5 – (-4) = 5 + 4 = 9　　6 – (-7) = 6 + 7 = 13

Comment calculer une somme algébrique ?

On supprime les parenthèses, puis on effectue le travail précédent en additionnant les positifs et les négatifs (veiller à bien garder le signe qui se trouve devant un nombre lors du "réarrangement").

Exemple

(-5) + 3 – 4 + 5 + (-3) – 4 + 7 = -5 + 3 - 4 + 5 - 3 - 4 + 7 = -5 - 4 - 3 - 4 + 3 + 5 + 7 = -16 + 15 = -1

Propriété règle des signes admise

×	+	-
+	+	-
-	-	+

Le produit de deux nombres de même signe est positif

Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

La règle des signes s'applique aussi pour les divisions.

Comment multiplier deux nombres relatifs ?

1. On multiplie leurs valeurs absolues.
2. On détermine le signe en utilisant la règle des signes.

Exemples de produits ou quotients

5 × 2 = +10 Les 2 nombres ont le même signe, le résultat est positif. 10 ÷ 2 = +5	5 × (-2) = -10 Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le résultat est négatif. 10 ÷ (-2) = -5	(-5) × 2 = -10 Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le résultat est négatif. (-10) ÷ 2 = -5	(-5) × (-2) = +10 Les 2 nombres ont le même signe, le résultat est positif. (-10) ÷ (-2) = +5

Propriété admise

Pour déterminer le signe d'une expression numérique dans laquelle n'interviennent que des multiplications et des divisions, il suffit de compter le nombre de facteurs négatifs.

Si ce nombre de facteurs négatifs est pair (0, 2, 4, 6, 8 …), le produit est positif.

Si ce nombre de facteurs négatifs est impair (1, 3, 5, 7, 9…), le produit est négatif.

Exemples

2 × 5 × (- 4) × 3 × (- 4) × (- 4) × 5 est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.

2 × (- 5) × (- 4) × 3 × (- 4) × (- 4) × 5 est positif car il y a un nombre pair (4) de facteurs négatifs.

Remarque

Peu importe le nombre de facteurs positifs ou s'il y a plus de facteurs positifs que négatifs ; seul compte le nombre de facteurs négatifs.

ATTENTION, la propriété précédente ne "marche" que s'il y a des multiplications et des divisions. Il ne faut surtout pas l'utiliser lorsqu'il y a des additions ou des soustractions.

Propriété priorités opératoires admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On effectue les multiplications et divisions (de gauche à droite).
3. On termine toujours par les additions et soustractions (de gauche à droite).

Exemple

10 + 5 × (3 – (3 + 5 × 7)) = 10 + 5 × (3 – (3 + 35)) = 10 + 5 × (3 – (38)) = 10 + 5 × (- 35) = 10 + (- 175) = - 165

Astuce

Dans le cas de parenthèses imbriquées, il peut être utile de mettre en couleur les paires de parenthèses pour repérer les calculs à effectuer.

FRACTIONS : additions et soustractions

Définitions

Un nombre en *écriture fractionnaire* s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{le numérateur} \\ \leftarrow \text{le dénominateur} \end{array}$$

On parle de *fraction* lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

On parle de *fraction décimale* lorsque l'on a une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, 10000 ...

Propriété d'égalité de fractions - admise

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

Exemples

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35} \qquad \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \qquad \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

Définitions

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la valeur absolue de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

Exemples

$$\frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4} \qquad \frac{45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

Remarque

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

Propriétés admises : Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

- 186 se divise par 2 car il est pair (il se termine par 6).
- 187 ne se divise pas par 2 car il est impair.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 237 est divisible par 3 car 2+3+7=12 et 12 est divisible par 3.
- 238 n'est pas divisible par 3 car 2+3+8=13 et 13 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

- 25 292 est divisible par 4 car 92 est divisible par 4, car 92=40+40+12 et 12 est divisible par 4.
- 45 267 n'est pas divisible par 4 car 67 n'est pas divisible par 67=40+27 et 27 n'est pas divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

- 185 se divise par 5 car il se termine par 5.
- 190 se divise par 5 car il se termine par 0.
- 187 ne se divise pas par 5.

Un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 ET par 3, donc s'il est pair ET si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 894 se divise par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - ET il se divise par 3 car 8+9+4=21 qui se divise par 3.
- 165 ne se divise pas par 6 car
  - il ne se divise par 2 (il est impair),
  - même si il se divise par 3 car 1+6+5 = 12 qui se divise par 3.
- 898 ne se divise pas par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - mais il ne se divise pas par 3 car 8+9+8=25 qui ne se pas divise par 3.

- 77 ne se pas divise par 6 car
    - il ne se divise par 2 (il est impair),
    - il ne se divise par 3 car 7+7=14 qui ne se divise pas par 3.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

- 567 est divisible par 9 car 5+6+7=18 et 18 est divisible par 9.
- 123 456 789 est divisible par 9 car 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 et 45 est divisible par 9 car 4+5=9 qui est divisible par 9.
- 238 n'est pas divisible par 9 car 2+3+8=13 et 13 n'est pas divisible par 9.

Remarque

Un nombre divisible par 9 est obligatoirement divisible par 3.

Définition

Un nombre est dit premier s'il n'a que 1 et lui-même comme diviseur (un nombre premier a exactement 2 diviseurs).

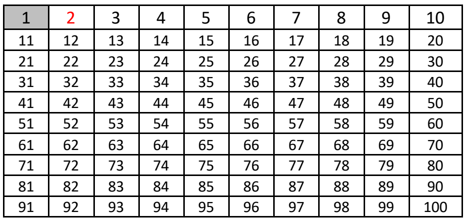
Exemples

Le nombre 3 est premier car ses diviseurs sont 1 et 3.

Le nombre 6 n'est pas premier car il se divise par 1, 2, 3 et 6.

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Astuce pour trouver tous les nombres premiers en partant de 2 : crible d'Ératosthène (c'est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec : -276 à -194).

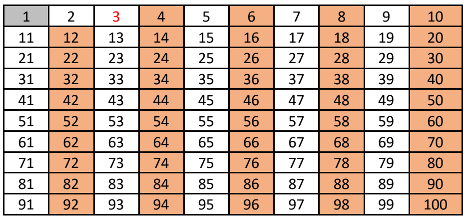


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On écrit tous les nombres de 1 à 100.

1 n'est pas premier donc on le barre

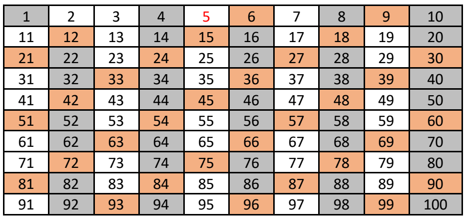
Le premier nombre non barré est 2 donc c'est un nombre premier.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 2 qui ne sont donc pas premiers.

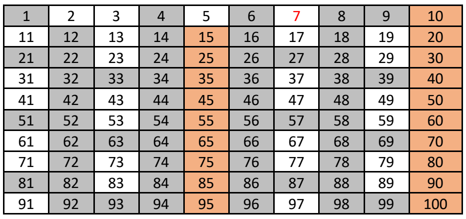
Le premier nombre non barré après 2 est 3 ; c'est un nombre premier.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 3 qui ne sont donc pas premiers.

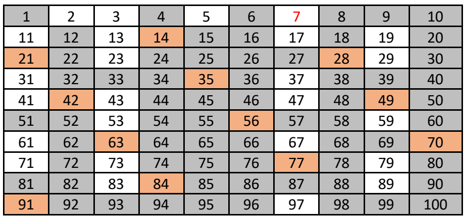
Le premier nombre non barré après 3 est 5 ; c'est un nombre premier.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 5 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 5 est 7 ; c'est un nombre premier.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 7 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 7 est 11 ; c'est un nombre premier.

On s'arrête ici car $11^2 = 11\times11 > 100$.
Tous les nombres non barrés sont premiers.

Les nombres premiers jusqu'à 100 sont : ❤ **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23**, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Comment décomposer un nombre en produits de facteurs premiers.

On veut décomposer 450.

450		On réécrit le nombre à gauche de la ligne verticale
225	2	2 est le plus petit nombre premier qui divise 450 450 = 225 × 2 On écrit 225 à gauche et 2 à droite
75	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 225 225 = 75 × 3 On écrit 75 à gauche et 3 à droite
25	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 75 75 = 25 × 3
5	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 25 25 = 5 × 5
1	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 5 5 = 1 × 5 On s'arrête lorsqu'il y a 1 dans la colonne de gauche.

$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

Exemples de décomposition en facteurs premiers

Décomposons 180

180	
90	2
45	2
15	3
5	3
1	5

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Décomposons 380

380	
190	2
95	2
19	5
1	19

$380 = 2^2 \times 5 \times 19$

Utilisation de la calculatrice

Décomposons 180

CASIO FX92	CASIO FX 92 classwiz	TI COLLEGE PLUS
1 8 0 EXE SECONDE ⊦	180 Format Facteur premier EXE	180 SECONDE ▸ SIMP

On obtient : $2^2 \times 3^2 \times 5$

Trouver le plus petit multiple commun à 34 et 51 : *PPCM(34 ; 51)*

CASIO FX92	CASIO FX 92 classwiz	TI COLLEGE PLUS
SECONDE Y 34 SECONDE 3 51) EXE	CATALOG puis Calcul numérique puis PPCM EXE 34 ; 51)	système maths 2 34 2nde ; , 51 ▸norm) entrer

On obtient : 102

Exemple de simplification de fraction

Simplifier la fraction $\frac{21000}{29700}$

Décomposons 21000

21000	
10500	2
5250	2
2625	2
875	3
175	5
35	5
7	5
1	7

$21000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7$

Décomposons 29700

29700	
14850	2
7425	2
2475	3
825	3
275	3
55	5
11	5
1	11

$29700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$

$$\frac{21000}{29700} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 11} = \frac{70}{99}$$

Comment transformer une écriture fractionnaire en fraction ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateur entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, …).

Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

Exemples

$$\frac{5{,}2}{2} = \frac{5{,}2 \times 10}{2 \times 10} = \frac{52 \div 2}{20 \div 2} = \frac{26 \div 2}{10 \div 2} = \frac{13}{5} \qquad \frac{4{,}51}{3{,}7} = \frac{4{,}51 \times 100}{3{,}7 \times 100} = \frac{451}{370}$$

Propriété d'addition de fractions de même dénominateur - admise

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

Exemples

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{3+6}{4} = \frac{9}{4} \qquad \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1-8}{3} = \frac{-7}{3} \qquad \frac{-1}{5} - \frac{8}{5} = \frac{-9}{5} \qquad \frac{-15}{6} - \frac{-8}{6} = \frac{-15-(-8)}{6} = \frac{-15+8}{6} = \frac{-7}{6}$$

Définition

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

Remarque

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

Comment additionner deux fractions de dénominateurs différents ?

On se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

Exemples

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{3} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{21}{6} + \frac{10}{6} = \frac{31}{6} \qquad \frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 51}{34 \times 51} + \frac{8 \times 34}{51 \times 34} = \frac{255}{1734} + \frac{272}{1734} = \frac{527}{1734}$$

Remarque

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici, $\frac{527}{1734} = \frac{31}{102}$

Astuce

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs (ici 34 et 51).

Méthode 1	Méthode 2
On décompose les deux nombres. Décomposons 34 : $\begin{array}{r\|l} 34 & \\ 17 & 2 \\ 1 & 17 \end{array}$ 34 = 2 × 17 Décomposons 51 : $\begin{array}{r\|l} 51 & \\ 17 & 3 \\ 1 & 17 \end{array}$ 51 = 3 × 17 On cherche un nombre qui contient tous les facteurs ci-dessus : 2 × 3 × 17 = 102.	On écrit les multiples des 2 nombres jusqu'à ce que l'on en trouve un en commun. $\begin{array}{r\|l} 34 & 51 \\ 68 & 102 \\ 102 & \end{array}$ On peut aussi donner tous les multiples du plus grand nombre jusqu'à ce que l'on obtienne un multiple du plus petit : 51, 102, …

$$\frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 3}{34 \times 3} + \frac{8 \times 2}{51 \times 2} = \frac{15}{102} + \frac{16}{102} = \frac{31}{102}$$

Propriété admise

Prendre une quantité d'une fraction c'est multiplier le nombre par la fraction.

Exemples

Prendre $\frac{3}{4}$ de 126 € c'est prendre $\frac{3}{4} \times 126$ €.

Rouler $\frac{2}{5}$ de 800 km c'est rouler $\frac{2}{5} \times 800$ km.

Remarque

Le mot « de » en français se traduit par « × » en mathématiques.

Comment multiplier un nombre par une fraction ?

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$	$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$	$\frac{a}{b} \times c = a \times (c \div b)$
$\frac{12}{6} \times 7 = (12 \div 6) \times 7 = 2 \times 7 = 14$	$\frac{2}{3} \times 9 = (2 \times 9) \div 3 = 18 \div 3 = 6$	$\frac{5}{7} \times 21 = 5 \times (21 \div 7) = 5 \times 3 = 15$

Notation

La fraction $\frac{p}{100}$ est notée p %

La fraction $\frac{15}{100}$ est notée 15 %

Exemple de problème

Sébastien achète un pull. Le prix affiché est de 65€, mais il bénéficie d'une remise de 15%.
Combien va-t-il payer ?

Calculons le montant de la remise

$15\ \%$ de 65 € = $\frac{15}{100}$ de 65

$$= \frac{15}{100} \times 65 = (15 \times 65) \div 100 = 975 \div 100 = 9{,}75$$

La remise est de 9,75 €.

Je calcule le prix réduit.

65 – 9,75 = 55,25

Le prix réduit est de 55,25 €.

FRACTIONS : multiplications et divisions

Propriété du signe des fractions

Une fraction est une division, donc la règle des signes s'applique pour déterminer le signe d'une fraction (on compte le nombre de termes négatifs).

Exemples

$$\frac{-3}{4}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}=-\frac{-3}{-4}=-0,75$$

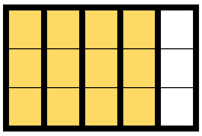
Il y a 1 (ou 3) terme(s) négatif(s),
donc le résultat est négatif.

$$\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}=+0,75$$

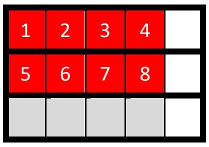
Il y a 2 termes négatifs,
donc le résultat est positif.

Remarque

Quatre cinquièmes valent



Deux tiers de quatre cinquièmes valent huit quinzièmes



Deux tiers de quatre cinquièmes s'écrit $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ et on voit que $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$

Propriété de multiplication de fractions - admise

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Astuce

Pour déterminer le signe, on utilise la règle des signes.

Exemples

$$\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}=\frac{5\times9}{7\times11}=\frac{45}{77}$$

$$\frac{-5}{3}\times\frac{-8}{-4}=-\frac{5\times8}{3\times4}=-\frac{40}{12}=-\frac{10}{3}$$

Il y a 3 termes négatifs,
donc le résultat est négatif.

$2\times\frac{3}{5}\neq\frac{2\times3}{2\times5}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ mais $2\times\frac{3}{5}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times3}{1\times5}=\frac{6}{5}$

Définition

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a vaut 1. L'inverse de a est noté : a^{-1}.

Propriété

L'inverse du nombre *a* vaut $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ vaut $\frac{b}{a}$.

Démonstrations

$$a\times\frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$$

Exemples

Nombre	5	-3	$\frac{2}{7}$	$\frac{-3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
Inverse	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	N'existe pas

Ne pas confondre inverse et opposé.
L'opposé de 2 est -2
L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$

Définition

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

Exemples

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{-2}{3} \div \frac{4}{9} = -\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{3} \div 2 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$8 \div \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5}$$

On inverse uniquement le nombre se trouvant après le symbole de division et on ne change pas celui qui est avant.

Remarques

$\frac{3}{5}$ est une notation de 3 ÷ 5 et vaut 0,6

Il n'est pas possible de donner une valeur décimale exacte pour toutes les fractions, par exemple : $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$

Attention à la position du signe d'égalité lorsqu'il y a des fractions à "étages".

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \approx 0{,}17$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Exemple de calcul « complexe »

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{-1} = \frac{20}{-4} = -5$$

PUISSANCES

La première mention, de carrés ou de cubes, remonte à l'époque babylonienne, au 23ème siècle avant J C. $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$

Le terme exposant est dû au mathématicien allemand Stifel (1487 – 1567) qui généralisent la notation aux exposants négatifs. L'auteur de l'*Arithmética intégra* était un moine, disciple du Luther, qui calcula la fin du monde pour le 18 octobre 1533 …

La notation scientifique est inventée par René Descartes (vers 1637) dans *La géométrie*. Il y invente aussi le symbole $\sqrt{}$.

5^2 se lit exposant 2 et 5_2 se lit 5 indice 2

Définition

Le nombre noté a^n qui se lit « a exposant n » est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$$

Exemples

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ $\quad 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ $\quad (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

Remarques

a^2 se lit "a exposant 2" ou "a au carré"

a^3 se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

Astuce

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de a^n est positif si :

- *a* est positif
- ou *a* est négatif et n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 …).

Le signe de a^n est négatif si : *a* est négatif et n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 …).

Exemples

4^5 est positif

$(-4)^5$ est négatif car il y a **5** facteurs négatifs.

$(-10)^8$ est positif car il y a **8** facteurs négatifs.

Propriété de priorité opératoire - admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On calcule les puissances.
3. On effectue les multiplications et divisions.
4. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple

$4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3)$

$= 4 \times 5^2 \times (5 - 12)$

$= 4 \times 5^2 \times (-7)$

$= 4 \times 25 \times (-7)$

$= 100 \times (-7)$

$= -700$

Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances

$(-2)^4 = 16$ car $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$

$-2^4 = -16$ car $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction.

On calcule d'abord la puissance.

Propriété 1 - admise

$x^a \times x^b = x^{a+b}$ S'il y a le même nombre en bas, on additionne les puissances

Exemples

$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$ $\quad 3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$ $\quad (-2)^3 \times (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10}$

"Justification"

$2^3 \times 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{3+7} = 2^{10}$

⚠ Attention à la consigne car on peut attendre deux résultats différents.

Calcule	Mettre $2^3 \times 2^5$ sous la forme d'une seule puissance
$2^3 \times 2^5 = 8 \times 32$ $= \mathbf{256}$ *Le résultat est un nombre (entier ou décimal) ou une fraction*	$2^3 \times 2^5$ $= \mathbf{2^8}$ *Le résultat est **une** puissance*

Propriété 2 - admise

$$x^a \times y^a = (x \times y)^a$$

S'il y a le même nombre en haut, on multiplie les nombres du « bas »

Exemples

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 \qquad 3^5 \times 7^5 = (3 \times 7)^5 = 21^5$$

"Justification"

$$\begin{array}{ccccccc} 2^3 & = & 2 & \times & 2 & \times & 2 \\ \times 5^3 & & \times 5 & & \times 5 & & \times 5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & = & 10 & \times & 10 & \times & 10 \\ & = & 10^3 & & & & \end{array}$$

Propriété 3 - admise

$$(x^a)^b = x^{a \times b}$$

Si les puissances sont imbriquées, on multiplie les exposants.

Exemples

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12} \qquad ((-3)^2)^4 = (-3)^{2\times4} = (-3)^8$$

"Justification"

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12}$$

Remarque

← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →
2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^1}$					

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} \qquad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} \qquad 2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

Propriété 4 - admise

Si $x \neq 0$ alors $x^0 = 1$

Exemples

$4^0 = 1$ $\quad (-4)^0 = 1$ $\quad \pi^0 = 1$ $\quad 2,7^0 = 1$ $\quad (-4,8)^0 = 1$ $\quad -9^0 = -1$

Propriété 5

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

L'exposant négatif devient « 1 sur … » ou l'inverse.

Exemples

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \qquad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Démonstration

$n + (-n) = 0$

$x^{n + (-n)} = x^0$

$x^n \times x^{(-n)} = 1$

x^n et x^{-n} sont inverses l'un de l'autre

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Propriété 6 - admise

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Lorsqu'on divise des puissances du même nombre, on soustrait les exposants.

Exemples

$$\frac{5^{12}}{5^8} = 5^{12-8} = 5^4 \qquad \frac{5^{15}}{5^{18}} = 5^{15-18} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} \qquad \frac{5^7}{5^{-8}} = 5^{7-(-8)} = 5^{15}$$

Propriété 7 - admise

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

L'exposant se distribue sur le numérateur et sur le dénominateur

Exemples

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \qquad \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{5^3}{4^3} = -\frac{125}{64} \qquad \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4} = \frac{16}{625}$$

Propriété - admise

Soit n un entier positif.
10^n s'écrit avec un "1" suivi de n "0".
10^{-n} s'écrit "0,0…01" avec n "0" au total en comptant celui avant la virgule.

Exemples

$10^7 = \mathbf{1}\mathbf{0000000}$ — 7 zéros

$10^{-8} = \mathbf{0{,}0000000}1$ — 8 zéros

Définition

Un nombre est dit **sous la forme scientifique** (ou en **notation scientifique**) s'il s'écrit sous la forme : $a \times 10^n$

↙ ↘

a est un nombre décimal dont la valeur absolue est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10).

n est un entier relatif (positif ou négatif)

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique

15	10^3	15×10^4	10×10^4	$0{,}8 \times 10^4$	$1{,}5 \times 10^{4{,}2}$
Il manque $\times 10^{\cdots}$	Il manque un nombre devant	Le nombre devant est supérieur à 10.	Le nombre devant est égal à 10.	Le nombre devant n'est pas supérieur ou égal à 1.	L'exposant n'est pas entier

Exemples de nombres étant en notation scientifique

1×10^4	$1{,}5 \times 10^{-5}$	$-1{,}5 \times 10^{42}$	$-9{,}5 \times 10^{-12}$	$-1{,}7 \times 10^0$	$1{,}5 \times 10^0$

Rappels

Si n est positif, multiplier par 10^n c'est décaler la virgule de n rangs vers la droite.
Si n est positif, multiplier par 10^{-n} c'est décaler la virgule de n rangs vers la gauche.

Exemples de passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$4{,}52 \times 10^4 = 45200 \qquad -6 \times 10^4 = -60000 \qquad 4{,}52 \times 10^{-4} = 0{,}000452$

Exemples de passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$123{,}45 = 1{,}2345 \times 10^2$ — *$10^2 = 100$*

$0{,}012345 = 1{,}2345 \times 10^{-2}$ — *$10^{-2} = 0{,}01$*

$123{,}45 \times 10^5 = 1{,}2345 \times 10^2 \times 10^5 = 1{,}2345 \times 10^7$

Remarque

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique (où apparaissent uniquement des quotients ou produits), on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

Exemples

$12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8 = 12 \times 55 \times 10^4 \times 10^8 = 660 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^2 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^{14}$

$25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^8 = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^8 = -10000 \times 10^{-6} = -1 \times 10^4 \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$

$0,0055 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 0,0055 \times 2 \times 10^7 \times 10^8 = 0,011 \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{-2} \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{13}$

$$\frac{45 \times 10^{23} \times 24 \times 10^{-4}}{18 \times 10^5} = \frac{45 \times 24}{18} \times \frac{10^{23} \times 10^{-4}}{10^5} = \frac{1080}{18} \times \frac{10^{19}}{10^5} = 60 \times 10^{14} = 6 \times 10^1 \times 10^{14} = 6 \times 10^{15}$$

Utilisation de la calculatrice

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{\blacksquare^{\blacksquare}}$ $\boxed{x^{\blacksquare}}$ $\boxed{x^{y}}$ $\boxed{x^{n}}$ $\boxed{y^{x}}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\uparrow}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{x^{\blacksquare}}$ cette touche.

Pour calculer $5^3 \times 2 - (2-5)^4$ on tape 5 $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 3 × 2 - (2 - 5) $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 4 et on trouve 169.

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ $\boxed{\times 10^{x}}$ $\boxed{\times 10^{n}}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{\text{EE}}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ cette touche. Elle remplace l'appui sur les touches $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{x^{\blacksquare}}$

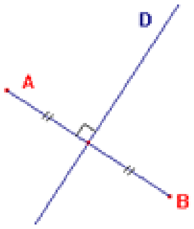
Pour calculer $12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8$ on tape 12 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 4 × 55 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 8 et on trouve $6,6 \times 10^{14}$.

SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS, VECTEURS et ROTATIONS

I – Symétrie axiale

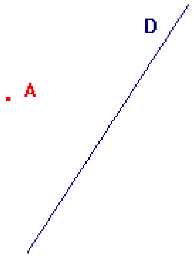
Définition

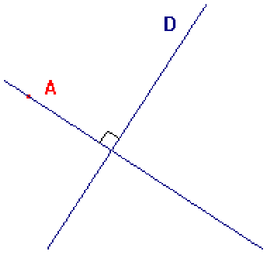
Deux points A et B sont symétriques par rapport à la droite D si D est la médiatrice de [AB].



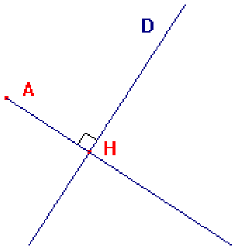
Construction avec la réquerre

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :

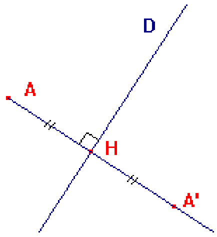




Tracer la droite perpendiculaire à D qui passe par A.



Elle coupe D en H.

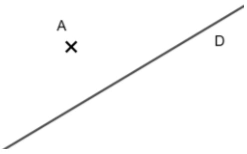


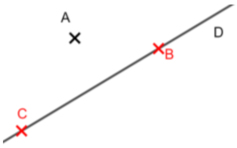
Placer le point A' tel que H soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie d'axe D.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie d'axe D.

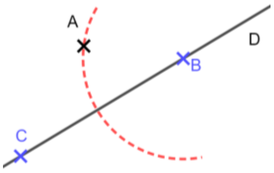
Construction avec le compas et la règle non graduée

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :

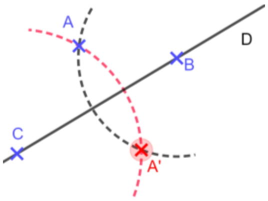




Placer deux points (B et C) sur D.



Tracer le cercle de centre B qui passe par A.



Tracer le cercle de centre C qui passe par B ; il coupe le cercle précédent en A'.

Propriété admise

La symétrie axiale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

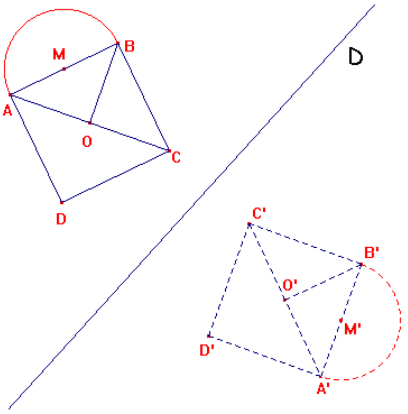


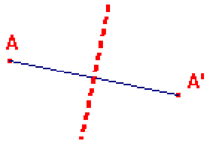
Image par la symétrie d'axe D.

Pour mémoire

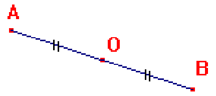
La symétrie axiale « correspond » à un miroir.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie axiale, il faut donner son axe.
Pour retrouver son axe, il suffit de connaître un point et son image.
L'axe de symétrie est la médiatrice du segment formé par ces 2 points.



II – Symétrie centrale

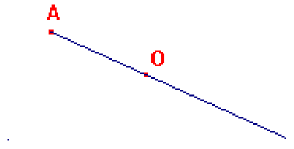


Définition

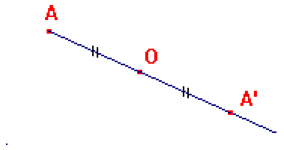
Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O si O est le milieu de [AB].

Construction

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport au point O il faut :



Tracer la demi-droite [AO].



Placer le point A' sur [AO] tel que O soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie de centre O.

On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie de centre O.

Propriété admise

La symétrie centrale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

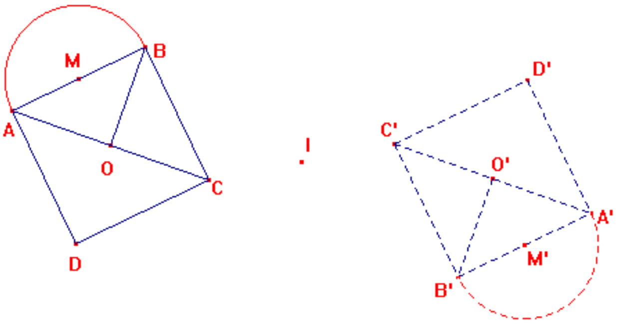


Image par la symétrie de centre I.

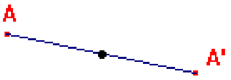
Pour mémoire

La symétrie centrale « correspond » à un demi-tour autour du centre de symétrie.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie centrale, il faut donner son centre.

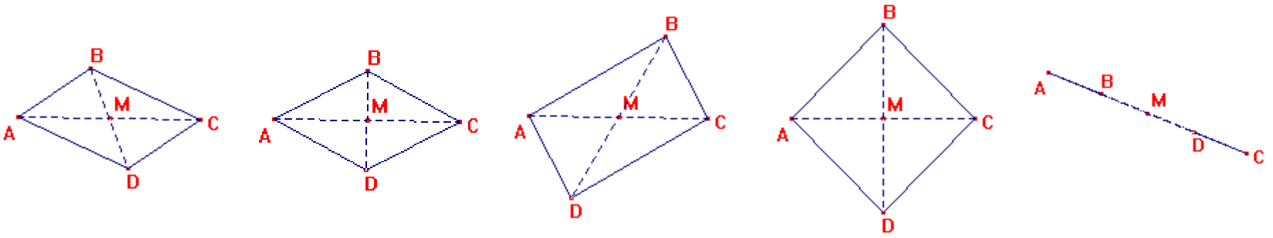
Pour retrouver son centre, il suffit de connaître un point et son image. Le centre de symétrie est le milieu du segment formé par ces 2 points.



III – Translation

Définition

ABCD est un *parallélogramme* si ces diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.



Dans tous les cas ci-dessus, ABCD est un parallélogramme car M est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

Définition

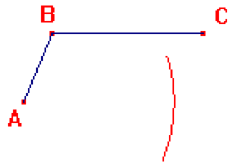
On dit que l'image du point D est le point C par la *translation* qui envoie A sur B si ABCD est un parallélogramme.

Construction

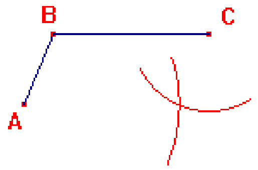
Pour construire l'image du point C dans la translation qui envoie A sur B il faut construire le parallélogramme ABC'C.

C' est le *translaté* de C par la translation qui envoie A sur B.
On dit aussi que C' est l'*image* de C par la translation qui envoie A sur B.

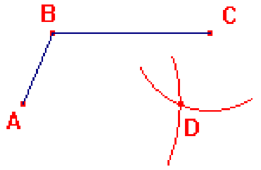
Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle et compas



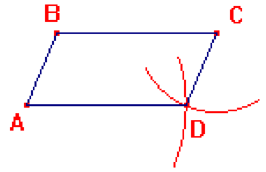
Tracer un arc de cercle de centre A et de rayon BC.



Tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB.

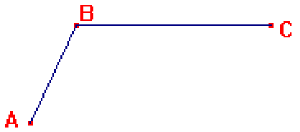


Les deux demi-cercles se coupent en D.

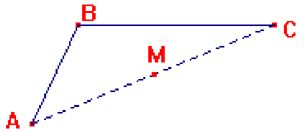


Tracer les segments [CD] et [AD]

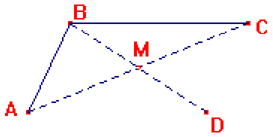
Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle graduée



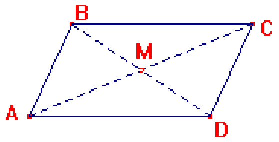
Tracer le segment [AC]



Construire le point M, milieu de [AC]



Tracer le point D, symétrique de B par rapport au point M.



Tracer les segments [CD] et [AD].

Propriété admise

La translation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

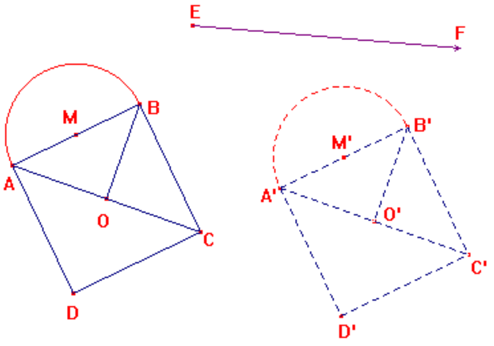


Image par la translation qui envoie E sur F.

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour mémoire

La translation « correspond » à un glissement sans tourner.

Caractériser

Pour caractériser une translation, il faut donner un point et son image ou le vecteur dont les extrémités sont ces points.

Dans l'exemple, on peut parler de la translation qui envoie A sur B ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut aussi parler de la translation qui envoie C sur C' ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{CC'}$.

IV – Vecteurs

Définition

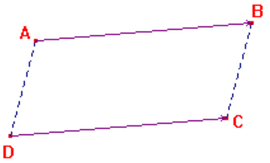
La translation qui envoie le point A sur le point B est associé à $\overrightarrow{AB}$, qui se lit "*vecteur* A B".

Remarque

La translation qui envoie B sur A est associé au vecteur $\overrightarrow{BA}$. ***On ne note pas*** $\overleftarrow{BA}$**.**

Définition (rappel)

On dit que l'image du point D est le point C par la ***translation qui envoie A sur B*** si ABCD est un parallélogramme.



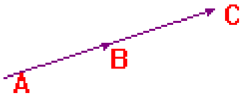
Propriétés admises

- Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme.

Remarque

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme.

Propriétés



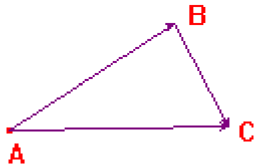
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors B est le milieu de [AC]
- Si B est le milieu de [AC] alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

Démonstration

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors ABCB est un parallélogramme donc B est le milieu de [AC].

Si B est le milieu de [AC] alors ABCB est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Relation *de CHASLES* admise



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Remarque

Effectuer la translation qui envoie A sur B puis la translation qui envoie B sur C revient à effectuer la translation qui envoie A sur C.

Remarque

La translation qui envoie A sur A laisse la figure inchangée.

Définition

On définit le vecteur nul (noté $\vec{0}$) par : $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD}$ ....

Remarque

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ d'après la relation de Chasles donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

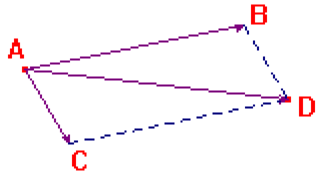
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont pour somme le vecteur nul. On dit qu'ils sont ***opposés*** l'un de l'autre et on note :

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Comment construire la somme de deux vecteurs ?

1er cas : A, B et C étant trois points quelconques, construire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles.



2ème cas : A, B et C étant trois points quelconques, construire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

On construit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Comme ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

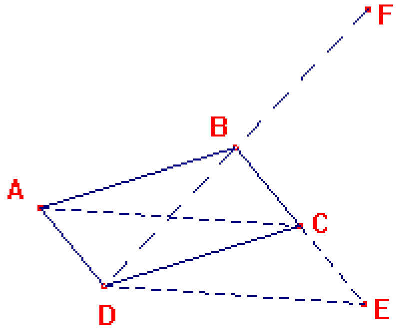
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles.

Exemple d'exercice

ABCD est un parallélogramme.

a- Construire le point E tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b- Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$



a- Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles.

Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$ donc ACED est un parallélogramme.

b- Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$ d'après la relation de Chasles.

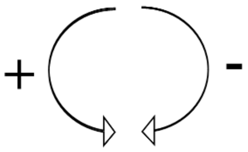
Donc $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DB}$ (ou $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BF}$) donc B est le milieu de [DF].

V – Rotations

Définition

Un angle est dit :

- positif s’il tourne dans le sens trigonométrique (l’inverse de la montre / antihoraire)
- négatif s’il tourne dans le sens chronométrique (la montre / horaire).



Remarque

Pour définir une rotation, il faut donner un angle. Pour définir le sens de rotation, on donne un signe à l’angle.

Si l’on dit rotation d’angle –50°, il faut comprendre qu’il faut tourner dans le sens chronométrique (montre).

Si l’on dit rotation d’angle +50° (ou 50°), il faut comprendre qu’il faut tourner dans le sens trigonométrique (inverse de la montre).

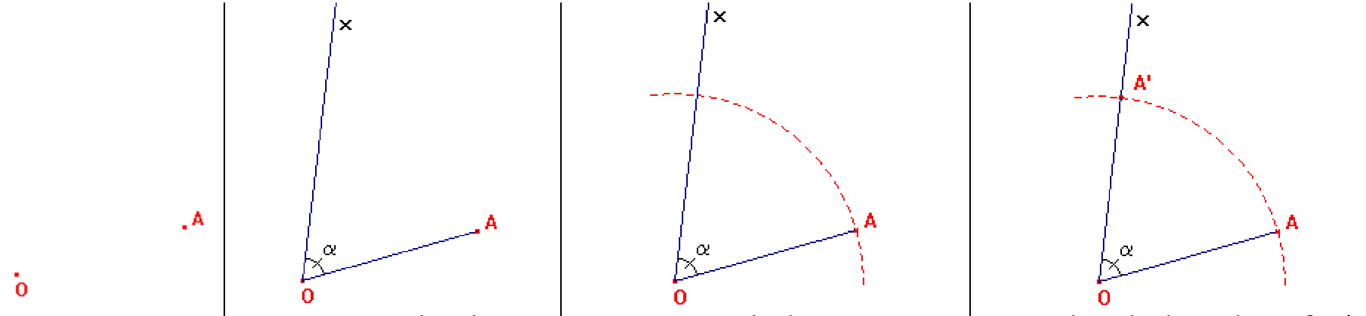
Définition

Le point A’ est l’image du point A par la rotation de centre O et d’angle α si :

- OA = OA’
- $\widehat{AOA'} = \alpha$

Construction avec le rapporteur et le compas

Pour construire l’image du point A par la rotation de centre O et d’angle ⍰, il faut :



Tracer un angle tel que $\widehat{AOx} = \alpha$

Tracer un cercle de centre O et de rayon OA.

Le cercle et la demi-droite [Ox] se coupent en A’.

A’ est l’image de A dans la rotation de centre O et d’angle ⍰.

Propriété admise

La rotation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

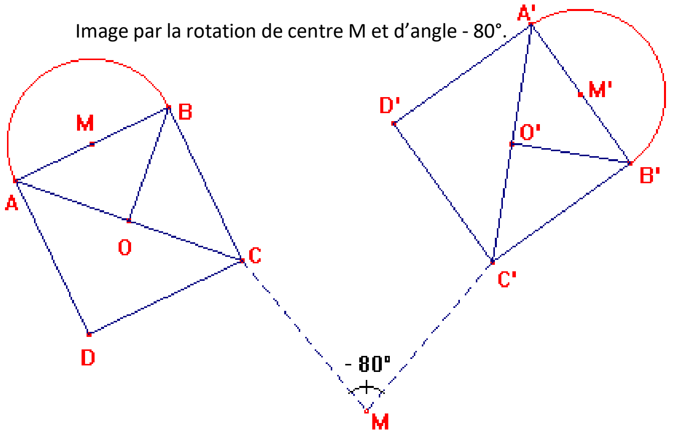
Remarque

Pour construire l’image d’une figure complexe, on commence par construire l’image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour mémoire

Pour une rotation, on tourne autour d’un point

Image par la rotation de centre M et d’angle - 80°.



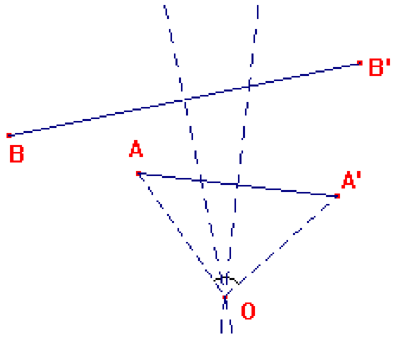
Caractériser

Pour caractériser une rotation, il faut trouver son centre et son angle.

Pour retrouver le centre O, on trace la médiatrice de deux segments formés par deux points et leurs images (médiatrices de [AA'] et [BB']). Le point d'intersection de ces médiatrices est le centre de rotation O.

Si les segments [AA'] et [BB'] sont à supports parallèles, les médiatrices ne seront pas concourantes. Il faut choisir un autre segment [CC'] tel que (AA') et (CC') ne soient pas parallèles.

L'angle de la rotation est l'angle $\widehat{\mathrm{AOA'}}$ ou $\widehat{\mathrm{BOB'}}$.



EQUATIONS du premier degré à une inconnue – DEVELOPPER - INEQUATIONS

I – Développer

Rappels sur la réduction des produits

On peut toujours réduire les produits.

$2\,x \times 3\,x = 6\,x^2$ $\qquad$ $-5 \times 3\,x = -15\,x$ $\qquad$ $3\,x^2 \times 7\,x = 21\,x^3$

Rappels sur la réduction de sommes

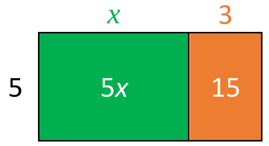
$3\,x + 2\,x = 5\,x$ $\qquad$ $15\,x - 8\,x = 7\,x$ $\qquad$ $4\,x - 12\,x = -8\,x$ $\qquad$ $15\,x^2 - 8\,x^2 = 7\,x^2$ $\qquad$ $33\,x - 5\,x^2 + 7\,x + 11\,x^2 = 40\,x + 6\,x^2$

$5\,x^2 + 3\,x$ ne peut pas se réduire

Remarque

Dans tous les exercices, il faudra réduire les expressions (*même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé*).

Remarque calcul de $5 \times (x + 3)$

Géométrique	" Répétitif "	Avec la simple distributivité
 $5 \times (x + 3) = 5\,x + 15$	$5 \times (x + 3) = x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $= 5 \times x + 5 \times 3$ $= 5\,x + 15$	$5 \times (x + 3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5\,x + 15$

Rappel simple distributivité - admise

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

Exemples

$5 \times (2x + 7) = 10\,x + 35$ $\qquad$ $8 \times (x - 3) = 8\,x - 24$ $\qquad$ $-6 \times (x + 7) = -6\,x - 42$ $\qquad$ $-4 \times (x - 7) = -4\,x + 28$

Remarque gestion du signe « - »

$-\,(2x + 7) = -\,2x - 7$ $\qquad$ $-\,(x - 3) = -\,x + 3$ $\qquad$ $-\,(-3x + 7) = +3\,x - 7$ $\qquad$ $-\,(-6x - 7) = +6x + 7$

Exemples complexes

$3\,(x + 5) + 7\,(x + 4) = 3x + 15 + 7x + 28 = 10x + 43$ $\qquad$ $5\,(x + 7) + 8\,(x - 3) = 5x + 35 + 8x - 24 = 13x + 11$

$6\,(x - 4) - 9\,(x + 2) = 6x - 24 - 9x - 18 = -3x - 42$ $\qquad$ $6\,(x - 7) + 9x\,(3x - 2) = 6x - 42 + 27x^2 - 18x = 27x^2 - 12x - 42$

II – Equations

Rappel

$$\overbrace{\underbrace{5x + 5}_{\text{Membre de gauche}} = \underbrace{3x - 17}_{\text{Membre de droite}}}^{\text{Une équation}}$$

Remarque

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

Définition

On dit qu'un nombre est une solution d'une équation l'égalité entre les deux membres est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples

Pour l'équation $5x + 5 = 3x - 17$, tester si 2 et -11 sont des solutions.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = 2$ alors - le membre de gauche devient $5 \times 2 + 5 = 15$ - et le membre de droite devient $3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15$ et $3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $\begin{array}{r\|l} 5x + 5 & 3x - 17 \\ = 5 \times 2 + 5 & = 3 \times 2 - 17 \\ = 15 & = -11 \end{array}$ Donc **2 n'est pas une solution**.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = -11$ alors - le membre de gauche devient $5 \times (-11) + 5 = -50$ - et le membre de droite devient $3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50$ et $3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $\begin{array}{r\|l} 5x + 5 & 3x - 17 \\ = 5 \times (-11) + 5 & = 3 \times (-11) - 17 \\ = -50 & = -50 \end{array}$ Donc **-11 est une solution**.

Définition

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

Exemples

Equation n'ayant pas de solution	Equation ayant une seule solution	Equation ayant une infinité de solution
$2x + 3 = 2x + 5$	$5x + 5 = 3x - 17$	$2(x + 5) - 2 = 2x + 8$
On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution.	La solution de cette équation est –11.	On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie. Quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace x, l'égalité sera vraie.

Remarque

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

Propriété - admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

1. On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
2. On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

Exemple de résolution d'une équation

Résoudre l'équation $2(x + 5) = 6x + 7$.

$2(x + 5) = 6x + 7$	On réécrit l'équation
$2x + 10 = 6x + 7$	On simplifie l'écriture de chacun des membres en développant et réduisant
$-6x \quad -10 \qquad -6x \quad -10$ $-4x = -3$	On isole les inconnues dans un membre et les nombres dans l'autre en utilisant le point 1 de la propriété ci-dessus.
$\div (-4) \qquad \div (-4)$ $x = 0{,}75$	Pour trouver x, on divise par le nombre devant x en utilisant le point 2 de la propriété ci-dessus.
Si $x = 0{,}75$ alors $\begin{array}{r\|l} 2(x + 5) & 6x + 7 \\ = 2 \times (0{,}75 + 5) & = 6 \times 0{,}75 + 7 \\ = 11{,}5 & = 11{,}5 \end{array}$	On teste si le nombre trouvé est bien une solution de l'équation en remplaçant dans l'équation du départ.
La solution de l'équation est $\boxed{\mathbf{0{,}75}}$. On peut aussi noter : $\boxed{\mathbf{S = \{0{,}75\}}}$	On conclue par une phrase.

En contrôle, il faut écrire tout ce qui est en noir ci-dessus.

III – Problèmes

Exemple 1

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des poules et des lapins. J'ai compté 174 têtes et 400 pattes.
Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

Soit L le nombre de lapins.

Expliciter l'inconnue.
C'est souvent la question qui nous indique quelle inconnue choisir.

	Lapins	Poules	Total
Têtes	L	174 - L	174
Pattes	4 × L	2 × (174 – L)	400

4 × L + 2 × (174 – L) = 400

Ecrire l'équation

4L + 258 – 2L = 400
2L + 348 = 400
- 348 - 348
2L = 52
÷ 2 ÷ 2
L = 26

Résoudre l'équation

Il y a **26 lapins** et 174-26 = **148 poules**.

Interpréter le résultat

Vérification :
Têtes : 26 + 148 = 174
Pattes : 4×26 + 2×148 = 400
C'est bon

Vérifier sur les données du problème

Exemple 2

Jules à 8 ans et son père a 42 ans.
Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

Soit x le nombre d'années à attendre.

Expliciter l'inconnue. Ici on choisit toujours le temps à attendre.

	Jules	Père
Aujourd'hui	8	42
Dans x années	$8 + x$	$42 + x$

Père = 3 × Jules
$42 + x = 3 \times (8 + x)$

Ecrire l'équation

$42 + x = 24 + 3x$
$-24 \quad -x \quad -24 \quad -x$
$18 = 2x$
÷ 2 ÷ 2
$9 = x$

Résoudre l'équation

Il faut attendre **9 ans**.

Interpréter le résultat

Vérification : dans 9 ans
Jules : 8 + 9 = 17 ans
Père : 42 + 9 = 51 ans
3 × 17 = 51
C'est bon

Vérifier sur les données du problème

Exemple 3

Un kilogramme de poire coûte un euro de plus qu'un kilogramme de pommes.

Marion a acheté trois kilos de pommes et cinq kilos de poires. Elle a payé vingt-cinq euros.

Quel est le prix d'un kilo de pommes ? de poires ?

Soit x le prix d'un kilogramme de pommes.

	Pommes	Poires	Total
Quantité en kg	3	5	
Prix au kg	x	$x + 1$	
Prix à payer	$3 \times x$	$5 \times (x + 1)$	25

$3 \times x + 5 \times (x + 1) = 25$

$3x + 5x + 5 = 25$

$8x + 5 = 25$

$\quad -5 \quad -5$

$8x = 20$

$\div 8 \quad \div 8$

$x = 2{,}5$

Les pommes coûtent **2,5 €** au kilo

et les poires coûtent 2,5 + 1 = **3,5 €** au kilo.

Vérification :

Pommes : 3 × 2,5 = 7,5

Poires : 5 × 3,5 = 17,5

Total : 7,5 + 17,5 = 25

C'est bon

Exemple 4

Marina et Karima pensent au même nombre.

Marina ajoute 8 et multiplie le résultat par 3.

Karima multiplie le résultat par 5 et ajoute 6.

Curieusement, elles trouvent le même résultat.

A quel nombre ont-elles pensé au départ ?

Soit x le nombre pensé au départ.

	Marina	Karima
Départ	x	x
Après calcul	$3 \times (x + 8)$	$5 \times x + 6$

$3 \times (x + 8) = 5 \times x + 6$

$3x + 24 = 5x + 6$

$-3x \quad -6 \quad -3x \quad -6$

$18 = 2x$

$\div 2 \quad \div 2$

$9 = x$

Elles ont pensé au nombre **9**.

Vérification :

Marina : 9 → 9 + 8 = 17 → 17 × 3 = 51

Karima : 9 → 9 × 5 = 45 → 45 + 6 = 51

C'est bon

Exemple 5

Kassandra et Arthur ont le même nombre de billes.

Si Arthur donne 10 billes à Kassandra, elle en aura alors deux fois plus que lui.

Combien ont-ils de billes au départ ?

Soit x le nombre de billes au départ.

	Kassandra	Arthur
Départ	x	x
Après calcul	$x + 10$	$x - 10$

Kassandra = 2 × Arthur

$x + 10 = 2 \times (x - 10)$

$x + 10 = 2x - 20$

$30 = x$

Ils avaient chacun **30 billes**.

Vérification :

Kassandra : 30 → 30 + 10 = 40

Arthur : 30 → 30 – 10 = 20

2 × 20 = 40

C'est bon

Exemple 6

Nathan a déjà eu 4 notes en français : 16, 9, 12 et 5.

Quelle doit être sa prochaine note s'il veut avoir 10 de moyenne ?

Soit x la prochaine note.

$$\frac{16 + 9 + 12 + 5 + x}{5} = 10$$

$$\frac{42 + x}{5} = 10$$

$$42 + x = 50$$

$$x = 8$$

Il doit avoir **8** à son prochain devoir.

Vérification :

$$\frac{16+9+12+5+8}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

C'est bon

IV – Inéquations

Définition

Une ***inéquation*** est une relation liant deux expressions algébriques séparées par un signe d'inéquation : <, >, ≤, ou ≥.

Exemples

$2x + 5 > 3\,(x - 7)$	$5x - 2 < 2x + 7$	$2x - 3 \leq x + 4$	$x + 4 \geq 3x - 5$

Définition

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnue pour que l'inégalité soit vraie.

Remarque

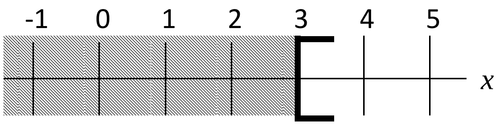
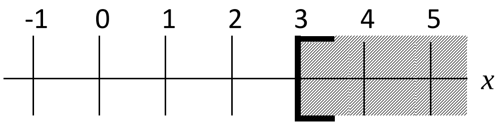
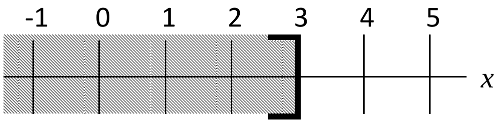
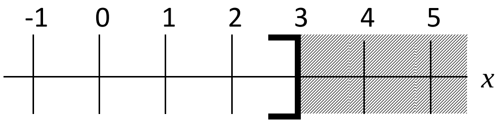
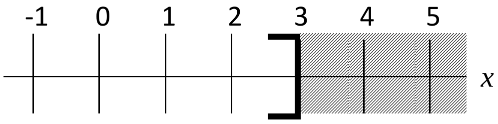
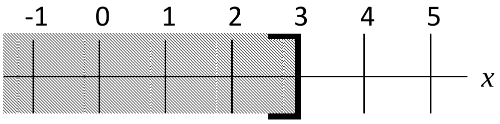
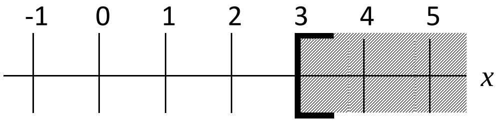
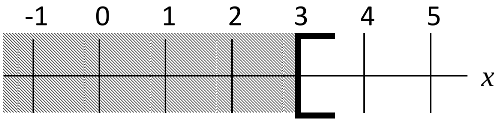
Lorsque l'on parle d'inégalité stricte (< ou >) on précise "strictement", mais lorsque l'on parle d'inégalités larges (≤ ou ≥), on peut oublier le "ou égal".
On dit "strictement inférieur". Lorsque l'on dit "inférieur", il faut comprendre "inférieur ou égal".

Exemple

L'inéquation $x < 5$ admet pour solutions tous les nombres strictement inférieurs à 5.

Représentation graphique des solutions d'une inéquation

Selon les exercices, on demandera d'hachurer l'ensemble des solutions ou d'hachurer l'ensemble des points qui ne sont pas solutions. Si rien n'est précisé dans l'énoncé à ce sujet, il faudra préciser si l'on a haché les solutions ou les points qui ne sont pas solutions.

	Les solutions sont hachurées	*Les points hachurés ne sont pas solutions*
$x < 3$		
$x \leq 3$		
$x > 3$		
$x \geq 3$		

Pour préciser si le point limite (ici 3) est solution, on place un crochet, tourné vers :

- les solutions si l'inégalité est large (≤ ou ≥)
- les points qui ne sont pas solutions si l'inégalité est stricte (< ou >).

Propriété admise

Les nombres relatifs ***ab*** et ***ac*** sont dans le même ordre que ***b*** et ***c*** si ***a*** est strictement positif, dans l'ordre inverse si ***a*** est strictement négatif.

Exemples

$2 < 5$ et $2 \times 7 < 5 \times 7$	***7*** *est strictement positif, on ne change pas l'ordre*
$78 \geq 25$ et $78 \times 13 \geq 25 \times 13$	***13*** *est strictement positif, on ne change pas l'ordre*
$5 < 12$ et $5 \times (-4) > 12 \times (-4)$	***- 4*** *est strictement négatif, on change l'ordre*

Propriété admise

Pour résoudre une inéquation, on peut (cela ne change pas les solutions) :

1. Additionner (ou soustraire) à chaque membre de l'inéquation une même expression.
2. Multiplier (ou diviser) chaque membre de l'inéquation par une même expression non nulle.

MAIS, si on multiplie (ou divise) par une expression négative, il faut INVERSER le sens de l'inéquation.

Pour résoudre une équation , on peut :

1. Additionner (ou soustraire) à chaque membre de l'équation une même expression.
2. Multiplier (ou diviser) chaque membre de l'équation par une même expression non nulle.

Exemples

$x + 5 < 3$ donc $x + 5 \mathbf{- 5} < 3 \mathbf{- 5}$ donc $x < -2$	Les solutions sont les nombres strictement inférieures à -2.
$x - 4 > 7$ donc $x - 4 \mathbf{+ 4} > 7 \mathbf{+ 4}$ donc $x > 11$	Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à 11.
$2x \leq 12$ donc $2x \mathbf{\div 2} \leq 12 \mathbf{\div 2}$ donc $x \leq 6$	Les solutions sont les nombres inférieurs à 6.
$-2x \leq 12$ donc $-2x \mathbf{\div (-2)} \geq 12 \mathbf{\div (-2)}$ donc $x \geq -6$	Les solutions sont les nombres supérieurs à -6.

On a divisé par un nombre négatif (-2), donc on inverse le sens de l'inéquation.

Remarque

Pour résoudre une inéquation, on commence par simplifier l'écriture algébrique de chacun des membres, puis on isole les inconnues dans un membre.

Astuce

Afin de ne pas avoir à multiplier (ou diviser) par une quantité négative, il peut être intéressant de "passer" les inconnues du côté où il y en a le plus.

En faisant ainsi, on n'a pas à se soucier du changement éventuel de sens de l'inégalité.

Exemples

✎ $2x + 5 > 3\,(x - 7)$ donc $2x + 5 > 3x - 21$ donc $5 + 21 > 3x - 2x$ donc $26 > x$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres strictement inférieurs à 26.

✎ $x + 4 \geq 3x - 5$ donc $x - 3x \geq -5 - 4$ donc $-2x \geq -9$ donc $x \leq -9 \div (-2)$ donc $x \leq 9/2$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres inférieurs à 9/2.

Exemple de problème n° 1

Paul a déjà eu 4 notes de français : 10, 12, 7 et 9.
Quel doit être sa prochaine note, s'il veut avoir plus de 10 de moyenne ?

Soit x la prochaine note.

$$\frac{10+12+7+9+x}{5} \geq 10 \text{ donc } \frac{38+x}{5} \geq 10 \text{ donc } 38 + x \geq 10 \times 5 \text{ donc } 38 + x \geq 50 \text{ donc } x \geq 50 - 38$$

donc $x \geq 12$

Paul doit avoir plus de 12 à son prochain contrôle pour avoir plus de 10 de moyenne.

Exemple de problème n° 2

Patrick veut louer une voiture pour ses vacances.
L'entreprise A propose un tarif de 0,5 € par kilomètre.
L'entreprise B propose un tarif de 0,3 € par kilomètre, mais avec une prise en charge de 10 €.
Quel est le nombre de kilomètres parcourus pour lequel le tarif A est plus avantageux que le tarif B ?

Soit x le nombre de kilomètres parcourus.

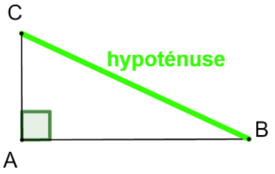
Facultatif
Le prix avec le tarif A est 0,5 x
Le prix avec le tarif B est 10 + 0,3 x

$0{,}5x < 10 + 0{,}3x$ donc $0{,}5x - 0{,}3x < 10$ donc $0{,}2x < 10$ donc $x < 10 \div 0{,}2$ donc $x < 50$

Le tarif A est le plus avantageux si l'on parcourt moins de 50 kilomètres.

Triangles rectangles : PYTHAGORE

I – PYTHAGORE



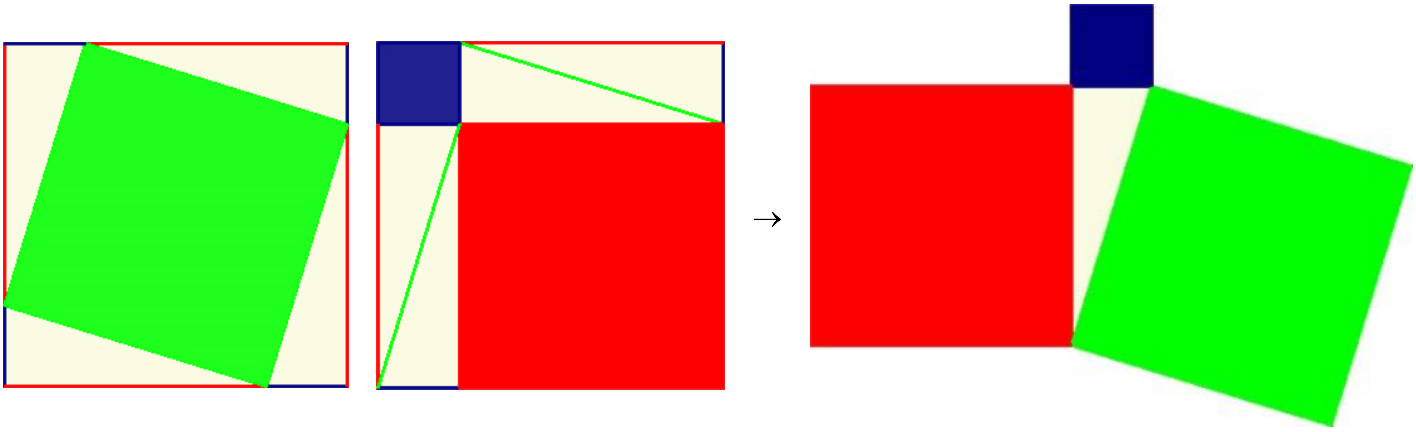
Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.

Hypoténuse vient du latin *hypotenusa* qui vient lui-même du grec *hupoteinousa* qui signifie « cele qui sous-tend ». Ce terme désigne le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit.
Les côtés adjacents à l'angle droits étaient appelés cathètes.

Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



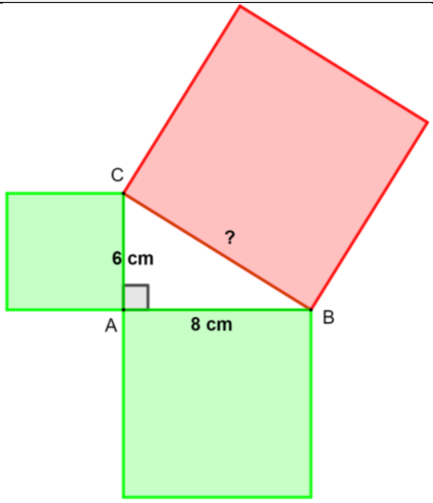
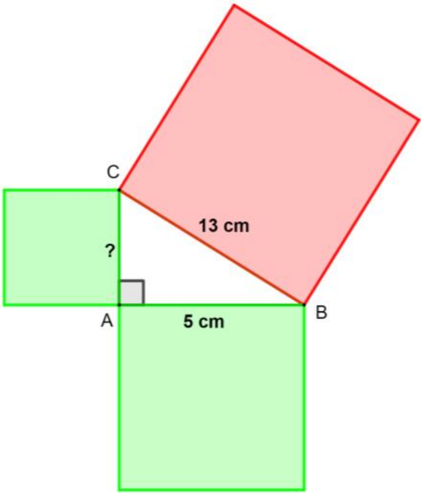
Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

⚠ ***Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.***

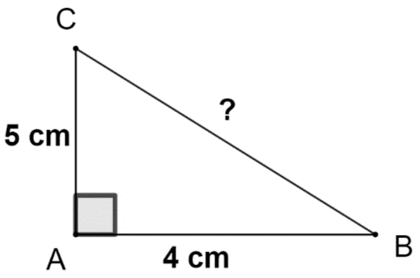
Le théorème d'Al Kashi est une extension de ce théorème de Pythagore dans les triangles quelconques.

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que • AB = 8 cm • AC = 6 cm Calcule BC.	Soit ABC un triangle rectangle en A tel que • AB = 5 cm • BC = 13 cm Calcule AC.
	
Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore $BC^2 = AC^2 + AB^2$ $BC^2 = 6^2 + 8^2$ $BC^2 = 36 + 64$ $BC^2 = 100$ BC = $\sqrt{100}$ = **10 cm**	Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $13^2 = 5^2 + AC^2$ $169 = 25 + AC^2$ $-25 \quad -25$ $144 = \quad AC^2$ AC = $\sqrt{144}$ = **12 cm**

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que AB = 4 cm et AC = 5 cm.
Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 5^2$
$BC^2 = 16 + 25$
$BC^2 = 41$
$BC = \sqrt{41} \approx 6,4$ cm

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	TI collège
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape		
6 x^2 + 8 x^2 EXE	6 ■ ^{2} + 8 ■ ^{2} EXE	6 x^2 + 8 x^2 =

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	TI collège
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape		
SECONDE x^2 100 EXE	$\sqrt{■}$ 100 EXE	SECONDE x^2 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 3 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm. *Quelle est la nature de ABC ?*	*Soit ABC un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 7 cm et AC = 6 cm.* *Quelle est la nature de ABC ?*
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté. AC^2 $= 5^2$ $= 25$ $AB^2 + BC^2$ $= 3^2 + 4^2$ $= 9 + 16$ $= 25$ Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, **ABC est rectangle en B** *(car [AC] est l'hypoténuse)*.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté. BC^2 $= 7^2$ $= 49$ $AB^2 + AC^2$ $= 5^2 + 6^2$ $= 25 + 36$ $= 61$ Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors **ABC n'est pas rectangle**.

II – RACINES CARREES (et racines cubiques hors programme en France mais nécessaire pour la poursuite en Suisse)

Remarque ♥

$2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$ $5^2 = 25$ $6^2 = 36$ $7^2 = 49$
$8^2 = 64$ $9^2 = 81$ $10^2 = 100$ $11^2 = 121$ $12^2 = 144$ $13^2 = 169$

$1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $4^3 = 64$ $5^3 = 125$
$6^3 = 216$ $7^3 = 343$ $8^3 = 512$ $9^3 = 729$ $10^3 = 1000$

Définitions

La *racine carrée* de *a* est le nombre **positif** noté $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a}^2 = a$

La *racine cubique* de *a* est le nombre noté $\sqrt[3]{a}$ tel que $\sqrt[3]{a}^3 = a$

Remarques sur la racine carrée

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow \blacksquare^2 \rightarrow & \\ 5 & & 25 \\ & \leftarrow \sqrt{\blacksquare} \leftarrow & \end{array}$$

$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{81} = 9$ $\sqrt{100} = 10$ $\sqrt{121} = 11$ $\sqrt{144} = 12$ $\sqrt{169} = 13$

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\sqrt{-1}$ n'existe pas

$\sqrt{-4}$ n'existe pas

Au lycée, une solution sera proposée pour ces racines carrées : les nombres complexes.

Remarques sur la racine cubique

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow \blacksquare^3 \rightarrow & \\ 5 & & 125 \\ & \leftarrow \sqrt[3]{\blacksquare} \leftarrow & \end{array}$$

$\sqrt[3]{1} = 1$ $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{216} = 6$ $\sqrt[3]{343} = 7$ $\sqrt[3]{512} = 8$ $\sqrt[3]{729} = 9$ $\sqrt[3]{1000} = 10$

$\sqrt[3]{-1} = -1$ $\sqrt[3]{-8} = -2$ $\sqrt[3]{-27} = -3$ $\sqrt[3]{-64} = -4$ $\sqrt[3]{-125} = -5$

$\sqrt[3]{-216} = -6$ ${}^{3-}\sqrt{343} = -7$ $\sqrt[3]{-512} = -8$ $\sqrt[3]{-729} = -9$ $\sqrt[3]{-1000} = -10$

Propriétés admises

Soient *a* et *b* deux nombres positif avec *b* non nul.

$$\sqrt{a}^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pour tous les nombres *a* et *b* avec *b* non nul.

$$\sqrt[3]{a}^3 = a$$

$$\sqrt{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Exemples de calculs

$$\sqrt{5}^2 = 5$$

$$\sqrt{3^2} = 3$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{1,2}^2 = 1,2$$

$$\sqrt{5,2^2} = 5,2$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt[3]{7}^3 = 7$$

$$\sqrt{11^3} = 11$$

$$\sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \times 20} = \sqrt[3]{1000} = 10$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt[3]{-8}^3 = -8$$

$$\sqrt{(-4)^3} = -4$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Définition

Simplifier une racine s'est transformer une racine en produit d'un entier par une racine d'un nombre dont la valeur abssolue est plus petite.

Astuce
Pour simplifier la racine d'un entier, il faut écrire l'entier sous la forme du produit d'un carré (ou cube) par un entier

Exemples de simplification de racines carrées

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \qquad \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3} \qquad \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 7\sqrt{50} - 4\sqrt{18} &= 7 \times \sqrt{25 \times 2} - 4 \times \sqrt{9 \times 2} = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 23\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exemples de simplification de racines cubiques

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4} \qquad \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

$$\begin{aligned} 11\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{-375} &= 11\sqrt[3]{8 \times 3} + 7\sqrt[3]{-125 \times 3} = 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + 7 \times \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{3} \\ &= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} + 7 \times (-5) \times \sqrt[3]{3} = 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3} = -13\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Remarques

Les racines doivent être simplifiées.
Les calculatrices simplifient automatiquement les racines carrées.

Exemple avec décomposition en produit de facteurs premiers

31104 = $2^7 \times 3^5$

$$\begin{aligned} \sqrt{31104} = \sqrt{2^7 \times 3^5} &= \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= 72\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{31104} &= \sqrt[3]{2^7 \times 3^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times 3 \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= 12\sqrt[3]{18} \end{aligned}$$

Exemple de la balle

On a lancé une balle en l’air.
Sur l’axe des abscisses se trouve le temps en secondes et sur l’axe des ordonnées se trouve la hauteur de la balle en mètres.

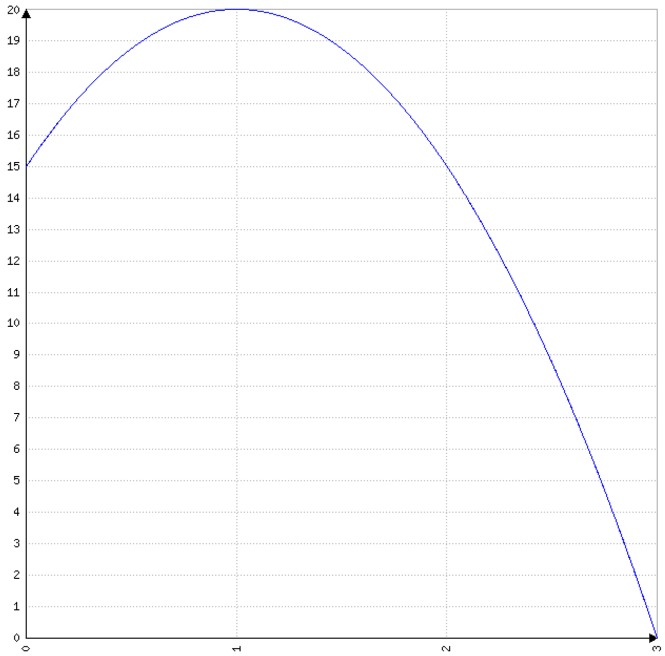
La hauteur de la balle dépend du temps ; on dit qu’on peut donner la hauteur de la balle en fonction du temps. On appelle x le temps et f la hauteur de la balle en fonction du temps. On dit qu’on peut exprimer f en fonction de x.

Après 0 seconde (au départ), la hauteur de la balle est de 15 m.
On dit que 15 est l’image de 0 par f et on note f(0) = 15, qui se lit *f de 0 égal 15*.

Après 1 seconde, la hauteur de la balle est à son maximum ; elle est de 20 m.
On dit que 20 est l’image de 1 par f et on note f(1) = 20.

Après 2 secondes, la hauteur de la balle est de 15 m.
On dit que 15 est l’image de 2 par f et on note f(2) = 15.

Après 3 secondes, la hauteur de la balle est de 0 m.
On dit que 0 est l’image de 3 par f et on note f(3) = 0.



On a déterminé (par un calcul de physique) que la hauteur en fonction du temps était donnée par la formule : $-5x^2 + 10x + 15$.

On notera :

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

ou

$$f : x \to -5x^2 + 10x + 15$$

On a vu qu’on pouvait lire l’image d’un nombre sur le graphique. Il est aisé de calculer cette image en utilisant la forme algébrique de la fonction.

Par exemple, on cherche la hauteur de la balle après 1,5 s. On va calculer f(1,5) :

$$f(1{,}5) = -5\times1{,}5^2 + 10\times1{,}5 + 15 = 18{,}75.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la hauteur de la balle après 1,5 s est de 18,75 m.

On a vu que la hauteur de la balle après 0 ou 2 secondes était la même (15 m). On dira que 0 et 2 secondes sont des antécédents de 15 m.
Le nombre 20 a un seul antécédent 1.
Le nombre 22 n’a pas d’antécédent car la balle n’est jamais montée jusqu’à 22 m.

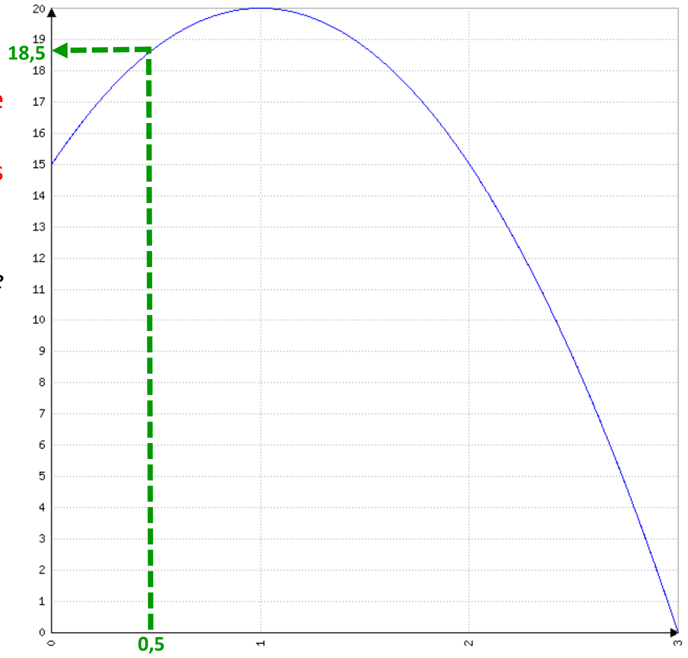
Remarque

Un nombre a toujours une et une seule image par une fonction.
Un nombre peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents par une fonction.

Comment déterminer l'image d'un nombre par une fonction ?

Par exemple, on cherche l'image de 0,5 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

1er cas : méthode graphique



On se positionne à 0,5 sur l'axe des abscisses.

On « monte » (ou « descend ») jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « part horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées et on lit la valeur.

On trouve ici que $f(0,5) \approx 18,5$.

Par lecture graphique, on trouve une valeur dont on ne sait pas si elle est exacte.

2ème cas : par le calcul

Il suffit de remplacer x par 0,5 dans la formule $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

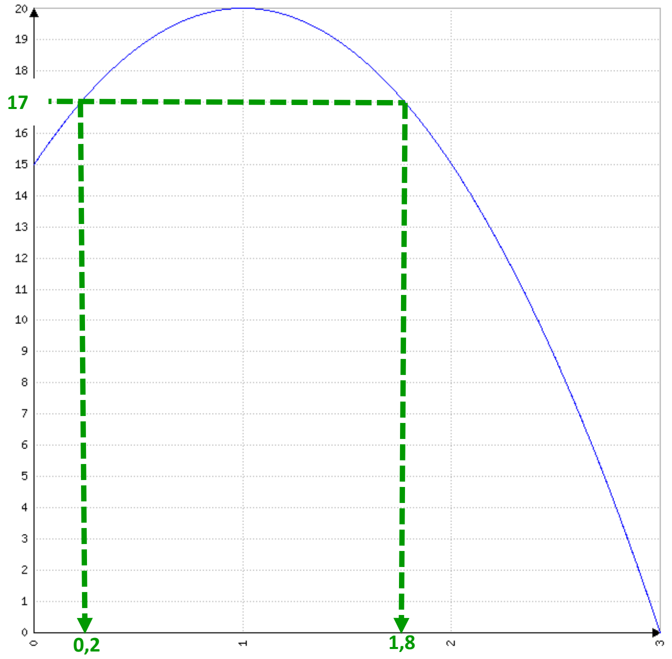
$f(0,5) = -5\times0,5^2 + 10\times0,5 + 15 = 18,75$.

On trouve une valeur exacte.

Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction ?

1er cas : méthode graphique

Par exemple, on cherche les antécédents de 17 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.



On se positionne à 17 sur l'axe des ordonnées.

On « part horizontalement » jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « monte » (ou descend) jusqu'à l'axe des abscisses et on lit les valeurs.

On trouve ici que les antécédents de 17 sont environ 0,2 et 1,8.
Par lecture graphique, on trouve des valeurs dont on ne sait pas si elles sont exactes.
Bien penser à chercher tous les antécédents.

2ème cas : par le calcul

Par exemple, on cherche les antécédents de 15 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

Il faut résoudre une équation. ***ATTENTION, ce n'est pas toujours possible***.
Au lycée, on verra comment trouver une valeur approchée avec la calculatrice graphique.

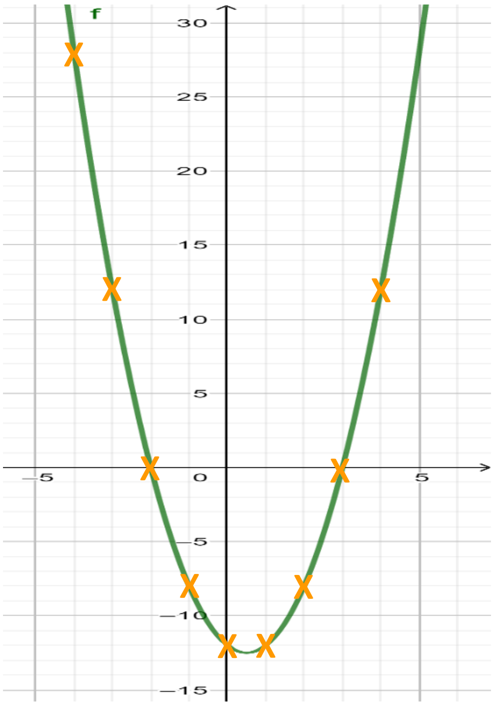
On cherche les nombres x tels que $f(x) = 15$
donc $-5x^2 + 10x + 15 = 15$
donc $-5x^2 + 10x = 0$
donc $x(-5x + 10) = 0$
Or « si un produit est nul, alors l'un, au moins, des facteurs est nul »
donc $x = 0$ ou $-5x + 10 = 0$
$-5x = -10$
$x = 2$

Les antécédents de 15 sont 0 et 2.

Comment construire la représentation graphique d’une fonction ?

1. On construit un « tableau de valeurs ».
2. On construit un repère et on place les points dans le repère.
3. On relie les points.

Attention, les points ne sont pas obligatoirement alignés ; il faut donc les relier en formant une courbe et non pas nécessairement une droite.



Exemple

On veut construire la représentation graphique de la fonction f définie par la formule f(x) = $2x^2 - 2x - 12$ pour x appartenant à l’intervalle [-4 ; 4]

On prend n’importe quels nombres.

En général, on prend les bornes de l’intervalle (ici, -4 et 4) et on place des valeurs régulièrement. Ici, le pas (l’écart entre deux nombres) est 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	28	12	0	-8	-12	-12	-8	0	12

On calcule les images de la première ligne avec la formule

f(x) = $2x^2 - 2x - 12$

Ce tableau de valeur peut être calculé avec la machine.

Sur la CASIO, taper

MODE 4 :table	*Place la calculatrice en mode tableau de valeur*
f(X)= $2X^2$ - 2X – 12 EXE	*On rentre la fonction en utilisant la touche X de la calculatrice.*
Début ? -4 EXE	*On rentre le point de départ du tableau de valeur.*
Fin ? 4 EXE	*On rentre le point d’arrivée du tableau de valeur.*
Pas ? 1 EXE	*On rentre le pas du tableau de valeur (l’écart entre deux nombres).*
	On obtient le tableau de valeur
MODE 1 :comp	*Pour revenir au mode « normal »*

PROPORTIONNALITE et HOMOTHETIES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

↓ × 1,52

Propriété admise

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad départ \xrightarrow{\times \frac{arrivée}{départ}} arrivée$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow{\overset{\times \frac{645}{5}}{\overset{\text{ou}}{\times 129}}} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.

2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5,1}{3} = 1,7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8,5}{5} = 1,7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11,9}{7} = 1,7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$$\frac{4,80}{3} = 1,6 \qquad \frac{8,00}{5} = 1,6 \qquad \frac{11,00}{7} \approx 1,57$$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$$\frac{12}{9} = \frac{4}{3} \qquad \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \qquad \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ Si $a \times d = b \times c$ alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\dfrac{65}{91}$ et $\dfrac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix :

$65 \times 161 = 10\,465$

et $91 \times 115 = 10\,465$

donc $65 \times 161 = 91 \times 115$ donc $\dfrac{65}{91} = \dfrac{115}{161}$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\dfrac{7}{13}$ et $\dfrac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix :

$7 \times 17 = 119$

et $13 \times 9 = 117$

donc $7 \times 17 \neq 13 \times 9$ donc $\dfrac{7}{13} \neq \dfrac{9}{17}$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\dfrac{5}{4} = \dfrac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$5 \times ? = 4 \times 7$ *On effectue les produits en croix*

$5 \times ? = 28$ *On simplifie chaque membre*

$? = 5{,}6$ *On divise par 5*

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$\dfrac{5}{4} = \dfrac{7}{a}$ $\dfrac{5}{4} = \dfrac{b}{3}$ $\dfrac{c}{4} = \dfrac{7}{2}$ $\dfrac{5}{d} = \dfrac{7}{3}$

$a = \dfrac{4 \times 7}{5} = 5{,}6$ $b = \dfrac{3 \times 5}{4} = 3{,}75$ $c = \dfrac{4 \times 7}{2} = 14$ $d = \dfrac{5 \times 3}{7} = \dfrac{15}{7}$

Exemple 5

Trouve le nombre manquant $\dfrac{6}{4} = \dfrac{5 + a}{a}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$6 \times a = 4 \times (5 + a)$ *On effectue les produits en croix*

$6a = 20 + 4a$ *On simplifie chaque membre*

$-4a$ $-4a$

$2a = 20$ *On isole les inconnues dans un membre*

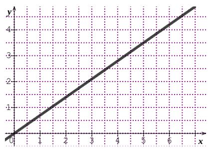
$a = 10$ *On divise les deux membres par 2*

Propriété – admise

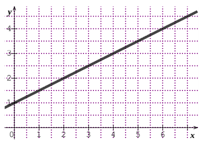
La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

- une droite
- qui passe par l'origine du repère

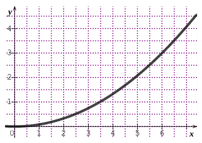
Exemples



Une droite qui passe par l'origine
Situation de proportionnalité



Une droite qui ne passe pas par l'origine



Pas une droite

Pas une situation de proportionnalité

II – Vitesse, distance et temps

3,4h ≠ 3h 40 min

$3,4\text{ h} = 3\text{h} + \underbrace{0,40\text{h} = 3\text{h } 24\text{min}}_{\times 60}$

3h 18min ≠ 3,18h

$3\text{h } 18\text{ min} = 3\text{h} + \underbrace{0,30\text{h} = 3,3\text{h}}_{\div 60}$

Conversions avec la calculatrice

Pour convertir 3,15h, je tape

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	Texas Instruments
3,15 EXE °’’’	3,15 EXE Format Sexagésimal	3,15 2nde π →DMS entrer

3,15 h = 3h 9min

Pour convertir 3h 12min, je tape

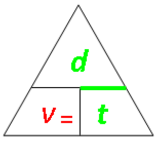
CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	Texas Instruments
3 °’’’ 12 °’’’ EXE °’’’	3 ↑ + 12 ↑ + EXE Format Décimal	3 2nde π ° 12 2nde π ′ entrer

3h 12min = 3,2h

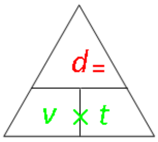
Propriétés admises

Si *d* est la distance, *t* le temps et *v* la vitesse moyenne on a alors

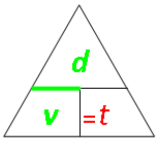
$v = \frac{d}{t}$



$d = v \times t$



$t = \frac{d}{v}$



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$$v = \frac{d}{t} = \frac{183}{3} = 61$$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

↓ ÷3

$$? = \frac{183 \times 1}{3} = 61$$

Sa vitesse moyenne est de $\boxed{61\text{ km/h}}$.

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

↓ ×3

$$? = \frac{43 \times 3}{1} = 129$$

La distance parcourue est $\boxed{129\text{ km}}$.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4,5} = \frac{8}{3}$$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

→ ÷ 4,5

$$? = 12 \div 4,5 = \frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$h = $\boxed{\text{2h 40min}}$.

Exemple 4 : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km = 135 000 m	1 h = 3 600 s
?	1 s

↓ ÷ 3 600

? = 135 000 ÷ 3 600 = 37,5

135 km/h = 37,5 m/s

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
? m = ? km	3 600 s = 1h

↓ × 3600

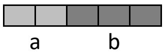
? = 15 × 3600 = 54 000 m = 54 km

15 m/s = 54 km/h

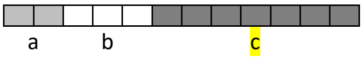
III – Ratios

Définitions

Deux nombres a et b sont dans le *ratio* 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$



Trois nombres a, b, c sont dans le *ratio* 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$



Exemple d'application 1

Les ingrédients de la pâte brisée sont dans le ratio 1 : 1 : 2

Cela signifie qu'il faut 1 part de beurre pour 1 part de sucre et 2 parts de farine.

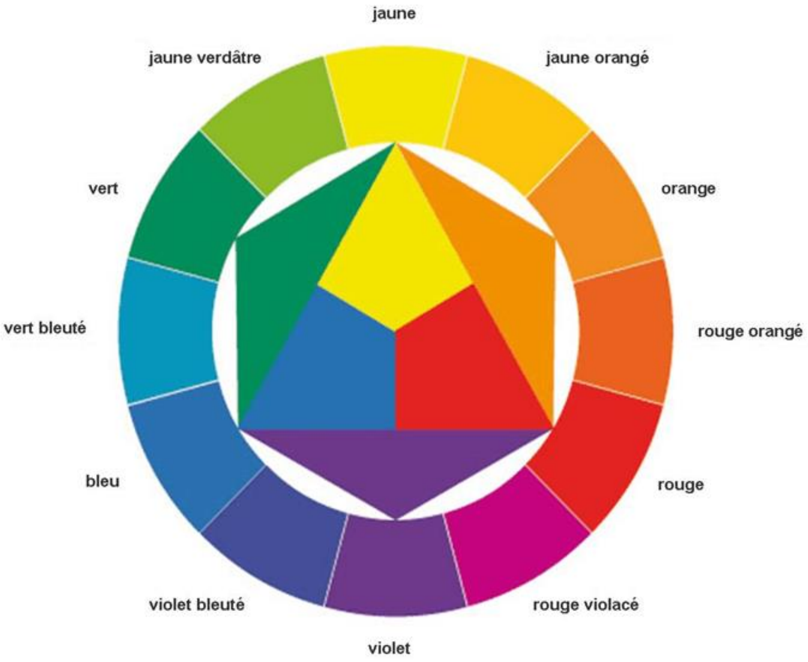
	Beurre	Sucre	Farine
	1 part	1 part	2 parts
Pour une pâte à tarte	125 g	125 g	250 g

Exemple d'application 2

Les couleurs secondaires (vert, orange et violet) sont dans le ratio 1:1. Par exemple, pour obtenir du vert, on prend 1 part de jaune et 1 part de bleu.

Pour obtenir le jaune verdâtre, on prend 1 part de vert et une part de jaune. On dit qu'il est dans le ratio 1:1 avec le vert et le jaune.

Pour obtenir le jaune verdâtre, on peut aussi pendre 1 part de bleu et 3 parts de jaune. On dit alors qu'il est dans la ration 1:3 avec le bleu et le jaune.



https://www.cours-de-peinture.net/technique-de-melange-en-peinture-acrylique/

Exemple d'application 3

Julien a rangé ses jouets dans des petites boites en carton.
Il a 3 boites de voitures et 4 boites de poupées.

On peut dire que ses jouets sont dans le ration 3:4 pour les voitures et les poupées.
Il y a $\frac{3}{7}$ de boites de voitures et $\frac{4}{7}$ de boites de poupées.

Voitures	Poupées	Total
3	4	7

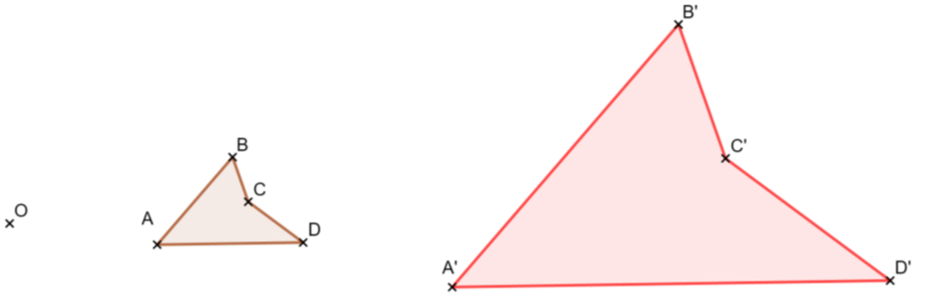
IV – Agrandissement/réduction - Homothéties

Définition

Le point A' est l'image du point A par l'*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

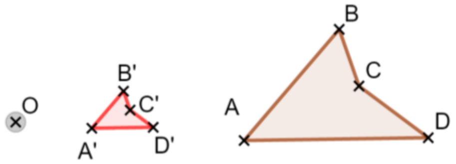
- A' ∈ (OA)
- OA' = k × OA

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'*agrandissement*.



Le quadrilatère A'B'C'D' est agrandissement de ABCD de centre O et de coefficient 3.

Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.

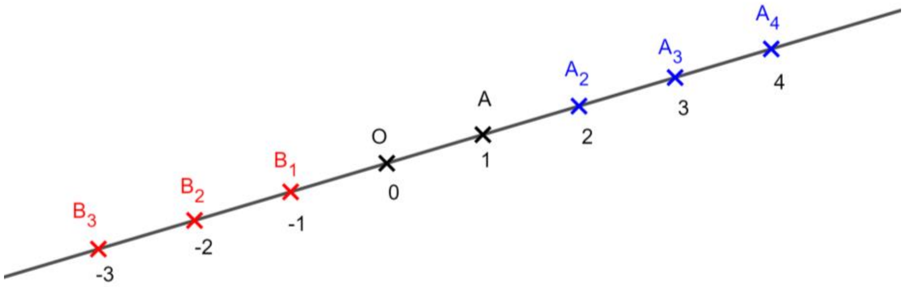


Le quadrilatère A'B'C'D' est la réduction de ABCD de centre O et de coefficient $\frac{1}{3}$.

Construction

Pour construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si k>0, tracer [OA) puis mesurer [OA] et placer A' sur [OA) tel que OA' = k × OA
- Si k<0, tracer [AO) puis mesurer [OA] et placer A' sur [AO) tel que OA' = (*valeur absolue de* k) × OA



- A_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d'agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l'année).

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu E'.
6. Tracer le segment [B'E'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

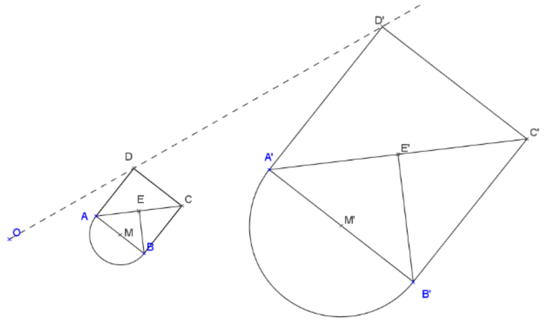


Image par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Caractériser

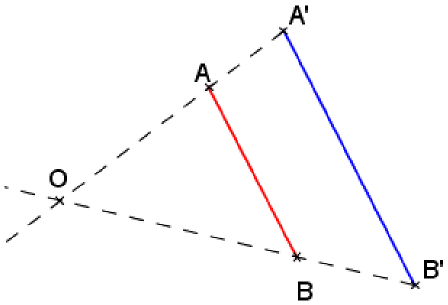
Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites [A'A) et [B'B) ; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer [OA] et [OA'].

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA\prime}{OA} = \frac{OB\prime}{OB}$.



Exemple

Les diviseurs de 45 sont : 1, 3, 5, 9, 15 et 45.

Définition

Un *diviseur commun* à deux nombres entiers est un nombre entier qui divise chacun d'eux.

Exemples

- 2 est un diviseur commun à 6 et à 10
- Les diviseurs de 12 sont : **1** ; **2** ; **3** ; 4 ; **6** et 12.
  Les diviseurs de 18 sont : **1** ; **2** ; **3** ; **6** ; 9 et 18.
  Donc les diviseurs communs à 12 et 18 sont **1** ; **2** ; **3** et **6**.

Définition

Le plus grand des nombres parmi les diviseurs communs à plusieurs nombres entiers est appelé le *plus grand diviseur commun*, noté *PGCD*.

Exemple

Le PGCD de 12 et 18 est 6.
On note : **PGCD (12 ; 18) = 6**.

Définition

Le plus petit des multiples à plusieurs nombres entiers est appelé le *plus petit multiple commun*, noté *PPCM*.

Exemple

Les multiples de 15 sont 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 …
Les multiples de 20 sont 20 ; 40 ; 60 ; 80 ; 100 …
Le plus petit multiple commun à 15 et 20 est 60
On note : **PPCM (15 ; 20) = 60**.

Remarque

C'est ce que l'on a intérêt à faire lorsque l'on cherche un dénominateur commun lors de l'addition (ou la soustraction de deux fractions).

Exemple

$$\frac{\mathbf{7\times4}}{\mathbf{15\times4}}+\frac{\mathbf{11\times3}}{\mathbf{20\times3}}=\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{60}}+\frac{\mathbf{33}}{\mathbf{60}}=\frac{\mathbf{61}}{\mathbf{60}}$$

Comment trouver le PGCD et le PPCM de deux entiers ?

Par exemple, je veux calculer le PGCD et le PPCM de 1620 et 4704.

Je décompose 1620

1620	
810	2
405	2
135	3
45	3
15	3
5	3
1	5

1620 = $2^2 \times 3^4 \times 5$

Je décompose 4704

4704	
2352	2
1176	2
588	2
294	2
147	2
49	3
7	7
1	7

4704 = $2^5 \times 3 \times 7^2$

Je décompose les 2 nombres en produits de facteurs premiers.
Voir la page 8.

1620 = **2** × **2** × **3** × 3 × 3 × 3 × 5
4704 = **2** × **2** × 2 × 2 × 2 × **3** × 7 × 7
PGCD (1620 ; 4704) = **2** × **2** × **3** = **12**

Pour calculer le PGCD, j'écris la décomposition sous la forme d'un produit sans puissances.
Je cherche tout ce qui est commun.
J'écris le produit de tous les facteurs communs et j'obtiens le PGCD.

1620 = $2^2 \times 3^4 \times 5$
4704 = $2^5 \times 3 \times 7^2$
PPCM (1620 ; 4704) = $2^5 \times 3^4 \times 5 \times 7^2$ = **635 040**

Pour calculer le PPCM, j'écris les nombres sous la forme du produit de puissances.
J'écris tous les facteurs des décompositions avec la plus forte puissance puis j'effectue le produit ; j'obtiens le PPCM.

Définitions

Deux nombres entiers sont dits *premiers entre eux* si leur PGCD vaut 1.

Une fraction est dite *irréductible* si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux (donc si leur PGCD vaut 1).

Exemples

- Comme PGCD (233 ; 377) = 1 alors 233 et 377 sont premiers entre eux donc $\frac{233}{377}$ est irréductible.
- Comme PGCD (42 ; 75) = 3 alors 42 et 75 ne sont pas premiers entre eux donc $\frac{75}{42}$ est réductible (on peut la simplifier).

Comment rendre une fraction irréductible ?

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ que l'on veut rendre irréductible.

Si PGCD (a ; b) = 1 alors $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Si PGCD (a ; b) ≠ 1 alors on divise le numérateur et le dénominateur de la fraction par ce PGCD et on obtient une fraction irréductible.

Exemples

- $\frac{180}{170} = \frac{18}{17}$ est irréductible car on a divisé le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur PGCD, qui est ici 10.
- $\frac{180 \div 10}{170 \div 10} = \frac{18}{17}$
- $\frac{307}{315}$ est irréductible car PGCD (307 ; 315) = 1

Propriété - admise

Les diviseurs communs à deux entiers sont les diviseurs de leur PGCD.

Exemples

- Comme PGCD (1000 ; 750) = 250 alors les diviseurs communs à 1000 et 750 sont les diviseurs de 250, ce sont donc 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50 ; 125 ; 250.
- Comme PGCD (233 ; 373) = 1 alors 233 et 373 n'ont que 1 comme diviseur commun.

Comment déterminer ce que l'on trouve lorsque l'on a un diviseur commun ou le PGCD ?

Lorsqu'il s'agit d'un mélange, le PGCD est le nombre de paquets.

Lorsqu'il ne s'agit pas d'un mélange, le PGCD est le nombre d'objets dans un paquet.

Exemple

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">Enoncés</td><td colspan="2">Jacques dispose de 144 billes et 40 soldats de plomb. Il veut tout donner à ses copains de telle sorte que chaque copain ait …</td></tr>
<tr><td>le même nombre d'objets de chaque sorte.
Combien a-t-il de copains au maximum et que recevront-ils ?</td><td>le même nombre d'objets : soit des billes, soit des soldats.
Que recevra au maximum chaque personne et combien a-t-il de copains ?</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Réponses</td><td>Pourquoi un diviseur commun ?</td><td>Comme il veut utiliser toutes les billes et tous les soldats de plomb et comme chacun recevra la même chose, alors le nombre de copains est un diviseur commun à 144 et 40.</td><td>Comme il veut utiliser toutes les billes et tous les soldats de plomb et comme chacun recevra le même nombre d'objets, alors le nombre d'objets reçus est un diviseur commun à 144 et 40.</td></tr>
<tr><td>Pourquoi le plus grand ?</td><td>Comme il veut partager en un maximum de copains, alors le nombre de copains est le PGCD de 144 et 40.</td><td>Comme il veut que chacun ait le maximum d'objets, alors le nombre d'objets reçus est le PGCD de 144 et 40.</td></tr>
<tr><td>Calcul du PGCD</td><td colspan="2">
<table>
<tr><th colspan="2">Je décompose 144</th><th colspan="2">Je décompose 40</th></tr>
<tr><td>144</td><td></td><td>40</td><td></td></tr>
<tr><td>72</td><td>2</td><td>20</td><td>2</td></tr>
<tr><td>36</td><td>2</td><td>10</td><td>2</td></tr>
<tr><td>18</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>9</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
</table>
144 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 40 = 2 × 2 × 2 × 5
PGCD (144 ; 40) = 2 × 2 × 2 = 8</td></tr>
<tr><td>Phrase réponse</td><td>Il a 8 copains et chacun aura 144÷8 = 18 billes et 40÷8 = 5 soldats.</td><td>Chacun recevra 8 objets.
Il y aura 144÷8 = 18 copains qui auront 8 billes et 40÷8 = 5 copains qui auront 8 soldats.</td></tr>
</table>

<u>PGCD avec la calculatrice ou sur l'ordinateur</u>

Pour calculer le PGCD d 18 et 12, je tape

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	TI COLLEGE PLUS
SECONDE CALC 18 SECONDE 3 12) EXE	CATALOG puis Calcul numérique puis PGCD EXE 18 ; 12)	maths 1 18 2nde , 12) entrer

Théorème de THALES

Rappel

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad \textit{départ} \xrightarrow{\times \frac{\textit{arrivée}}{\textit{départ}}} \textit{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow{\substack{\times \frac{645}{5} \\ \text{ou} \\ \times 129}} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

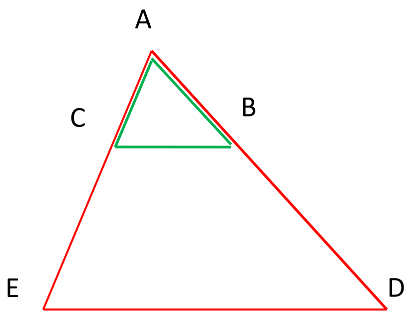
Soit ABC un triangle.

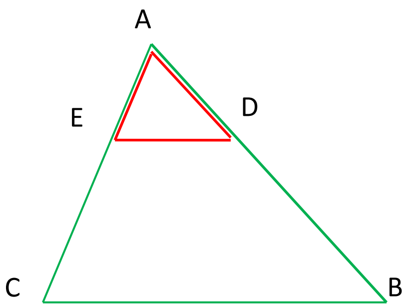
Si D∈(AB) et E∈(AC) et (BC)//(DE) alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

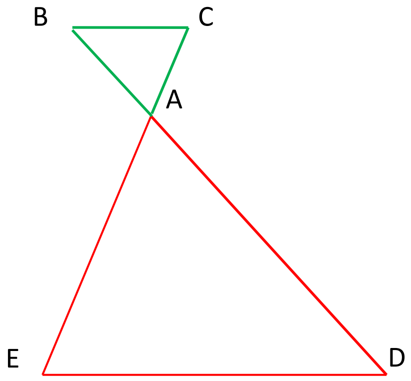
Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si D∈(AB) et E∈(AC) tels que (BC)//(DE) alors $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ $\quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$







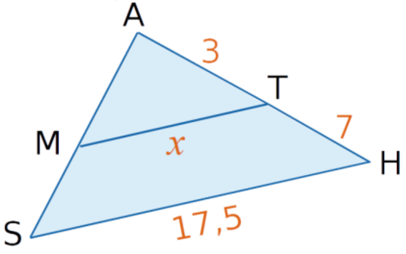
"Démonstration"

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

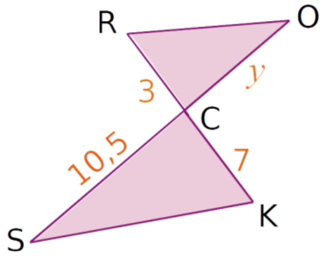
Exemples

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.



(MT)//(SH)



(RO)//(SK)

Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme (MT)//(HS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{AM}{AS} = \frac{x}{17{,}5}$$

$$x = \frac{3 \times 17{,}5}{10} = 5{,}25 \text{ cm}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme (RO)//(KS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CR}{CK} = \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{y}{10{,}5} = \frac{RO}{SK}$$

$$y = \frac{3 \times 10{,}5}{7} = 4{,}5 \text{ cm}$$

Propriété réciproque de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

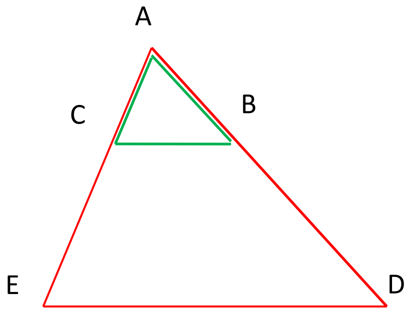
alors **(BC)//(DE)**

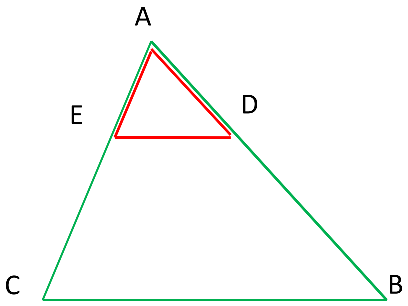
Propriété contraposée de Thalès - admise

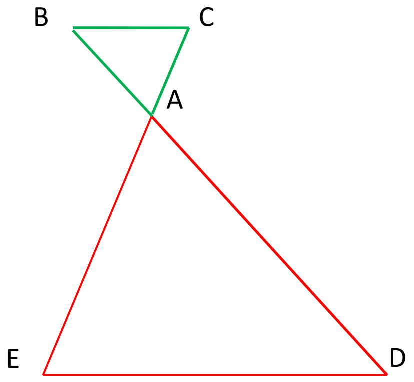
Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD}\neq\frac{AC}{AE}$

alors **(BC) et (DE) ne sont pas parallèles**

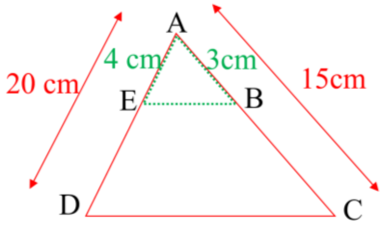


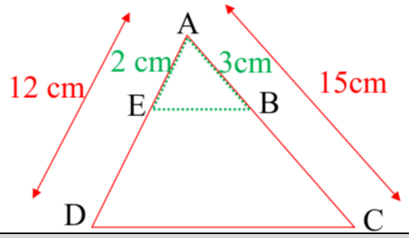




Exemples

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.





Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$. On calcule séparément ces deux rapports

$\mathbf{\frac{AB}{AC}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}}$

$\frac{AE}{AD}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

donc $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE)//(CD).

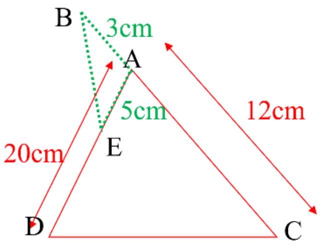
$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

$\frac{AE}{AD}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

donc $\frac{AB}{AC}\neq\frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.



On a : $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

On a aussi : $\frac{AE}{AD}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Donc $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA) sans appartenir à [DA].

DOUBLE DISTRIBUTIVITE – IDENTITES REMARQUABLES

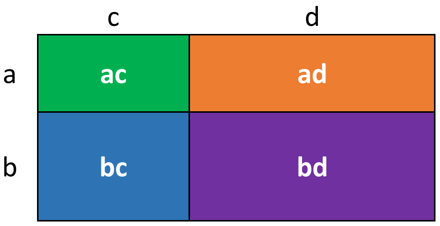
I – Double distributivité

Propriété double distributivité

$$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration

$$(a + b)\,(c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = ac + ad + bc + bd$$



	c	d
a	**ac**	**ad**
b	**bc**	**bd**

Exemples

$(x + 3)\,(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$

$(x + 5)\,(x - 4) = x^2 - 4x + 5x - 20 = x^2 + x - 20$

$(x - 4)\,(x - 6) = x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$

$(x + 2)\,(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

$(x - 8)\,(x + 3) = x^2 + 3x - 8x - 24 = x^2 - 5x - 24$

$(2x + 3)\,(3x + 7) = 6x^2 + 14x + 9x + 21 = 6x^2 + 23x + 21$

Exemples complexes

$(x + 5)\,(x + 4) + (x + 2)\,(x + 9) = x^2 + 4x + 5x + 20 + x^2 + 9x + 2x + 18 = 2x^2 + 20x + 38$

$(x + 5)\,(x - 4) + (x - 2)\,(x - 9) = x^2 - 4x + 5x - 20 + x^2 - 9x - 2x + 18 = 2x^2 - 10x - 2$

$$\begin{aligned}(x + 3)\,(x - 2) + 5\,(x - 6)\,(x + 7) = x^2 - 2x + 3x - 6 + 5 \times (x^2 + 7x - 6x - 42) &= x^2 + x - 6 + 5x^2 + 35x - 42x - 210\\ &= 6x^2 - 6x - 216\end{aligned}$$

$(x - 2)\,(x - 3) - (x - 5)\,(x + 4) = x^2 - 3x - 2x + 6 - (x^2 + 4x - 5x - 20) = x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 4x + 5x + 20 = - 4x + 26$

$$\begin{aligned}(2x + 7)\,(3x - 4) - 8\,(x + 2)\,(x - 5) &= 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8 \times (x^2 - 5x + 2x - 10)\\ &= 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8x^2 + 40x - 16x + 80\\ &= -2x^2 + 37x + 52\end{aligned}$$

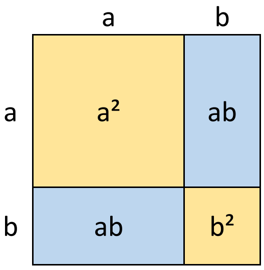
II – Identités remarquables

Propriété $1^{\text{ère}}$ identité remarquable

♥ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Démonstration

$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$



	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

Exemples

$\mathbf{(x+3)^2} = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 \mathbf{= x^2 + 6x + 9}$

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

♥ $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$

$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$(3x + 7)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2 = 9x^2 + 42x + 49$

⚠ **Attention**

Dans la réponse, il y a la somme des deux carrés mais il ne faut pas oublier le double

Propriété $2^{\text{ème}}$ identité remarquable

♥ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Démonstration

$(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemples

$(x - 5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

♥ $(a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$

$(x - 8)^2 = x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2 = x^2 - 16x + 64$

$(5x - 4)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 4 + 4^2 = 25x^2 - 40x + 16$

Propriété 3ème identité remarquable

❤ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Démonstration

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Exemples

$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

❤ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(x + 8)(x - 8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$

$(5x + 4)(5x - 4) = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$

$(t - 7)(t + 7) = t^2 - 7^2 = t^2 - 49$

PROBABILITES

Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.

Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

Nombre de piles	Nombre de faces	Total
4 374	4 626	9 000

Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\textbf{Fréquence de A} = \frac{\textbf{Effectif de A}}{\textbf{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est $\frac{4\,374}{9\,000} \approx 0,486$ et la fréquence de « Face » est $\frac{4\,626}{9\,000} \approx 0,514$.

Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$0,486 = \frac{48,6}{100}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline \text{Pile} & 4\,374 & ? \\ \hline \text{Total} & 9\,000 & 100 \\ \hline \end{array}$ $? = \frac{4\,374\ \times}{9\,000}$ $? = \frac{4\,374 \times 100}{9\,000} \approx 48,6$	$\textbf{Fréquence de A en } \% = \frac{\textbf{Effectif de A}}{\textbf{Effectif total}} \times 100$ $\textbf{Fréquence de "pile" en } \% = \frac{4\,374}{9\,000} \times 100 \approx 48,6$

La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%.

Définitions

Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{2}$ et que la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{2}$.

On notera p(Pile) = $\frac{1}{2}$ et p(Face) = $\frac{1}{2}$.

p comme probabilité

Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

Nombre de tirages	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	1000000
Nombre de "Pile"	2	23	46	240	494	2470	4908	24853	49914	500 557
Fréquence de "Pile" en %	20	46	46	48	49,4	49,4	49,08	49,706	49,914	50, 0557
Ecart avec la probabilité	30	4	4	2	0,6	0,6	0,92	0,294	0,086	0,0557

Exemple des dés

On tire deux dés et on effectue leur somme.

Les issues possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

On a répété de nombreuses fois l'expérience en 3$^{\text{ème}}$.

Voici les résultats de l'expérience :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif	73	156	223	335	410	445	367	288	208	182	101	2788
Fréquence en %	2,62 %	5,60 %	8,00 %	12,02 %	14,71 %	15,96 %	13,16 %	10,33 %	7,46 %	6,53 %	3,62 %	100 %

Les issues n'apparaissent pas avec la même fréquence.

Le premier dé a 6 issues possibles et le second aussi. Au total, il y a 6×6 issues possibles pour la somme ... mais certaines sont identiques :

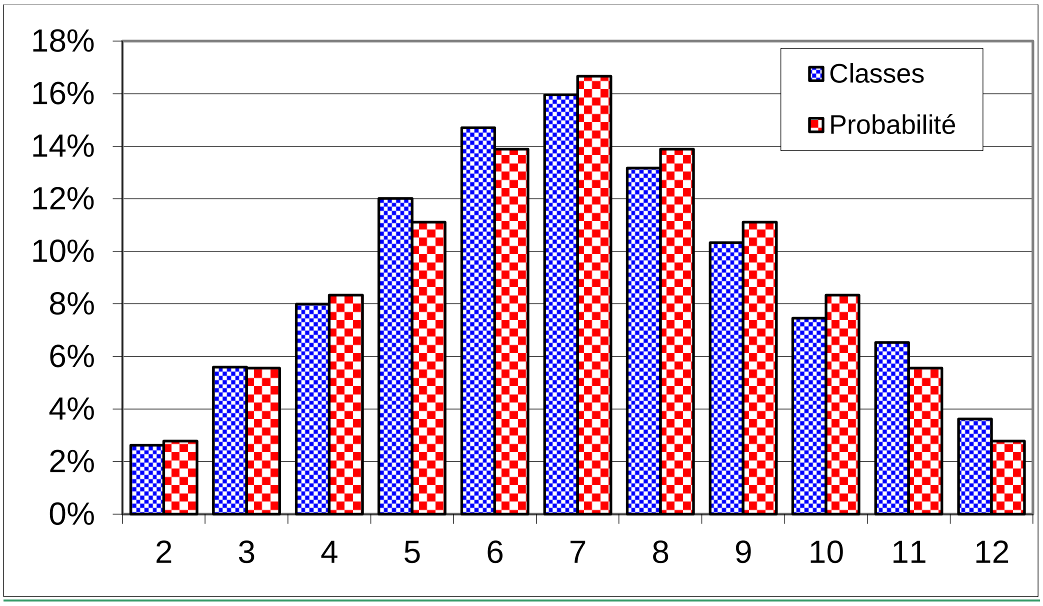
$p(2) = p(12) = 1/36 \approx 2{,}8\%$ $p(3) = p(11) = 2/36 \approx 5{,}6\%$

$p(4) = p(10) = 3/36 \approx 8{,}3\ \%$ $p(5) = p(9) = 4/36 \approx 11{,}1\%$

$p(6) = p(8) = 5/36 \approx 13{,}9\ \%$ $p(7) = 6/36 \approx 16{,}7\%$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Somme	Issues possibles dé rouge + dé vert	Nombre d'issues possibles	Probabilité
2	1+1	1	$1/36 \approx 2{,}8\%$
3	1+2=2+1	2	$2/36 \approx 5{,}6\%$
4	1+3=2+2=3+1	3	$3/36 \approx 8{,}3\ \%$
5	1+4=2+3=3+2=4+1	4	$4/36 \approx 11{,}1\%$
6	1+5=2+4=3+3=4+2=5+1	5	$5/36 \approx 13{,}9\%$
7	1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1	6	$6/36 \approx 16{,}7\%$
8	2+6=3+5=4+4=5+3=6+2	5	$5/36 \approx 13{,}9\%$
9	3+6=4+5=5+4=6+3	4	$4/36 \approx 11{,}1\%$
10	4+6=5+5=6+4	3	$3/36 \approx 8{,}3\%$
11	5+6=6+5	2	$2/36 \approx 5{,}6\%$
12	6+6	1	$1/36 \approx 2{,}8\%$
Total		36	1



Propriété admise

La somme des probabilités de toutes les issues possibles est toujours 1.

Définitions

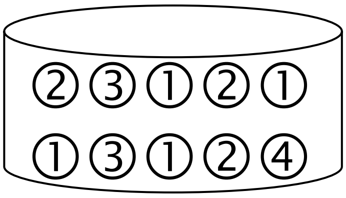
Un *événement* est constitué d'une (ou plusieurs) issue(s) d'une expérience aléatoire ; on dit qu'une de ces issues réalise l'évènement.

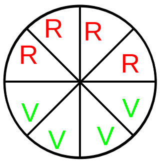
Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple des dés

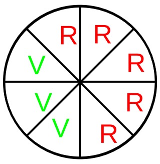
- Soit A l'événement "on obtient un résultat strictement inférieur à 5".
  Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 3 et 4.
  p(A) = $\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ *On ajoute les probabilités car les issues sont incompatibles.*
- Soit B l'événement "on obtient un nombre pair".
  Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 4, 6, 8, 10 et 12.
  p(B) = $\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$
- Soit C l'événement "on obtient un nombre impair".
  Les issues qui réalisent cet événement sont 3, 5, 7, 9 et 11
  p(C) = $\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

Exemple d'expérience à deux épreuves





roue A



roue B

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 4.

On tire une boule au hasard et on lit la valeur de la boule.

Si la boule est paire, on tourne la roue A ; si la boule est impaire, on tourne la roue B. Les roues sont colorées en rouge et vert.

Dans l'urne, les issues possibles sont 1, 2, 3 ou 4.

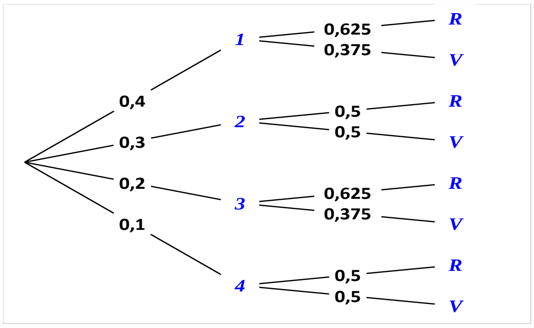
Valeur de la boule	1	2	3	4	Total
Effectif	4	3	2	1	10

On a p(1) = $\frac{4}{10}$ = 0,4 et p(2) = $\frac{3}{10}$ = 0,3 et p(3) = $\frac{2}{10}$ = 0,2 et p(4) = $\frac{1}{10}$ = 0,1.

Sur la roue A, on a p(R) = $\frac{4}{8}$ = 0,5 et p(V) = $\frac{4}{8}$ = 0,5.

Sur la roue B, on a p(R) = $\frac{5}{8}$ = 0,625 et p(V) = $\frac{3}{8}$ = 0,375.

On peut représenter l'ensemble de ces résultats par un arbre :



Définitions

Deux événements sont dits *contraires* si la somme de leur probabilité vaut 1.

Le contraire de l'événement A est noté $\overline{\mathbf{A}}$.

L'événement contraire de « il pleut » est « il ne pleut pas »

Un événement est dit *certain* si sa probabilité vaut 1.

Exemple de l'expérience à deux épreuves

Soit A l'évènement "obtenir 1 et rouge".
p(A) = 0,4 × 0,625 = 0,25

Soit B l'évènement "obtenir 2 et rouge".
p(B) = 0,3 × 0,5 = 0,15

Soit C l'évènement "obtenir 3 et rouge".
p(C) = 0,2 × 0,625 = 0,125

Soit D l'évènement "obtenir 4 et rouge".
p(D) = 0,1 × 0,5 = 0,05

Comme A, B, C et D sont incompatibles *(voir plus bas)*, alors p(R) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D),
donc p(R) = 0,25 + 0,15 + 0,125 + 0,05 = 0,575.

Soit V l'événement "obtenir vert".

V et R sont contraires donc V = $\overline{\mathbf{R}}$

donc p(V) = p($\overline{\mathbf{R}}$) = 1 - p(R) = 1 - 0,575 = 0,425

Exemple du jeu de cartes

- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ? un roi
- Soit C l'événement "tirer un cœur". Soit R l'événement "tirer un roi".

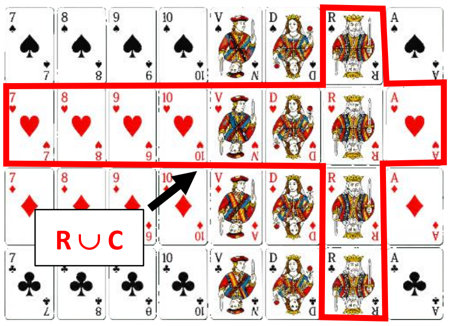
p(C) = $\mathbf{\frac{8}{32}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

p(R) = $\mathbf{\frac{4}{32}} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

Définitions

L'événement "A et B", noté **A ∩ B** et qui se lit « A inter B », est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.

L'événement "A ou B", noté **A ∪ B** et qui se lit « A union B », est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



Exemple du jeu de cartes

L'événement R∩C signifie « Tirer un roi et un cœur » ; il est vérifié pour une issue : le roi de cœur.

L'événement R∪C signifie « Tirer un roi ou un cœur » ; il est vérifié pour plusieurs issues : le roi de cœur mais aussi tous les cœurs et aussi tous les rois.

En comptant les cartes, on trouve $\mathbf{p(R\cap C)} = \mathbf{\frac{1}{32}}$ et $\mathbf{p(R\cup C)} = \mathbf{\frac{11}{32}}$

Propriété admise

Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors : $\mathbf{p(A\cup B) = p(B) + p(A) - p(A\cap B)}$

Définition

On dit que deux événements A et B sont incompatibles si A ∩ B = ∅, ou ∅ signifie « ensemble vide » ce qui veut dire qu'aucune issue vérifie l'appartenance à A et à B en même temps.

Propriété admise

Si deux événements A et B sont incompatibles alors

$\underline{\mathbf{p(A\cup B) = p(B) + p(A)}}$

Exemple du jeu de cartes

$\mathbf{p(C\cup R) = p(C) + p(R) - p(C\cap R)} = \mathbf{\frac{8}{32}} + \mathbf{\frac{4}{32}} - \mathbf{\frac{1}{32}}\,\mathbf{\frac{11}{32}}$

Soit T : « tirer un trèfle »

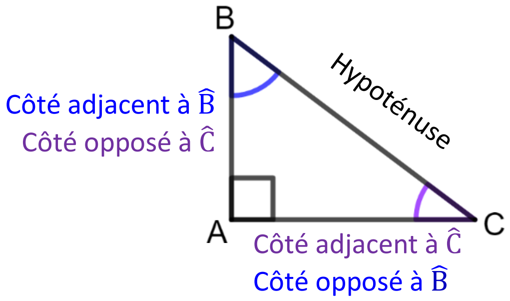
On ne peut pas tirer une carte qui soit un cœur et un trèfle en même temps donc C ∩ T = ∅ donc cœur et trèfle sont incompatibles.

$$p(C\cup T) = p(C) + p(T) = \frac{8}{32} + \frac{8}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

Triangles rectangles : TRIGONOMETRIE

Premier temps : le mathématicien indien Âryabhata (VI^{e} siècle) utilise le mot jîva qui signifie corde.
Deuxième temps : le mathématicien arabe Al-Fazzârî (VIII^{e} siècle) arabise ce mot en jîba, mot n'ayant pas de signification en arabe.
Troisième temps : Gérard de Crémone (XII^{e} siècle) confond jîba avec jaîb, d'autant plus facilement qu'en arabe, les voyelles sont parfois omises ; or jaîb signifie « poche, cavité » et il le traduit naturellement en latin par sinus...
Quant au cosinus, c'est tout simplement le sinus du complémentaire (de l'angle) ; « co- » vient du latin cum, qui signifie « avec ».
La tangente, elle, vient de ce qu'elle mesure une portion d'une tangente au cercle trigonométrique.

Définitions



Préliminaire

Dans un triangle rectangle, les rapports suivants ne dépendent que de la mesure de l'angle et non de celles des côtés :

- Côté adjacent à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé sur côté adjacent du même angle aigu.

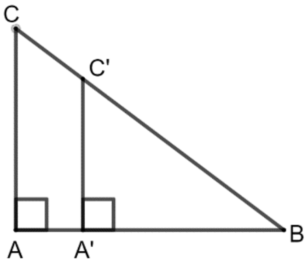
On les appelle respectivement cosinus, sinus et tangente de l'angle aigu.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC)//(A'C').

Comme (AC)//(A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathbf{BA'}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mathbf{BC'}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}}$$



BA' × BC = BC' × BA

÷BC' ÷BC ÷BC' ÷BC

donc $\frac{\mathbf{BA'}}{\mathbf{BC'}} = \frac{\mathbf{BA}}{\mathbf{BC}}$ = cosinus de l'angle $\widehat{B}$

BC' × AC = BC × A'C'

÷BC' ÷BC ÷BC ÷BC'

donc $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{BC'}}$ = sinus de l'angle $\widehat{B}$

BA' × AC = BA × A'C'

÷BA' ÷BA ÷BA ÷BA'

donc $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{BA'}}$ = tangente de l'angle $\widehat{B}$

Propriété

Dans un triangle rectangle :

- Le cosinus d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.
- Le sinus d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
- La tangente d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par son côté adjacent.

⚠ **Comment** se rappeler des formules ?

Méthode 1 : ♥ **SOH CAH TOA** Sin = Opposé / Hypoténuse Cos = Adjacent / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

Méthode 2 : ♥ **CAH SOH TOA** Cos = Adjacent / Hypoténuse Sin = Opposé / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

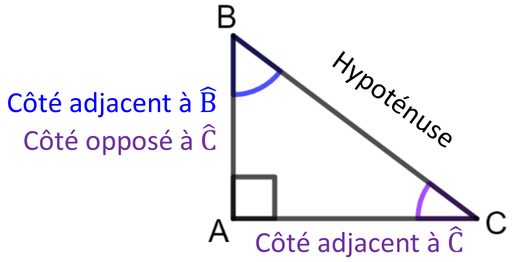
Méthode 3 :

♥ **COS ADJ HYP**	♥ **SIN OPP HYP**	♥ **TANG OPPADJ**
COSinus = ADJacent / HYPoténuse	SINus = OPPosé / HYPoténuse	TANGente = OPPosé / ADJacent

Formules

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} \qquad \sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} \qquad \tan(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB}$$

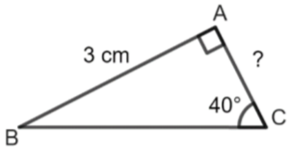
$$\cos(\widehat{C}) = \frac{AC}{BC} \qquad \sin(\widehat{C}) = \frac{AB}{BC} \qquad \tan(\widehat{C}) = \frac{AB}{AC}$$



Exemple de recherche d'un côté

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et $\widehat{ACB}$ = 40°.
Calcule AC ; *donne une valeur approchée au centième près.*



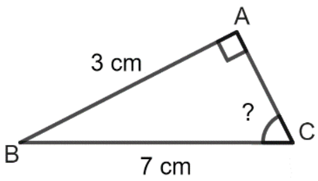
Réponse

Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connait : • $\widehat{C}$ • AB : opposé On cherche : • AC : adjacent	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
La formule doit contenir opposé et adjacent ; on va utiliser la tangente	On cherche la formule qui comprend ces informations.
$\tan(\widehat{C}) = \frac{AB}{AC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\tan(40°) = \frac{3}{AC}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\tan(40°)}{1} = \frac{3}{AC}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$AC = \frac{3 \times 1}{\tan(40°)} \approx 3{,}58\ \text{cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

Exemple de recherche d'un angle

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et $BC = 7$ cm.
Calcule $\widehat{C}$; *donne une valeur approchée au degré près.*



Réponse

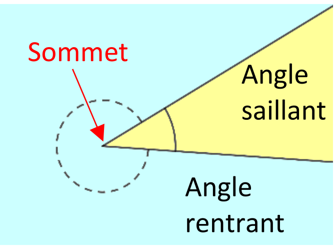
Dans ABC rectangle en A $\sin(\widehat{C}) = \frac{AB}{BC}$ $sin(\widehat{C}) = \frac{3}{7}$ $\widehat{C} = \arcsin\left(\frac{3}{7}\right) \approx 25°$	On cherche : • $\widehat{C}$ On connait : • BC : hypoténuse • AB : opposé La formule doit contenir opposé et hypoténuse ; on va utiliser le sinus

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92 et **CASIO FX92 classwiz**	
Pour calculer $\frac{3\times1}{\tan(40°)}$, je tape	Pour calculer $\arcsin\left(\frac{3}{7}\right)$, **je tape**
⊟ 3 ⊠ 1 ▼ tan 40) EXE	SHIFT sin 3 ÷ 7) EXE

ANGLES, TRIANGLES SEMBLABLES, DROITES DU TRIANGLE et PARALLELOGRAMMES

I - Angles



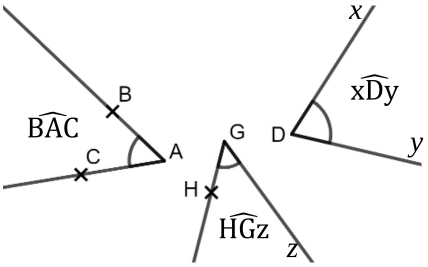
Définition

Un angle est une portion de droite délimité par deux demi-droites de même origine.

Le point d'intersection des demi-droites est appelé le *sommet* de l'angle.

On définit, alors, même deux angles : un *angle rentrant* et un *angle saillant*.

Notation



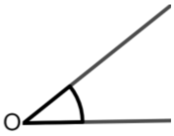
Pour nommer un angle, on prend une lettre sur chacune des demi-droites que l'on écrit de chaque côté de la lettre représentant le sommet de l'angle. On ajoute un chapeau pour signifier que c'est un angle *et non un triangle*.

On peut aussi prendre la lettre en minuscule qui représente la demi-droite.

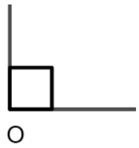
Dans le cas où il n'y a pas plusieurs angles, on peut juste noter le sommet : $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{G}}$ ou $\widehat{\mathrm{D}}$.

Définitions

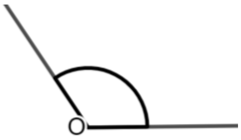
Angle nul



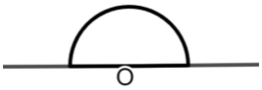
Angle aigu



Angle droit



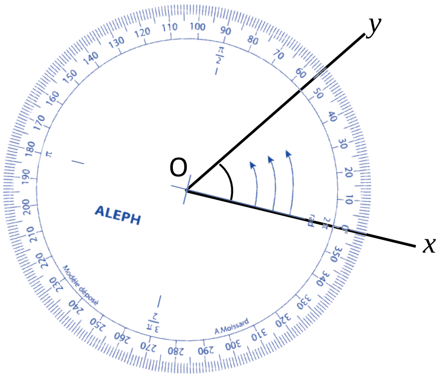
Angle obtus



Angle plat

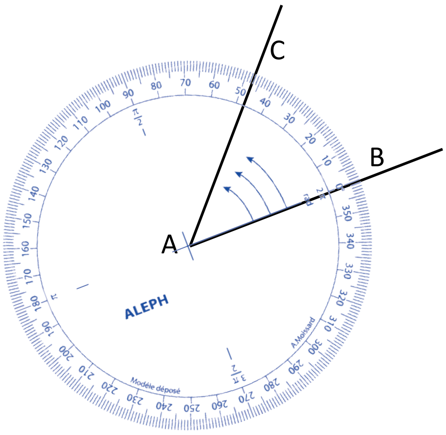
Comment mesurer un angle ?

1. On positionne le centre du rapporteur (*la croix*) sur le sommet de l'angle (*ici le point O*).
2. On tourne le rapporteur de telles sorte que le 0 de la graduation du rapporteur passe sur une des demi-droites formant l'angle, *en veillant à ce que l'angle soit bien du côté des 3 flèches du rapporteur*.
3. On lit sur quelle graduation du rapporteur passe la seconde demi-droites (*ici 55*).
4. On obtient $\widehat{xOy} = 55°$



Comment construire un angle de mesure donnée ?

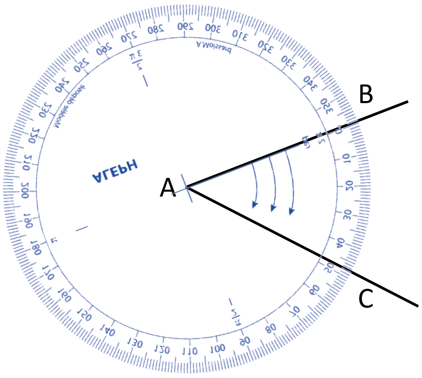
Par exemple, construire l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}} = 48°$



1. *Le somment de l'angle est A* ; construire la demi-droite [AB)

2. Placer le centre du rapporteur sur A et le 0 de la graduation sur la demi-droite [AB). *On peut placer le rapporteur à l'endroit ou à l'envers selon le « côté » où on veut construire l'angle.*

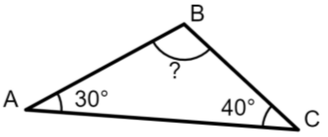
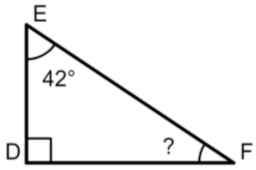
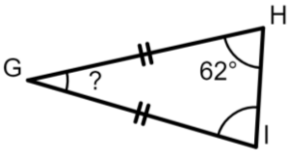
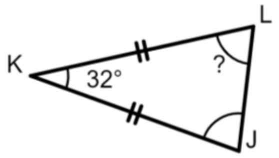
3. Placer le petit C sur la graduation 48 puis tracer la demi-droite [AC)



Propriété admise

Dans un triangle, la somme des mesures des angles vaut 180°.

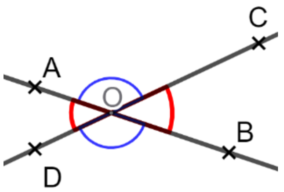
Exemples d'exercices résolus

			
Dans ABC, on a : $\widehat{B} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{C})$ $\widehat{B} = 180 - (30 + 40)$ $\widehat{B} = \mathbf{110}°$	Dans DEF, on a : $\widehat{F} = 180 - (\widehat{D} + \widehat{E})$ $\widehat{F} = 180 - (90 + 42)$ $\widehat{F} = \mathbf{48}°$	Comme GHI est isocèle en G, alors $\widehat{H} = \widehat{I} = 62°$ Dans GHI, on a : $\widehat{G} = 180 - (\widehat{H} + \widehat{I})$ $\widehat{F} = 180 - (62 + 62)$ $\widehat{F} = \mathbf{56}°$	Comme JKL est isocèle en K, alors $\widehat{J} = \widehat{L}$ Dans JKL, on a : $\widehat{J} + \widehat{K} + \widehat{L} = 180$ $\widehat{J} + 32 + \widehat{J} = 180$ -32 -32 $2\widehat{J} = 148$ ÷ 2 ÷ 2 $\widehat{J} = \mathbf{74}°$

Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites sécantes en O.

Les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$ sont dits *opposés par le sommet*.



Propriété admise

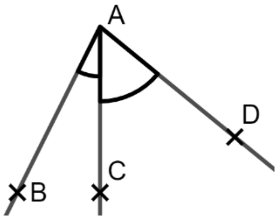
Des angles opposés par le sommet sont égaux.

Exemple

$\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ et $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$

Définition

Deux angles ayant une demi-droite en commun sont dit *adjacents*.

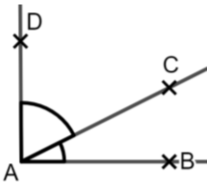


Exemple

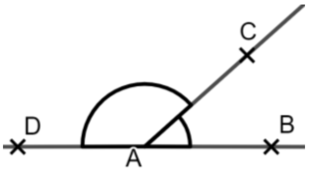
$\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont adjacents et $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$

Définitions

Deux angles adjacents dont la somme des mesures vaut 90° sont dits *complémentaires*



Deux angles adjacents dont la somme des mesures vaut 180° sont dits *supplémentaires*

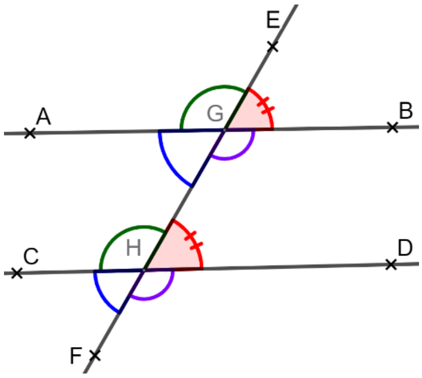


Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites *; ces deux droites forment une "bande"*.

Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).

Les angles $\widehat{EGB}$ et $\widehat{EHD}$ sont dits *correspondants*



Propriétés admises

Si (AB)//(CD) alors $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$

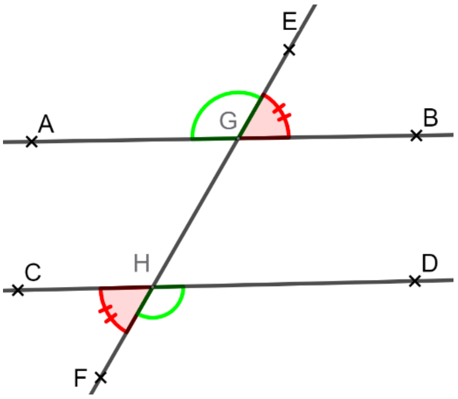
Si $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$ alors (AB)//(CD)

Exemple ci-contre

Si (AB)//(CD) on a : $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$ et $\widehat{EGA} = \widehat{EHA}$ et $\widehat{FHC} = \widehat{FGA}$ et $\widehat{FGB} = \widehat{FHD}$

Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites *; ces deux droites forment une "bande"*.
Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).
Les angles $\widehat{EGB}$ et $\widehat{CHF}$ sont dits *alternes externes*



Propriétés admises

Si (AB)//(CD) alors $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$

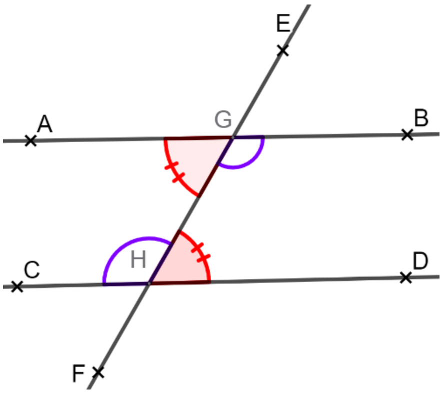
Si $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$ alors (AB)//(CD)

Exemple ci-contre

Si (AB)//(CD) on a : $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$ et $\widehat{EGA} = \widehat{FHD}$

Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites *; ces deux droites forment une "bande"*.
Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).
Les angles $\widehat{AGF}$ et $\widehat{EHD}$ sont dits *alternes internes*



Propriétés admises

Si (AB)//(CD) alors $\widehat{AGB} = \widehat{EHD}$

Si $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$ alors (AB)//(CD)

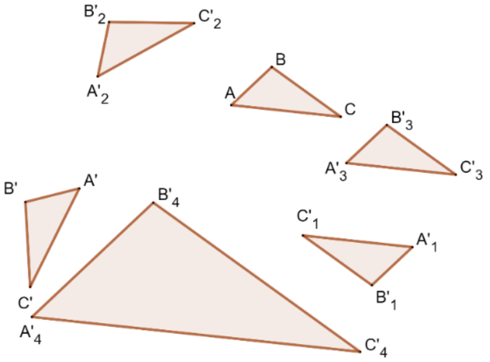
Exemple ci-contre

Si (AB)//(CD) on a : $\widehat{AGB} = \widehat{EHD}$ et $\widehat{FGB} = \widehat{EHC}$

II – Triangles semblables

Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.



Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

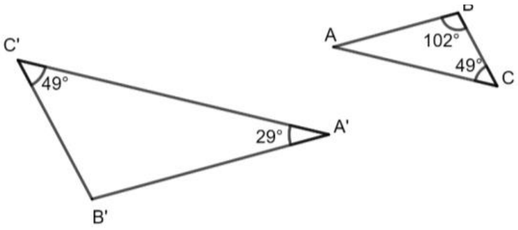
- si leurs côtés sont proportionnels

ou

- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.



Exemple 1 : avec des angles

Dans le triangle ABC, on a

$$\widehat{A} = 180 - \left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = 180 - (102 + 49) = 29°.$$

Dans le triangle A'B'C', on a

$$\widehat{B}' = 180 - \left(\widehat{A}' + \widehat{C}'\right) = 180 - (49 + 29) = 102°.$$

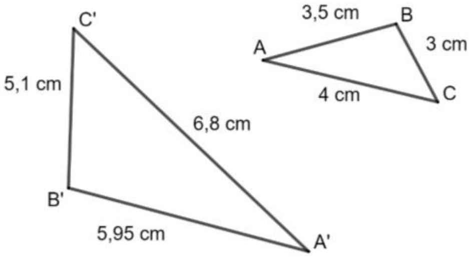
On a donc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Exemple 2 : avec des côtés proportionnels

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{5,95}{3,5} = 1,7 \quad \Bigg| \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{6,8}{4} = 1,7 \quad \Bigg| \quad \frac{C'B'}{CB} = \frac{5,1}{3} = 1,7$$

Donc $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{C'B'}{CB}$

donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.



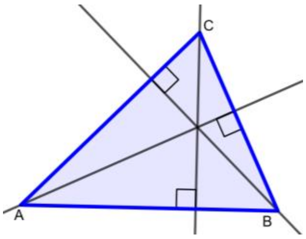
III – Droites du triangle

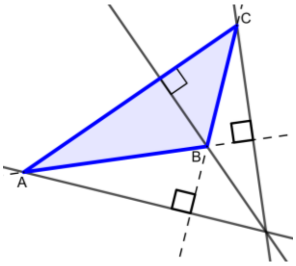
A. Hauteurs

Définition

La *hauteur* d’un triangle est la droite issue d’un sommet qui est perpendiculaire au support du côté opposé.

Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à (BC).





Propriété admise

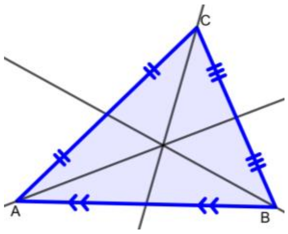
Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé *orthocentre du triangle*.

B. Médianes

Définition

La *médiane* d’un triangle est la droite issue d’un sommet qui passe par le milieu du côté opposé.

Dans le triangle ABC, la médiane issue de A est la droite qui passe par A et par le milieu de [BC].



Propriété admise

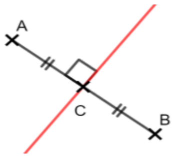
Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre de gravité du triangle*.

C. Médiatrices

Définition

La *médiatrice* d’un segment est la droite qui passe par le milieu d’un segment ET qui est perpendiculaire au support de ce segment.

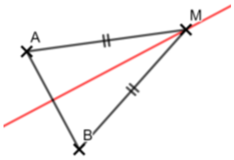
La médiatrice du segment [AB] est la droite qui passe par le milieu de [AB] et qui est perpendiculaire à (AB).



Propriétés admises

Si un point est sur la médiatrice d’un segment alors il est équidistant (même distance) des extrémités de ce segment.

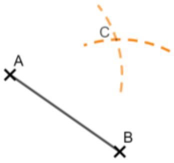
Si M est sur la médiatrice de [AB] alors MA = MB.



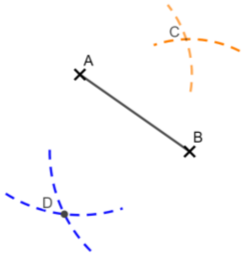
Si un point est équidistant (même distance) des extrémités d’un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Si MA = MB alors M est sur la médiatrice de [AB].

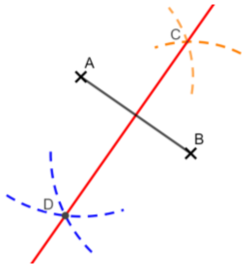
Construction de la médiatrice du segment [AB]



Tracer deux arcs de cercle de même rayon et de centres A et B.
Ils se coupent en C.



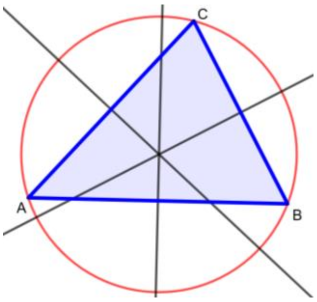
Tracer deux autres arcs de cercle de même rayon et de centres A et B.
Ils se coupent en D.

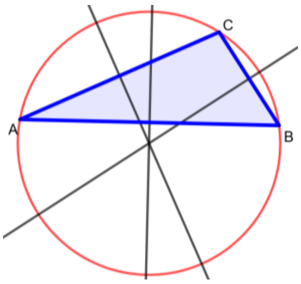


La médiatrice de [AB] est la droite (CD).

Propriété admise

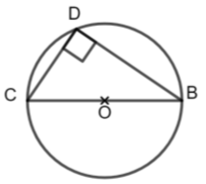
Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle circonscrit au triangle*.





Propriétés admises

Si un triangle a ses 3 sommets sur un cercle et a un côté qui est un diamètre du cercle alors ce triangle est rectangle.



Si un triangle est rectangle alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

D. Bissectrices

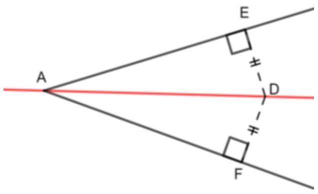
Définition

La *bissectrice* d'un angle est une droite qui partage l'angle en 2 angles de même mesure.

Propriétés admises

Si un point est sur la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des demi-droites format cet angle.

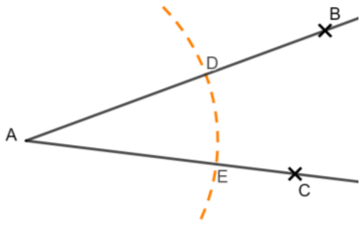
Si D est sur la bissectrice de $\widehat{\mathrm{EAD}}$ alors DE = DF.



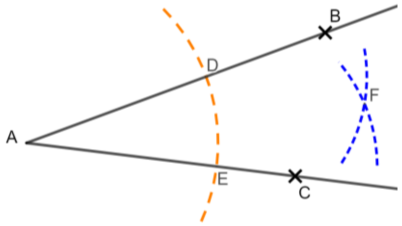
Si un point est équidistant des demi-droites formant un angle il est sur la bissectrice de cet angle.

Si DE = DF alors D est sur la bissectrice de $\widehat{\mathrm{EAD}}$.

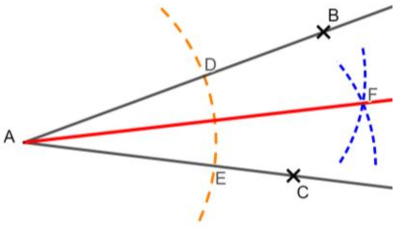
Construction de la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathbf{BAC}}$



Trace un cercle de centre A ; il coupe [AB] et [AC] en D et E.



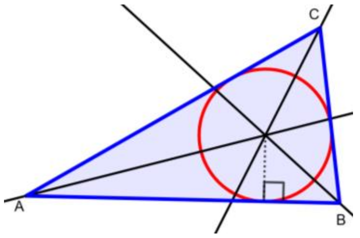
Trace 2 cercles de même rayon et de centres D et E ; ils se coupent en F.



La bissectrice de $\widehat{\mathbf{BAC}}$ est la droite (AF)

Propriété admise

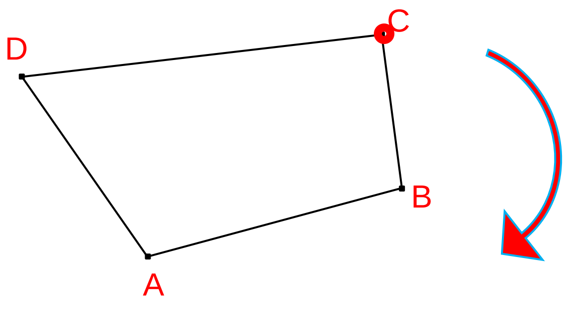
Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle inscrit*.



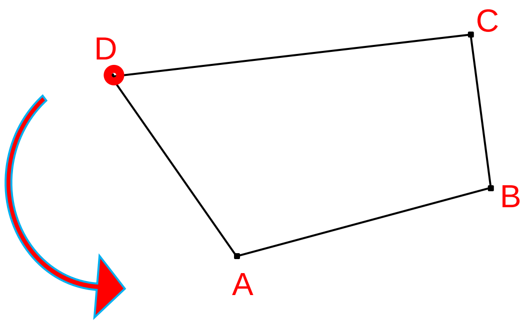
IV – Quadrilatères

Rappel

Pour nommer une figure, on choisit un point de départ et un sens de rotation.



Le quadrilatère est CBAD.



Le quadrilatère est DABC.

Propriété admise

Dans un quadrilatère, la somme des mesures des angles vaut 360°.

Définitions et propriétés

FACTORISER, équations produits, équations $x^2 = a$

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Développer, c'est transformer un produit en une somme.

Exemples

Développer	Développer	Développer
$(x + 3)\,(x + 2) = x^2 + 5x + 6$	$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$	$(x + 5) \times (x - 5) = x^2 - 25$
Factoriser	Factoriser	Factoriser

Remarque

Il est toujours possible de développer, mais il n'est pas toujours possible de factoriser.

Comment factoriser en reconnaissant un facteur commun ?	Exemple
On coupe l'expression en « blocs » séparés par les additions et les soustractions. On ne coupe pas en 2 une parenthèse.	$\underbrace{5x} + \underbrace{3x}$
On reconnait (ou on fait apparaitre) un facteur commun dans une expression. On peut souligner le facteur commun.	$= 5\times\underline{x} + 3\times\underline{x}$
On isole ce facteur commun en utilisant la propriété de simple distributivité : $k\times a + k\times b = k\times (a + b)$. Dans la parenthèse on place alors tout ce qui n'a pas été souligné.	$= x\times (5 + 3)$ $= 8x$

Exemples

$5x^2 - 3x + 2xy = \underbrace{5\,\underline{x}\,x} - \underbrace{3\,\underline{x}} + \underbrace{2\,\underline{x}\,y} = x\,(5x - 3 + 2y)$

$\underline{(5x + 3)}\,(2x - 7) + \underline{(5x + 3)}\,(4x + 5)$	$\underline{(7x - 2)}\,(2x - 7) - (5x + 4)\,\underline{(7x - 2)}$
$= (5x + 3)\,[(2x - 7) + (4x + 5)]$	$= (7x - 2)\,[(2x - 7) - (5x + 4)]$
$= (5x + 3)\,[2x - 7 + 4x + 5]$	$= (7x - 2)\,[2x - 7 - 5x - 4]$
$= (5x + 3)\,(6x - 2)$	$= (7x - 2)\,(-3x - 11)$
$\underline{(3x + 4)}\,(5x - 2) + 7\,\underline{(3x + 4)}\,(4x + 5)$	$\underline{(3x + 4)}\,(5x - 2) - 7\,\underline{(3x + 4)}\,(4x + 5)$
$= (3x + 4)\,[(5x - 2) + 7\,(4x + 5)]$	$= (3x + 4)\,[(5x - 2) - 7\,(4x + 5)]$
$= (3x + 4)\,[5x - 2 + 28x + 35]$	$= (3x + 4)\,[5x - 2 - 28x - 35]$
$= (3x + 4)\,(33x + 33)$	$= (3x + 4)\,(-23x - 37)$

Exemple complexe

$(3x + 5)\,(x - 2) + 3\,(5x - 10)$ ↓ $5x - 10 = \underline{5}\times x - \underline{5}\times 2 = \underline{5}\,(x - 2)$

$= (3x + 5)\,\underline{(x - 2)} + 3 \times 5\,\underline{(x - 2)}$

$= (x - 2)\,[(3x + 5) + 3 \times 5]$

$= (x - 2)\,[3x + 5 + 15]$

$= (x - 2)\,(3x + 20)$

Remarque

Si on ne trouve pas de facteur commun, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant une différence de 2 carrés ?

1. On transforme, si possible, l'expression en une différence de deux carrés.
2. On factorise en utilisant la propriété $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

Exemples

$x^2 - 9 \;=\; x^2 - 3^2 = (x + 3)\,(x - 3)$

$ a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)\,(2x - 5)$

$(3x + 5)^2 - 49 = (3x + 5)^2 - 7^2 = [(3x + 5) + 7]\,[(3x + 5) - 7] = [3x + 5 + 7]\,[3x + 5 - 7] = (3x + 12)\,(3x - 2)$

$(3x + 5)^2 - (7x - 6)^2 = [(3x + 5) + (7x - 6)]\,[(3x + 5) - (7x - 6)] = [3x + 5 + 7x - 6]\,[3x + 5 - 7x + 6] = (10x - 1)\,(-4x + 11)$

Remarque

Si on ne trouve pas de différence de deux carrés, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant le développement de la 1^{ère} ou 2^{ème} identité remarquable ?

1. On identifie l'identité remarquable.
2. On identifie les deux « carrés ».
3. On vérifie que le double produit est le bon.
4. On factorise en utilisant une des propriétés : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ *ou* $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemple

On veut factoriser $x^2 + 6x + 9$.

Il y a trois termes et cela ressemble au développement de la première identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2$.
On identifie x^2 et 9 comme les carrés de x et 3.
On calcule $2 \times x \times 3 = 6x$ et on reconnait le morceau non choisi de l'expression.
On conclue : $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

Exemples

$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

x^2 est le carré de x
25 est le carré de 5
Il y a un « + » devant le double produit.
On vérifie que $2\times x\times 5$ est bien égal au troisième terme $10x$

$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$

x^2 est le carré de x
49 est le carré de 7
Il y a un « - » devant le double produit.
On vérifie que $2\times x\times 7$ est bien égal au troisième terme : $14x$

$16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$

Remarque

On veut factoriser $x^2 + 7x + 49$
x^2 et 49 sont les carrés de x et 7
On calcule $2 \times x \times 7 = 14x$. On ne trouve pas $7x$
On ne peut pas factoriser $x^2 + 7x + 49$ avec cette méthode.

Propriété équation produit - admise

♥ Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Exemple

On veut résoudre l'équation (2x + 5) (5x - 3) = 0

$(2x + 5)\ (5x - 3) = 0$
Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

$$\begin{array}{ll|ll} 2x + 5 & = 0 & 5x - 3 & = 0 \\ 2x & = -5 & 5x & = 3 \\ x & = -2{,}5 & x & = 0{,}6 \end{array}$$

Si $x = -2{,}5$ alors $(2x + 5)\ (5x - 3)$
$= (2\times(-2{,}5) + 5) \times (5\times(-2{,}5) - 3)$
$= 0$
Si $x = 0{,}6$ alors $(2x + 5)\ (5x - 3)$
$= (2\times0{,}6 + 5) \times (5\times0{,}6 - 3)$
$= 0$
Les solutions de l'équation sont -2,5 et 0,6.
On peut aussi écrire : $S = \{-2{,}5\ ;0{,}6\}$

On réécrit l'équation

On cite la propriété

On résout séparément les équations.
Bien laisser le trait vertical.

On vérifie en testant si les nombres trouvés sont solution de l'équation

On conclue par une phrase

Remarques

Pour utiliser cette propriété, il faut que l'on ait un produit.
Pour cela, il peut être nécessaire de factoriser l'expression ; c'est même le principal intérêt de la factorisation.

Propriété

L'équation $x^2 = a$ admet :

- aucune solution si $a < 0$.
- une seule solution si $a = 0$; la solution est 0.
- deux solutions si $a > 0$; les solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration

Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré ne peut pas être négatif.

Si $a > 0$ on a alors : $a = \sqrt{a}^2$

L'équation $x^2 = a$ devient $x^2 = \sqrt{a}^2$ soit $x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$ soit $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$

Or « un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul »,

$$\begin{array}{l|l} x + \sqrt{a} = 0 & x - \sqrt{a} = 0 \\ x = -\sqrt{a} & x = \sqrt{a} \end{array}$$

Exemples

L'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution car $-4 < 0$.

L'équation $x^2 = 0$ a une seule solution 0.

L'équation $x^2 = 64$ a deux solutions : $\sqrt{64}$ et $-\sqrt{64}$ soit 8 et -8.

L'équation $x^2 = 11$ a deux solutions : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$.

Exemple complexe

Résoudre l'équation $(x + 3)^2 = 7$.

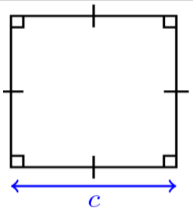
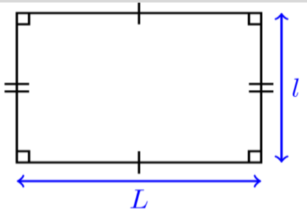
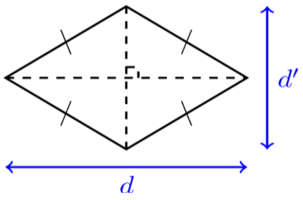
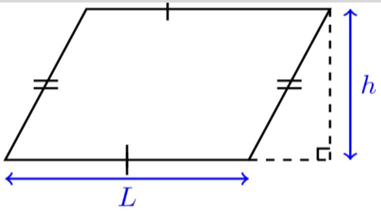
$$(x + 3)^2 = 7$$

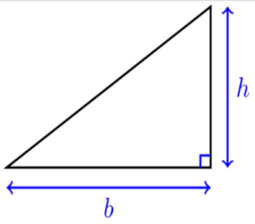
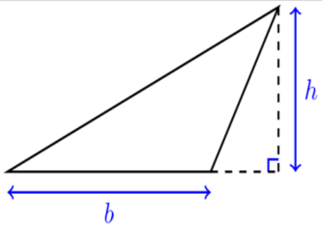
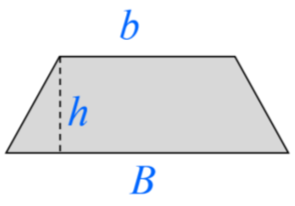
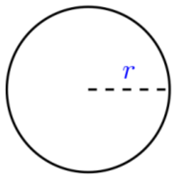
$$\begin{array}{l|l} x + 3 = \sqrt{7} & x + 3 = -\sqrt{7} \\ x = -3 + \sqrt{7} & x = -3 - \sqrt{7} \end{array}$$

Les solutions sont $-3 + \sqrt{7}$ et $-3 - \sqrt{7}$

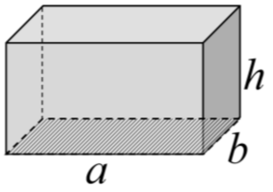
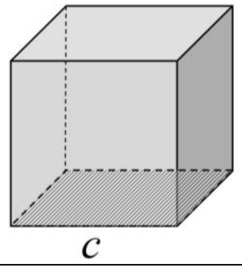
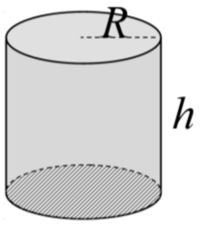
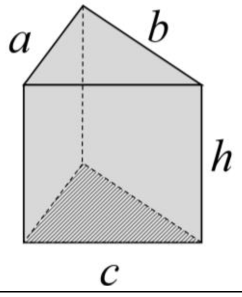
SOLIDES, agrandissement/réduction

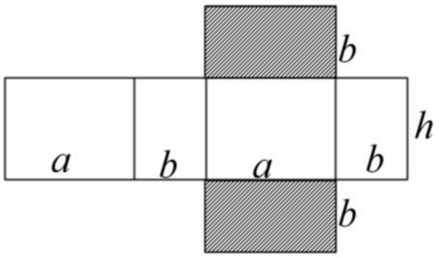
I – Rappel sur les aires

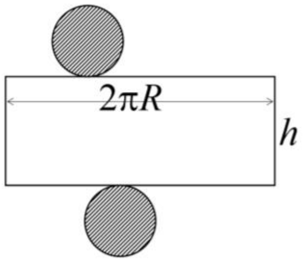
Carré	Rectangle	Losange	Parallélogramme
 $A = c^2$	 $A = L \times l$	 $A = d \times d' \div 2$	 $A = b \times h$

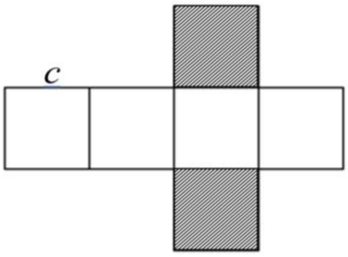
Triangle rectangle	Triangle quelconque	Trapèze	Disque
			
$A = \frac{b \times h}{2}$		$A = \frac{(b + B) \times h}{2}$	$A = \pi \times r^2$

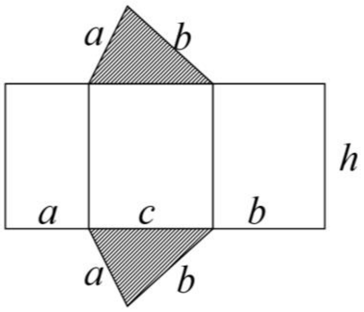
II – La famille des prismes

Parallélépipède rectangle Pavé droit	Cube	Cylindre	Prisme droit
			
♥ Volume = Aire de la base × hauteur			
$V = a \times b \times h$	$V = c \times c \times c = c^3$	$V = \pi \times R^2 \times h$	V = aire triangle × h

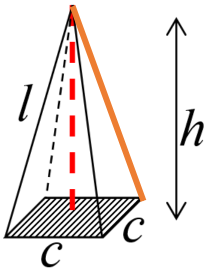
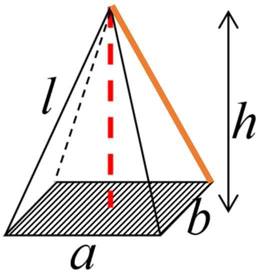
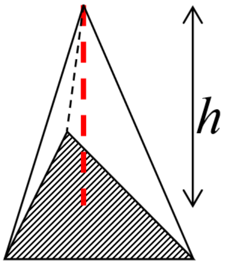
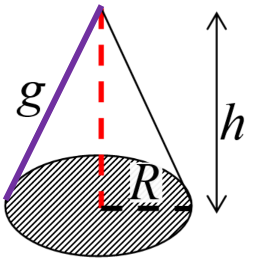


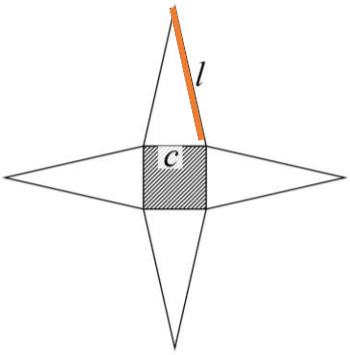


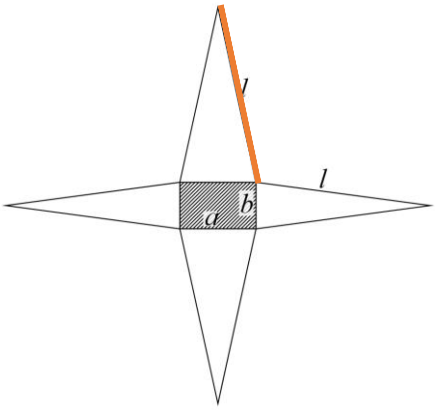


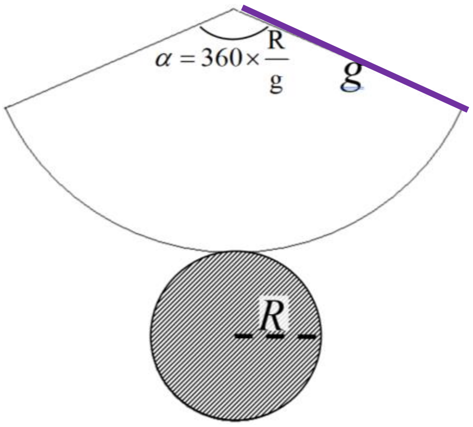


III – La famille des pyramides

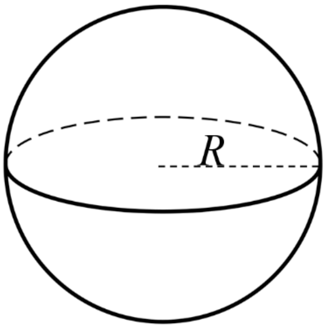
Pyramide régulière	Pyramide	Tétraèdre	Cône
 	 	 	
♥ **Volume** $= \dfrac{\textbf{Aire de la base} \times \textbf{hauteur}}{3}$			
$V = \dfrac{c^2 \times h}{3}$	$V = \dfrac{a \times b \times h}{3}$	$V = \dfrac{\textit{aire triangle} \times h}{3}$	$V = \dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3}$







IV – La boule et la sphère



Définition

La *boule* est l’intérieur.
La *sphère* est l’extérieur, l’enveloppe

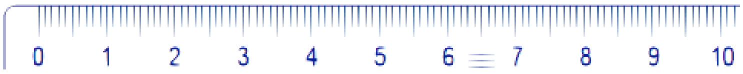
Formules

Volume $= \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$ **Aire** $= 4 \times \pi \times R^2$

V – Conversions

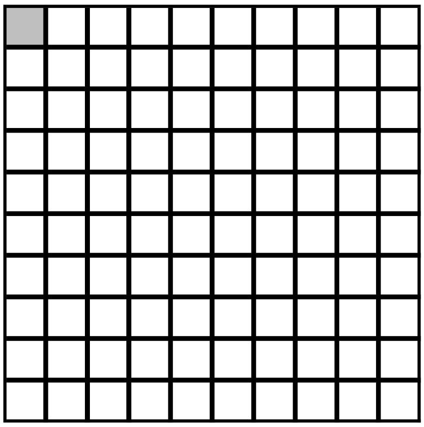
Longueurs

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
					1	0



Aires

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
			ha		*a*		*ca*						
							1	0	0				
					3	5	0 ,						
		7	0										

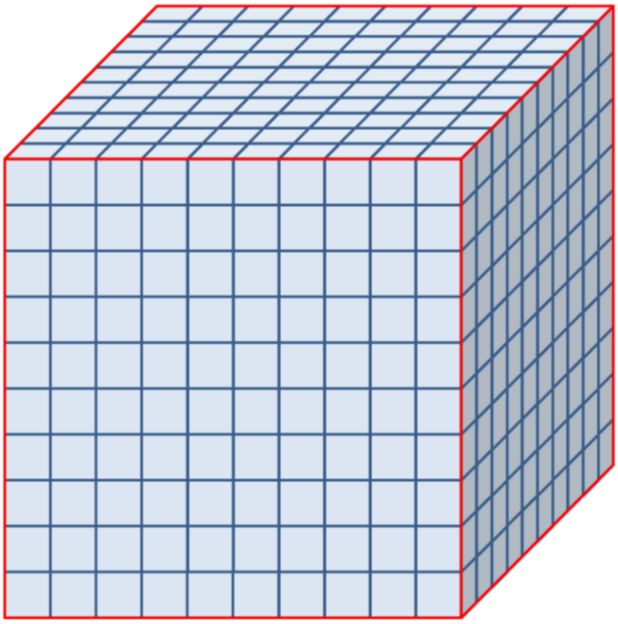


1 ha se lit « un hectare »
1 a se lit « un are »
1 ca se lit « un centiare »

Volumes

		km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3
												hL	daL	L	dL	cL	mL			
											1	0	0	0						
													1	5,	3	4				
														2,	4	5	4			

1 dm^3 = 1L



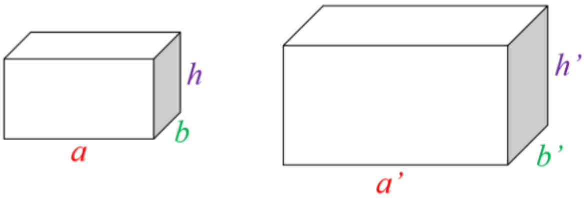
VI – Agrandissements / réductions

Propriété admise

Si une figure est un agrandissement (ou une réduction) d'une autre figure de rapport k :

- les distances sont multipliées par k,
- les aires sont multipliées par k^2,
- les volumes sont multipliés par k^3.

Démonstration dans le cas des pavés droits.



Si le pavé de droite est un agrandissement du pavé gauche de coefficient k, alors on a :

$a' = k \times a$, $b' = k \times b$, et $h' = k \times h$.

Le volume du pavé de gauche est $V = a \times b \times h$

Le volume du pavé de droite est $V' = a' \times b' \times h'$

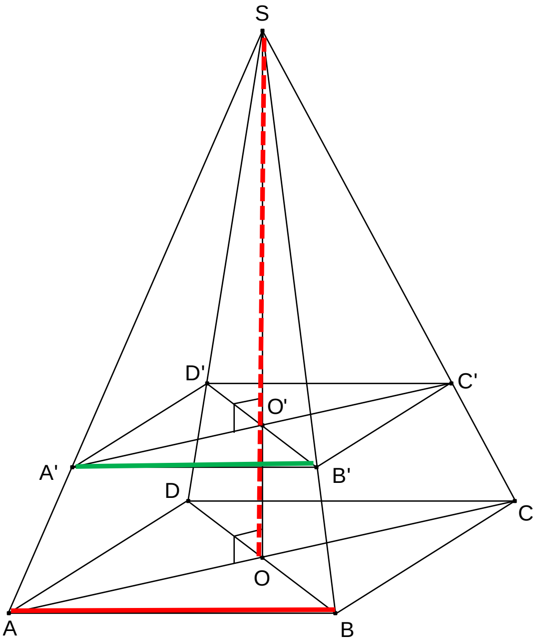
$V' = a' \times b' \times h' = k \times a \times k \times b \times k \times h = k^3 \times a \times b \times h = k^3 \times V$

Comment calculer le coefficient d'agrandissement-réduction ?

1. On repère une distance connue sur les 2 solides.
2. On calcule le coefficient par la formule :

$$\mathbf{k} = \frac{\textit{distance sur le solide d'arrivée}}{\textit{distance correspondante sur le solide de départ}}$$

Pour trouver le coefficient d'agrandissement-réduction, on repère une longueur connue sur le solide de départ et sur le solide d'arrivée.



Exemple 1

On donne une pyramide régulière de base ABCD et de sommet S.

On donne AB = 12 cm et OS = 21cm.

1°) Calculer le volume de SABCD.

2°) On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base ABCD.

On obtient une réduction SA'B'C'D'.

On donne A'B' = 9 cm.

Calculer le rapport de réduction.

En déduire le volume de SA'B'C'D'.

1°) Soit V le volume de SABCD.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{AB \times BC \times SO}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{12 \times 12 \times 21}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1008}$$

Le volume de la pyramide SABCD est $\boxed{1008\text{ cm}^3}$.

2°) Soit k le coefficient de réduction de SABCD vers SA'B'C'D'.

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \mathbf{0,75}$$

Soit V' le volume de SA'B'C'D'.

$$\mathbf{V'} = \mathbf{k^3} \times \mathbf{V} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \mathbf{1008} = \mathbf{425,25}$$

Le volume de SA'B'C'D' est $\boxed{425{,}25\text{ cm}^3}$.

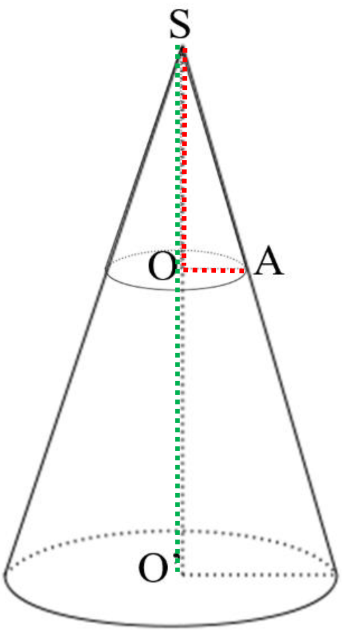
Exemple 2

Sur la figure suivante, on donne les informations suivantes :

- *SO = 6 cm*
- *AO = 5 cm*
- *SO' = 15 cm.*

Calculer le volume du grand cône.

On donnera le volume en litre, arrondi au millilitre près.



Soit V le volume du petit cône.

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{h}}{3} = \frac{\pi \times \mathbf{OA}^2 \times \mathbf{OS}}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 6}{3} = \mathbf{50\pi\ cm^3}$$

Soit k le coefficient d'agrandissement du petit vers le grand cône.

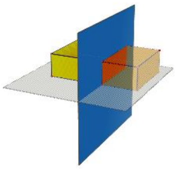
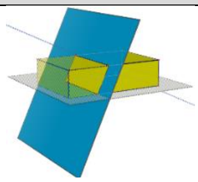
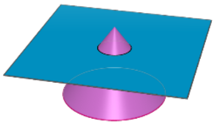
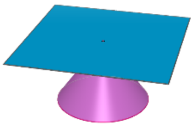
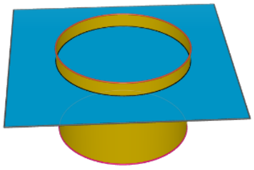
$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{SO'}}{\mathbf{SO}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{6}} = \mathbf{2,5}$$

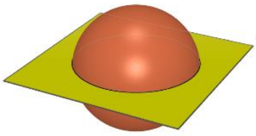
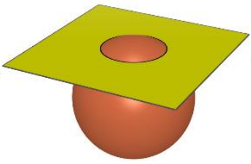
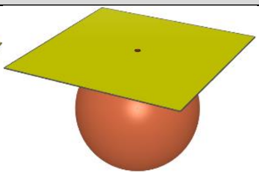
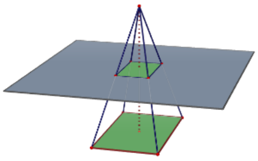
Soit V' le volume du grand cône.

$$\mathbf{V' = k^3 \times V = \ 2,5^3 \times 50\pi = 781,25\pi}$$

Le volume du grand cône est $\boxed{781,25\pi} \approx 2454\ cm^3 = \boxed{2,454\ L}$.

VII – Sections

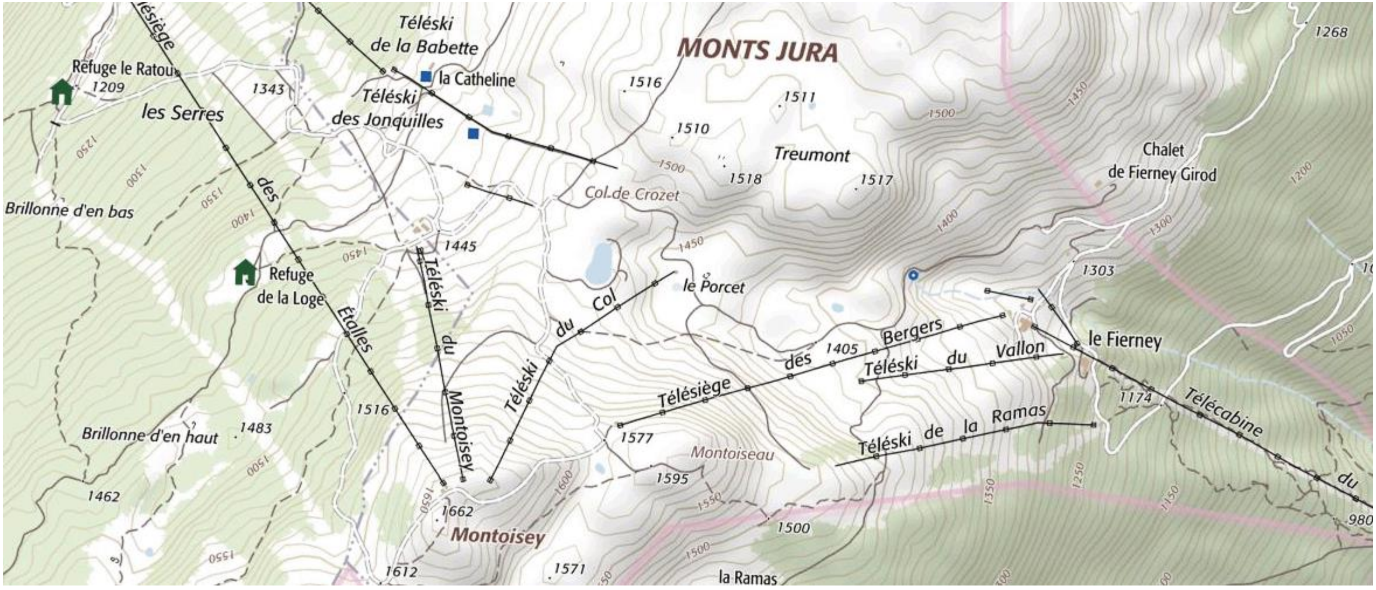
Le pavé droit	Le cône	Le cylindre
 	 	

La sphère	La pyramide
  	

Courbes de niveau

Pour une carte géographique, on sectionne la terre par des sphères de rayons différents correspondants à des altitudes différentes.

Par exemple, on sectionne par une sphère de rayon 1 500 m de plus que le rayon terrestre. On visualise ainsi tous les points étant à la même altitude (ici 1 500 m). On obtient des courbes de niveau, distantes ici de 10 m.



https://www.geoportail.gouv.fr/

VIII – Repérage

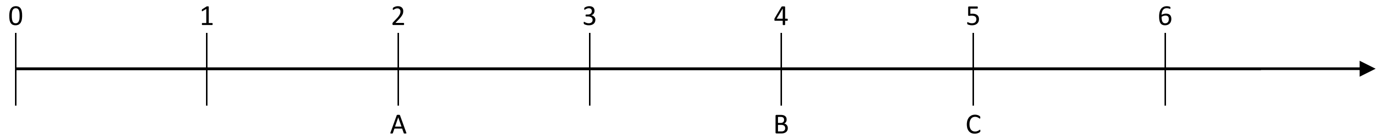
Avec 1 dimension

Pour se repérer, on a besoin de 2 points :

- l'origine (souvent le point O)
- l'unité (souvent le point I, ou le nombre 1).

On appelle *droite graduée*, une droite sur laquelle on a placé une origine et une unité.

Pour graduer la droite, il faut reporter l'unité.



Au lieu de parler de droite graduée, on pourra aussi parler d'axe gradué.

Lorsque l'on place un point sur une droite graduée, le nombre correspondant à ce point est appelé l'affixe de ce nombre.

Certaines fois on emploiera le mot abscisse.

L'affixe de A est 2 ; on notera A(2).
L'abscisse de B est 4.
Le nombre 4 est l'affixe du point B.
Le point C a pour affixe 5.

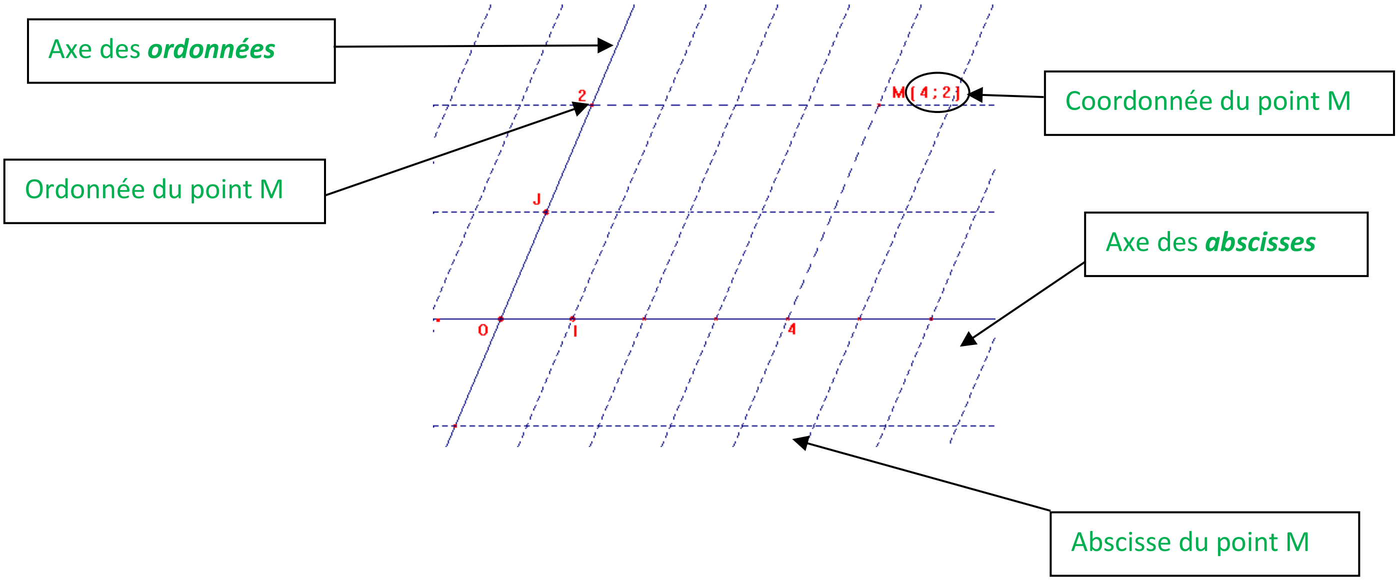
Avec 2 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 3 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.

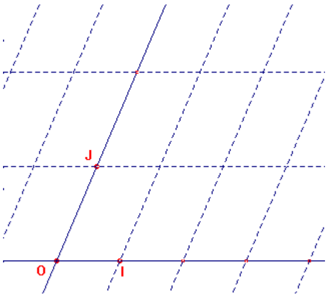
Le repère (O ; I ; J) est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées.



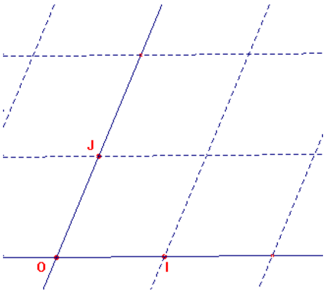
Le repère (O ; I ; J) est dit *quelconque* si

- ses axes ne sont pas perpendiculaires
- les unités ne sont pas les mêmes sur les deux axes.



Le repère (O ; I ; J) est dit *normé* ou *normal* si :

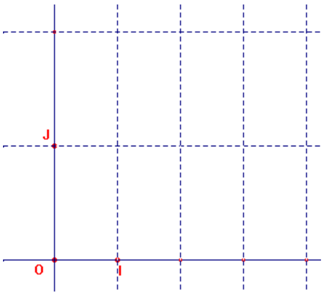
- OI = OJ



Même unité sur les deux axes.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthogonal* si :

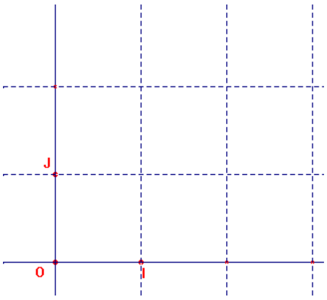
- (OI) ⊥ (OJ)



Axes perpendiculaires.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthonormé* ou *orthonormal* si :

- OI = OJ
- (OI) ⊥ (OJ)



Axes perpendiculaires
Même unité sur les deux axes.

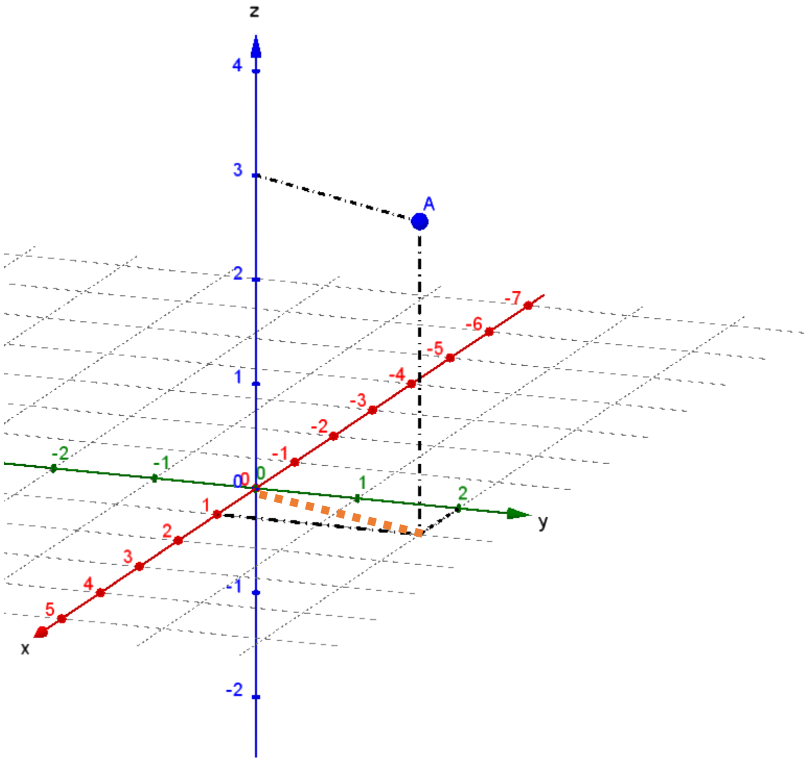
Avec 3 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 4 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.
- un point sur l’axe des hauteurs.

Le repère (O ; I ; J ; K) est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées
- K donne l’unité sur l’axe des hauteurs.



Pour se repérer dans l’espace, on « projette » le point sur le plan « horizontal ».

On commence par donner les coordonnées de ce point sur le plan en traçant les parallèles aux axes du plan de base ; ici on obtient 1 et 2 ; les cordonnées de ce point sont (1 ; 2).

On relie de point à l’origine du repère puis on trace la parallèle qui passe par A ; cette parallèle coupe l’axe des hauteurs qui indique alors la hauteur du point ; ici c’est 3.

Le point A a pour coordonnées : A(1 ; 2 ; 3).

Avec 3 dimensions, sur une sphère par exemple la Terre

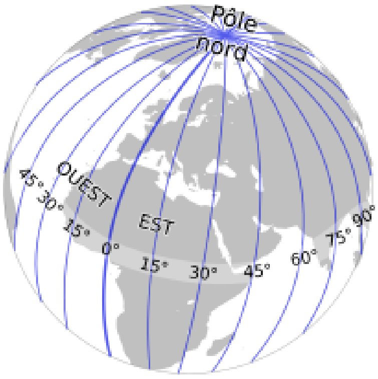
Sur une sphère, il suffit de donner deux nombres pour situer un point car on ne donne pas le troisième (qui correspondrait à l'altitude).

On va donc réaliser un « quadrillage » sur la sphère.

On va commencer par tracer des demi-cercles reliant les deux pôles ; on obtiendra les *méridiens*.

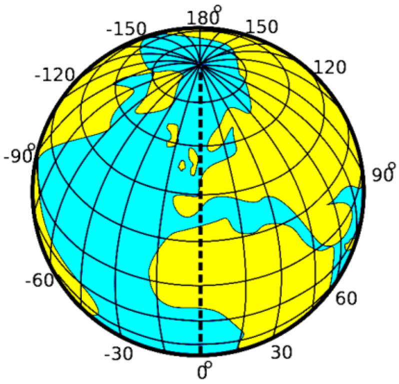
On va d'abord choisir un méridien particulier : celui qui passe par l'observatoire royal de Greenwich à proximité de Londres. Ce méridien coupe l'équateur en point qui sera l'origine de la graduation.

On gradue l'équateur de 0 à 180° vers l'Est et de 0 à 180° vers l'Ouest.



On va ensuite tracer les sections de la sphère par des plans parallèles à l'équateur ; on obtiendra des *parallèles*.

On gradue le méridien de Greenwich de 0 à 90° vers le Nord et de 0 à 90° vers le Sud.



Les parallèles sont tous parallèles.

Les méridiens se coupent tous aux pôles Nord et Sud.

Les parallèles et les méridiens sont perpendiculaires.

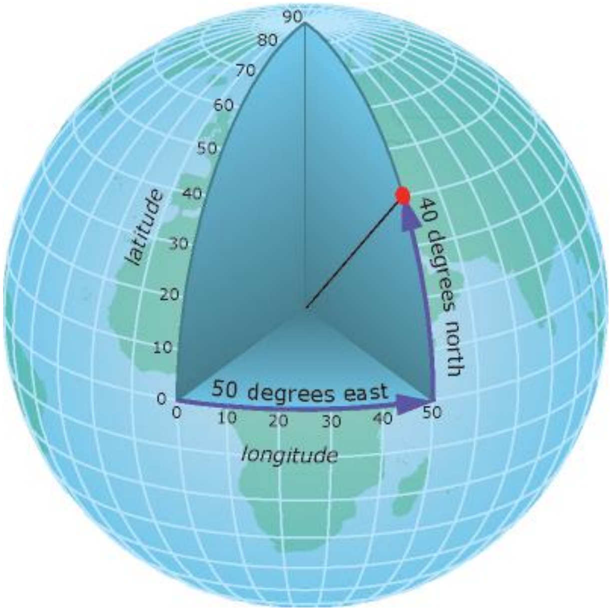
Cela donne donc un quadrillage pour lequel les mailles ressemblent plus à des trapèzes qu'à des carrés.

Pour repérer un point sur la Terre, on donne d'abord le parallèle sur lequel on se trouve.

Par exemple : 40° Nord. On appelle cela la latitude.

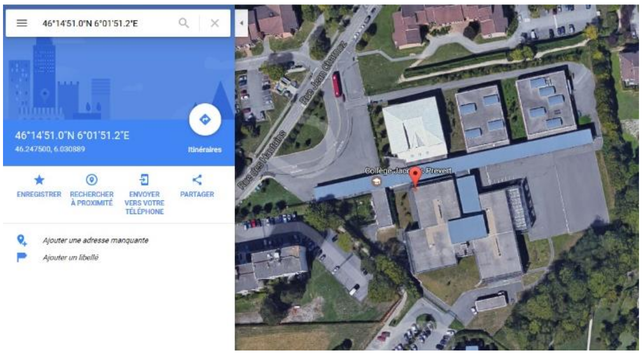
On donne ensuite le méridien. Par exemple : 50° Est. On appelle cela la longitude.

On dira que les coordonnées sont 40°N et 50°E.



Les logiciels de cartographie disponibles directement sur internet (google map, google earth, geoportail …) permettent d'obtenir facilement les coordonnées d'un lieu sur la Terre.

Par exemple, les coordonnées de la salle de classe sont : 46°14'51.0"N 6°01'51.2"E.



46°14'51.0"N 6°01'51.2"E

46°14'51.0"N 6°01'51.2"E

46.247500, 6.030889

STATISTIQUES

Exemple

Voici la liste des âges en mois d'élèves de troisième :

180	176	179	176	182	178	184	181	179	173	182
187	175	181	174	183	178	180	178	184	173	175
173	180	195	179	174	182	172	174	195	183	192
190	181	173	177	180	183	180	183	186	180	

Définitions

On appelle effectif total le nombre de valeurs de la série.

Ici, l'effectif total est 43.

On appelle effectif de A le nombre de fois où A apparait dans la série.

L'effectif de **178** est 3 car il y a 3 personnes ayant **178** mois.

On appelle fréquence de A le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

La fréquence de **178** est $\frac{3}{43}$, ce qui signifie que 3 élèves sur les 43 du groupe ont **178** mois.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Les fréquences sont (souvent) exprimées en pourcentages.

La fréquence de **178** est $\frac{3}{43} \approx 7\%$.

$$\text{Fréquence de A en \%} = \text{Fréquence de A} \times 100 = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$$

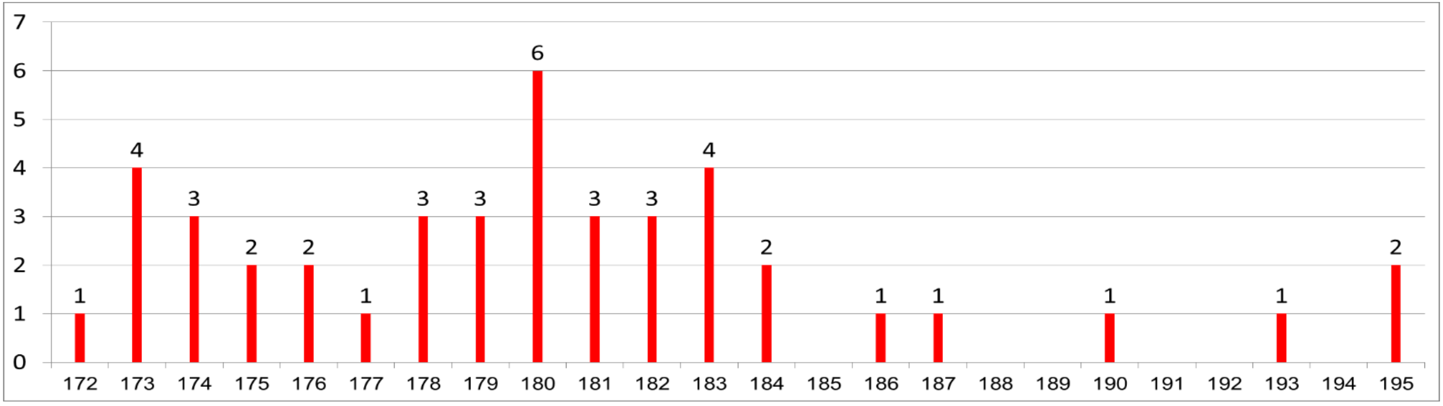
Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	**178**	179	180	181	182	183	184	186	187	190	192	195	Total
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2	43
Fréquence	1/43	4/43	3/43	2/43	2/43	1/43	3/43	3/43	6/43	3/43	3/43	4/43	2/43	1/43	1/43	1/43	1/43	2/43	1
Fréquence en %	2 %	9 %	7 %	5 %	5 %	2 %	7 %	7 %	14 %	7 %	7 %	9 %	5 %	2 %	2 %	2 %	2 %	5 %	100 %

÷ 43

× 100

Diagramme en bâtons de répartition des âges des élèves



Définitions

On appelle *minimum* la plus petite valeur de la série.

Le minimum est 172.

On appelle *maximum* la plus grande valeur de la série.

Le maximum est 195.

On appelle *étendue* l'écart entre le minimum et le maximum.

L'étendue est 195 - 172 = 23 mois.

On appelle *médiane* une valeur qui partage la série en deux sous-parties de même effectif tel que dans une sous-partie sont regroupées toutes les valeurs inférieures ou égales à la médiane et dans l'autre sont regroupées toutes les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

On appelle *premier quartile* la plus petite valeur de la série telle que 25% au moins des valeurs lui soit inférieure ou égale.

On appelle *troisième quartile* la plus petite valeur de la série telle que 75% au moins des valeurs lui soit inférieure ou égale.

Remarques

Une médiane peut être une valeur de la série (ou non).
Les quartiles sont obligatoirement des valeurs de la série.

Comment déterminer une médiane ?

On ordonne (on trie) la série (par ordre croissant).
On détermine l'effectif total N.
Si N est impair, la médiane est une des valeurs de la série ; c'est la $\frac{\mathrm{N}+1}{2}$ ème.
Si N est pair, une médiane est entre deux valeurs de la série ; entre la $\frac{\mathrm{N}}{2}$ ème et la $\frac{\mathrm{N}}{2}+1$ ème.

Astuce pour déterminer la position de la médiane

On calcule $\frac{\mathrm{N}+1}{2}$
Si on trouve un nombre entier, c'est la position de la médiane dans la série
Si ce n'est pas un nombre entier, la position de la médiane est donnée par les deux entiers consécutifs encadrant $\frac{\mathrm{N}+1}{2}$.

Exemple 1

Dans la série 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10, l'effectif total est 9, donc la médiane est la 5ème valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée est 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; **6** ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 donc la médiane est **6**.

On prend les 2 entiers consécutifs encadrant $\frac{10+1}{2}=5{,}5$ On calcule $\frac{9+1}{2}=5$

Exemple 2

Dans la série 1 ; 2 ; 6 ; 7 ; **11 ; 15** ; 15 ; 17 ; 17 ; 17, l'effectif total est 10, donc une médiane est entre la 5ème valeur et la 6ème valeur de la série ordonnée.

La série est déjà ordonnée donc la médiane est **entre 11 et 15**. On peut prendre n'importe quelle valeur, mais on choisit le « milieu » de l'intervalle. Ici, une médiane est 13.

Définition

L'*effectif cumulé croissant* (noté souvent ECC) de A est le nombre de valeur de la série inférieures ou égales à A.

Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	192	195	Total
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2	43
Effectif Cumulé Croissant	1	5	8	10	12	13	16	19	25	28	31	35	37	38	29	40	41	43	

+

Dans l'exemple des âges, l'effectif total est 43. Une médiane est la 22-ème valeur de la série ordonnée.
19 dans la colonne 179 mois signifie qu'il y a 19 élèves qui ont jusqu'à 179 mois.
25 dans la colonne 180 mois signifie qu'il y a 25 élèves qui ont jusqu'à 180 mois donc de la 20ème et la 25ème valeur, il y a 180.
La médiane est **180** mois.

Comment déterminer les quartiles ?

On ordonne la série par ordre croissant.

On détermine l’effectif total : N.

On calcule $\frac{N}{4}$. Si ce n’est pas un entier, on arrondi à l’entier supérieur. Ce nombre est le rang du premier quartile.

On calcule $\frac{3}{4} \times \mathrm{N} = \frac{3\mathrm{N}}{4}$. Si ce n’est pas un entier, on arrondi à l’entier supérieur. Ce nombre est le rang du troisième quartile.

Exemple 1

On cherche les premier et troisième quartiles de la série :

5 13 27 38 4 16 32 49

La série ordonnée est : 4 ; 5 ; 13 ; 16 ; 27 ; 32 ; 38 et 49.

L’effectif total est 8.

On calcule $\frac{8}{4}$ *= 2 et* $\frac{3}{4} \times 8$ *= 6.*

Le premier quartile est la 2ème valeur de la série ordonnée ; ici c’est 5.
Le troisième quartile est la 6ème valeur de la série ordonnée ; ici c’est 32.

Exemple 2

On cherche les premier et troisième quartiles de la série :

7 9 **15** 18 19 25 **29** 32 37

La série est déjà ordonnée.

L’effectif total est 9.

On calcule $\frac{9}{4}$ *= 2,25 ; on arrondit à* ***3****.*

On calcule $\frac{3}{4} \times$ *9= 6,75 ; on arrondit à* ***7****.*

Le premier quartile est la **3**ème valeur de la série ordonnée ; ici c’est 15.
Le troisième quartile est la **7**ème valeur de la série ordonnée ; ici c’est 29.

Exemple des âges

La série ordonnée commence par : 172, 173, 173, 173, 173, 174, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 177, 178, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, 180, 180, 180, 180, 181, 181, 181, 182, 182, 182, 183, 183, 183, 183, 184, 184, 186, …

L’effectif total est 43.

On calcule $\frac{43}{4}$ = 10,75 ; on arrondit à 11.

On calcule $\frac{3}{4} \times 43$ = 32,25 ; on arrondi à 33.

Le premier quartile est la 11ème valeur de la série ordonnée ; ici c’est 176.
Le troisième quartile est la 33ème valeur de la série ordonnée ; ici c’est 183.

Utilisation d'un tableur

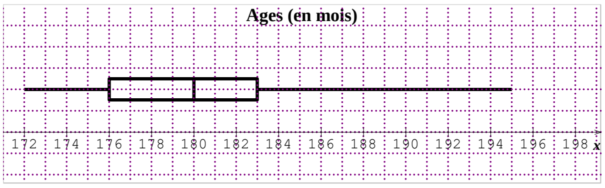
Pour calculer la médiane d'une série de valeur comprise entre la cellule A3 et la cellule F5, je tape la formule

=mediane(A3:F5)

Pour calculer le premier quartile d'une série de valeur comprise entre la cellule A3 et la cellule F5, je tape la formule =quartile(A3:F5;1)

Pour calculer le troisième quartile d'une série de valeur comprise entre la cellule A3 et la cellule F5, je tape la formule =quartile(A3:F5;3)

Pour les quartiles, le tableur donne une valeur qui n’est pas obligatoirement une valeur de la série …
Certaines fois, on présente ses valeurs sur une « boite à moustaches » (ou box plot).
En voici une (simplifiée) pour la série des âges :



Comment calculer la moyenne

Méthode 1

1. On additionne toutes les valeurs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Soit M la moyenne de cette série.

M = (180 + 176 + 179 + 176 + 182 + 178 + 184 + 181 + 179 + 173 + 182 + 187 + 175 + 181 + 174 + 183 + 178 + 180 + 178 + 184 + 173 + 175 + 173 + 180 + 195 + 179 + 174 + 182 + 172 + 174 + 195 + 183 + 192 + 190 + 181 + 173 + 177 + 180 + 183 + 180 + 183 + 186 + 180) ÷ 43

= 7750 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

L'âge moyen est de 7750 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

Comment calculer la « moyenne pondérée »

Méthode 2

1. On calcule la somme de toutes les valeurs en utilisant le tableau d'effectifs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Soit M la moyenne de cette série.

M = (172 + 4×173 + 3×174 + 2×175 + 2×176 + 177 + 3×178 + 3×179 + 6×180 + 3×181 + 3×182 + 4×183 + 2×184 + 186 + 187 + 190 + 193 + 2×195) ÷ 43

= 7750 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

L'âge moyen est de 7750 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

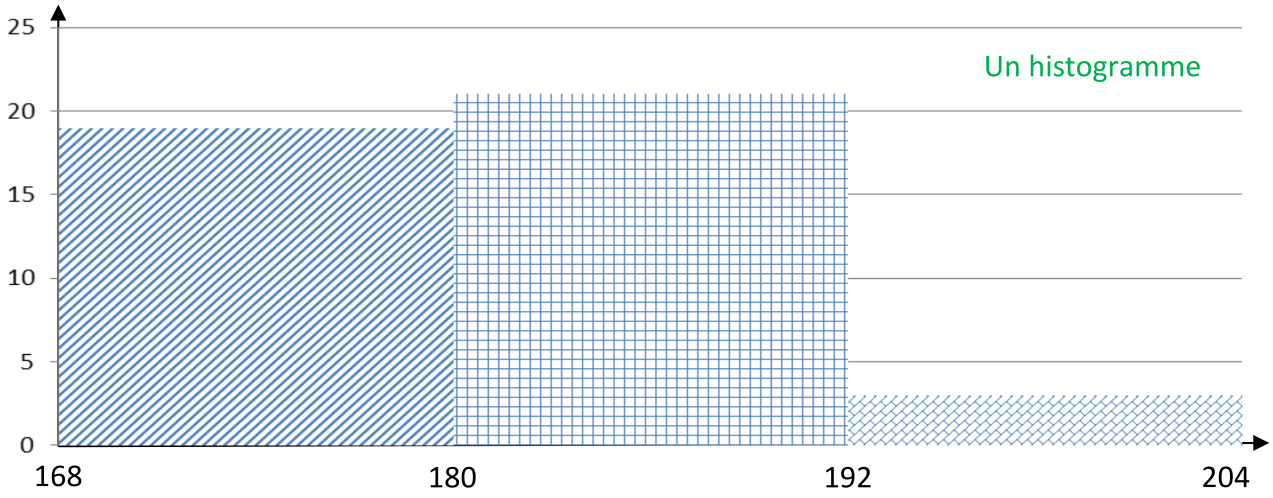
Partage en classes de valeurs

On regroupe les valeurs de la série en classes de valeurs.

Par exemple, on peut regrouper les personnes qui ont le même nombre d'années.

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %
[168 ; 180[	19	19/43	44 %
[180 ; 192[	21	21/43	49 %
[192 ; 204[	3	3/43	7 %
Total	43	1	100 %



Définition

On appelle *centre de la classe*, le milieu de l'intervalle définissant la classe.

Exemple des âges.

Le milieu de l'intervalle [168 ; 180[est 174. Pour le calculer on effectue $\frac{168+180}{2}$.

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %	Centre de la classe
[168 ; 180[	19	19/43	44 %	174
[180 ; 192[	21	21/43	49 %	186
[192 ; 204[	3	3/43	7 %	198
Total	43	1	100 %	

<u>Calcul</u> d'une valeur approchée de la moyenne.

On suppose que les valeurs sont regroupées aux centres des classes.

Soit M une valeur approchée de la moyenne de cette série.

M = (19×174 + 21×186 + 3×198) ÷ 43 = 7806 ÷ 43 ≈ 181,5 mois.

Une valeur approchée de l'âge moyen est $\boxed{7806 \div 43 \approx 181{,}5 \text{ mois}}$.

Remarques

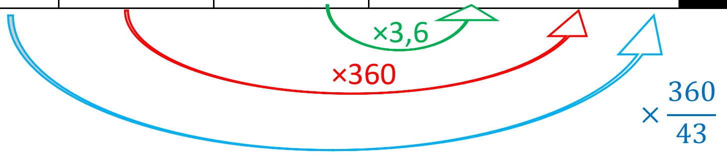
Le résultat est très bon.

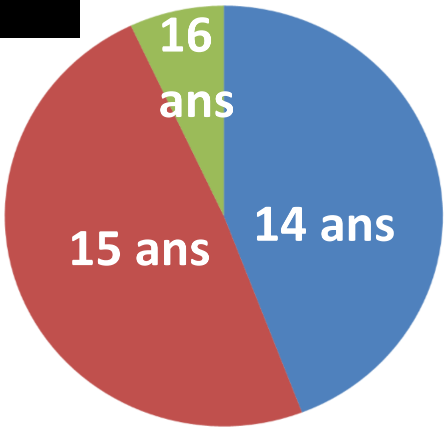
La précision de la mesure est le mois et on trouve 1,3 mois d'écart avec la valeur exacte.

Cette méthode (malgré sa forte approximation) donne souvent de très bons résultats.

Exemple des âges

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %	Angle sur le diagramme circulaire en degré	Centre de la classe
[168 ; 180[	19	19/43	44 %	159°	174
[180 ; 192[	21	21/43	49 %	176°	186
[192 ; 204[	3	3/43	7 %	25°	198
Total	43	1	100 %	360°	





Un diagramme circulaire

FONCTIONS AFFINES et LINEAIRES, pourcentages

I - Fonctions affines et linéaires

Définition

Soit p et q deux nombres.

Une fonction est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x$

Une fonction est dite affine si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x + q$

Exemples

Fonction	Linéaire ?	Affine ?
$f(x) = 3x$	Oui	Oui car $3x = 3x + 0$
$g(x) = -6x$	Oui	Oui car $-6x = -6x + 0$
$h(x) = 5x + 3$	Non	Oui
$i(x) = 7$	Non	Oui car $7 = 0x + 7$
$j(x) = \cos(x)$	Non	Non
$k(x) = x^2$	Non	Non

Propriété admise

Une situation de proportionnalité de coefficient p

- a une représentation graphique qui est une droite qui passe par l'origine du repère,
- correspond à la fonction linéaire $f(x) = p\ x$.

Soit $f(x) = p\ x + q$ une fonction affine.

Sa représentation graphique est une droite.

Exemple

Gabriel souhaite acheter des fraises pour faire de la confiture. Sur le marché, il a trouvé des fraises de France à 2,5€ le kilogramme.

Le prix des fraises est proportionnel à la masse de fraises.

Le coefficient de proportionnalité est 2,5.

On appelle x la masse de fraises en kilogrammes.

Cela correspond à la fonction linéaire $f(x) = 2{,}5\ x$.

Marine est plus courageuse. Elle a trouvé un producteur qui lui offre de ramasser ses fraises pour 1,5€ le kilogramme après paiement d'une redevance forfaitaire de 20€.

Le prix des fraises chez ce producteur est donné par la fonction affine $g(x) = 1{,}5\ x + 20$.

Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine ?

Comme leurs représentations graphiques sont des droites, il suffit de placer 2 points.

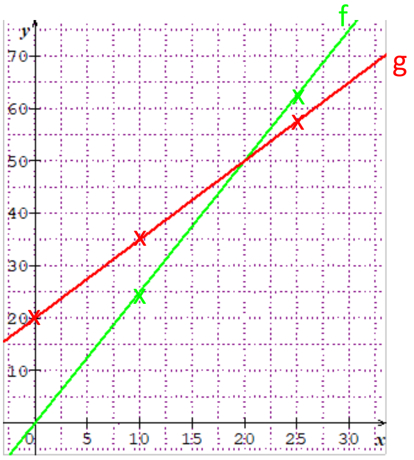
Afin de vérifier, il est intéressant d'en placer 3.

On construit donc un tableau de valeur avec 3 points.

Exemple des fraises

$f(x) = 2{,}5\ x$ $\qquad$ $g(x) = 1{,}5\ x + 20$

x	0	10	25
$f(x)$	0	25	62,5
$g(x)$	20	35	57,5



Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction affine ?

On cherche les antécédents de a par la fonction affine $f(x) = p\ x + q$

Il suffit de résoudre l'équation $p\ x + q = a$

Exemple des fraises

On cherche combien Marine peut acheter de fraises avec 38€.

On cherche les antécédents de 38 donc les nombres x tels que g(x) = 38 donc 1,5 x + 20 = 38

1,5 x + 20 = 38
1,5 x = 18
x = 12

L'antécédent de 38 est 12.

On interprète ce résultat en disant que Marie peut donc acheter $\boxed{\text{12kg de fraises}}$.

Propriété

Soit f(x) = $p\,x + q$ une fonction affine.

La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées (0 ; q).
Le nombre q est appelé *ordonnée à l'origine*.

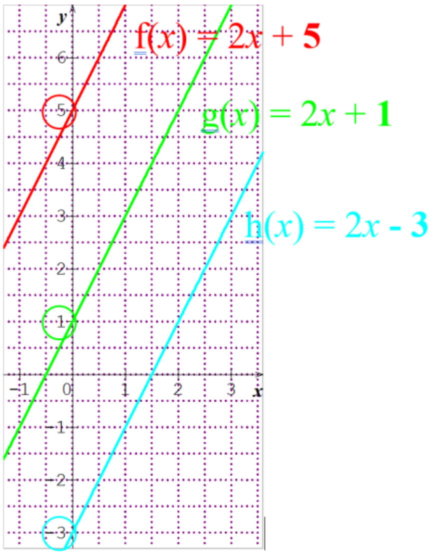
Si x augmente de 1 alors f(x) augmente de p.
Le nombre p est appelé *coefficient directeur*

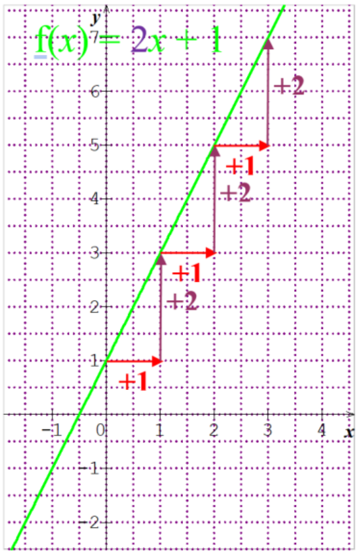
Démonstration

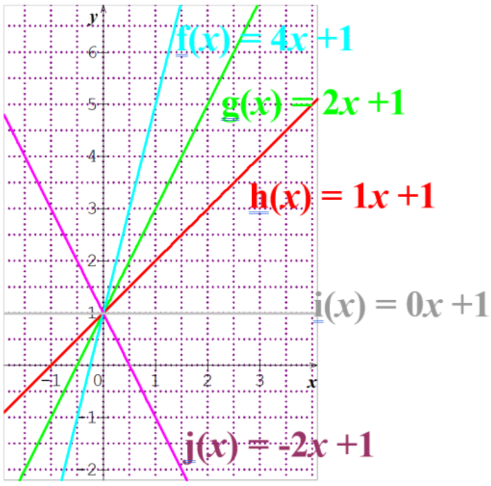
Si x = 0 alors f(x) = f(0) = $p \times 0 + q = q$, donc si x = 0 alors la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées (0 ; q).

f(x + 1) = $p\,(x + 1) + q = p\,x + p + q = p\,x + q + p$ = f(x) + p
Donc si x augmente de 1 alors f(x) augmente de p.

Exemples







Remarque

Deux fonctions qui ont le même coefficient directeur ont des représentations graphiques qui sont parallèles.

Propriété

Soit f(x) = $p\,x + q$ une fonction affine.

Soient x_1 et x_2 deux nombres et f(x_1) et f(x_2) leurs images.

$$p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Démonstration

f(x_1) = p x_1 + q f(x_2) = p x_2 + q
f(x_2) - f(x_1) = p x_2 + q – (p x_1 + q)
f(x_2) - f(x_1) = p x_2 + q – p x_1 – q
f(x_2) - f(x_1) = p x_2 – p x_1
f(x_2) - f(x_1) = p (x_2 – x_1)

$$\frac{\mathrm{f}(x_2) - \mathrm{f}(x_1)}{x_2 - x_1} = p$$

Exemple 1

Soit f(x) = $p\,x + q$ une fonction affine tel que f(2) = 5 et f(6) = 21 leurs images.
Trouver l'expression algébrique de f.

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ avec x_1 = 2 , f(x_1) = 5 , x_2 = 6 et f(x_2) = 21.

On a $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{21-5}{6-2} = \frac{16}{4} = 4$
Donc f(x) = 4x + q.

Dans l'énoncé On remplace x par 2 dans la formule f(x) = 4x + q
↓ ↓
On a f(2) = 5 et f(2) = 4 × 2 + q
donc 5 = 4 × 2 + q
donc 5 = 8 + q
donc -3 = q
donc $\boxed{f(x) = 4x - 3}$

Exemple 2
Soit A(4 ; 7) et B(6 ; 11) deux points.
Trouver l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B.
Soit C(5 ; 9) et D (8 ; 17)
Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

Soit f(x) = px + q la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A et B.
On a f(4) = 7 et f(6) = 11
On a x_1 = 4 et f(x_1) = 7 et x_2 = 6 et f(x_2) = 11
Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Donc $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{11-7}{6-4} = \frac{4}{2} = 2$
Donc f(x) = 2x + q.
On a f(4) = 7 et f(4) = 2 × 4 + q
donc 7 = 2 × 4 + q
donc 7 = 8 + q
donc -1 = q
donc $\boxed{f(x) = 2x - 1}$

f(5) = 2 × 5 – 1 = 9 donc $\boxed{C \in (AB)}$. f(8) = 2 × 8 – 1 = 15 ≠ 17 donc $\boxed{D \notin (AB)}$.

Soit M (x ; y) un point sur cette droite.
Les coordonnées de ce point vérifient l'équation y = 2x - 1 ; on dit que y = 2x - 1 est *l'équation de la droite* (AB).

II - Pourcentages

Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.
Le mot français « de » se traduit en mathématiques par une multiplication.

Exemple

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120€, c'est prendre $\frac{3}{5} \times 120 = 72$€.

Prendre 12% de 45€, c'est prendre $\frac{12}{100}$ de 45€, ce qui revient à prendre $\frac{12}{100} \times 45 = 5{,}40$€.

Comment calculer le produit d'une fraction par une quantité ?

$$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c \qquad \frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b \qquad \frac{a}{b} \times c = (c \div b) \times a$$

Exemples

$$\frac{10}{5} \times 7 = (10 \div 5) \times 7 = 2 \times 7 = 14$$

$$\frac{5}{3} \times 6 = (5 \times 6) \div 3 = 30 \div 3 = 10$$

$$\frac{7}{5} \times 15 = (15 \div 5) \times 7 = 3 \times 7 = 21$$

Propriété

Ajouter $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Soustraire $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Démonstration

Soit Q la quantité.

$p\%$ de Q c'est $\frac{p}{100}\times Q$

Si on ajoute $p\%$ à Q, on trouve $Q+\frac{p}{100}\times Q=\left(1+\frac{p}{100}\right)\times Q$.

Si on soustrait $p\%$ à Q on trouve $Q-\frac{p}{100}\times Q=\left(1-\frac{p}{100}\right)\times Q$.

Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15%.
Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?

Calculons le prix soldé.

$$74\times\left(1-\frac{15}{100}\right)=74\times 0{,}85=62{,}90$$

Le prix soldé est 62,90€.

Exemple 2

Le taux de TVA est de 33,3%.

a. *Le prix HT est de 126 €. Quel est le prix TTC ?*

b. *Le prix TTC est de 150 €. Quel est le prix HT ?*

Pour passer du prix HT au prix TTC, on multiplie par $1+\frac{33{,}3}{100}=1{,}333$ donc pour passer du prix TTC au prix HT, on divise par 1,333

a. Calculons le prix TTC.

$$126\times 1{,}333\approx 167{,}96$$

Le prix TTC est d'environ $\boxed{\text{167,96 €}}$.

b. Calculons le prix HT.

$$150\div 1{,}333\approx 112{,}53$$

Le prix HT est d'environ $\boxed{\text{112,53 €}}$.

Résumé

$$\begin{tikzcd}
\textbf{Départ} \arrow[r, bend left, "\times\left(1+\frac{p}{100}\right)"] \arrow[r, phantom, "+\,p\,\%"] & \textbf{Arrivée} \arrow[l, bend left, "\div\left(1+\frac{p}{100}\right)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\textbf{Départ} \arrow[r, bend left, "\times\left(1-\frac{p}{100}\right)"] \arrow[r, phantom, "-\,p\,\%"] & \textbf{Arrivée} \arrow[l, bend left, "\div\left(1-\frac{p}{100}\right)"]
\end{tikzcd}$$