Hervé LESTIENNE

www.lesmathsdherve.net

Sommaire

Sommaire 2
LES NOMBRES RELATIFS 3
SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS 5
I – Symétrie axiale 5
II – Symétrie centrale 6
III – Translation 6
FRACTIONS : additions et soustractions 8
PROPORTIONNALITE, VITESSES et ECHELLES 12
I – Proportionnalité 12
II – Vitesse, distance et temps 13
III – Ratios 14
IV – Echelles 15
CALCUL LITTERAL 17
I – L'utilisation de lettres dans les calculs 17
II – Equations 18
III – Problèmes 20
Triangles rectangles : PYTHAGORE 22
FRACTIONS : multiplications et divisions 24
Théorème de THALES, TRIANGLES SEMBLABLES, HOMOTHETIES 26
I – Théorème de Thalès 26
II – Triangles semblables 28
III – Homothéties : agrandissement/réduction 28
PUISSANCES de 10 et NOTATION SCIENTIFIQUE 30
STATISTIQUES 33
SOLIDES, agrandissement/réduction 36
I – Rappel sur les aires 36
II – La famille des prismes 36
III – La famille des pyramides 37
IV – Conversions 37
V – Agrandissements / réductions 38
VI – Repérage 39
FONCTIONS : généralités 42
Triangles rectangles : COSINUS 45
PROBABILITES 47

LES NOMBRES RELATIFS

Définitions

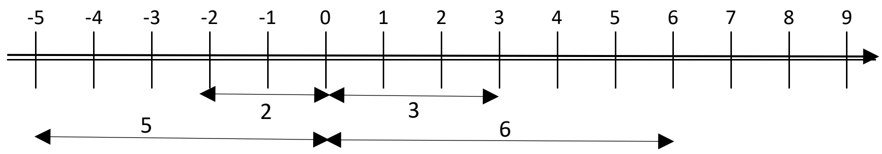
Un *nombre relatif* est un nombre précédé d'un signe.
Si ce signe est "+", le nombre est dit *positif*.
Si ce signe est "-", le nombre est dit *négatif*.
La *distance à zéro* d'un nombre relatif est la distance séparant ce nombre de 0.

Astuce

La distance à zéro d'un nombre est le nombre privé de son signe.

Exemples

La distance à zéro de -5 est 5.
La distance à zéro de -2 est 2.
La distance à zéro de +3 est 3.
La distance à zéro de +6 est 6.



Convention

Les mathématiciens ont décidé de ne pas mettre de signe devant les nombres positifs.

Propriété admise

Pour additionner deux nombres relatifs (a + b), on procède comme suit :

Les 2 nombres (*a et b*) ont le même signe ?

oui — On additionne les distances à zéro

non — On soustrait les distances à zéro

Le résultat est du même signe que le nombre (*a ou b*) qui avait la plus grande distance à zéro.

Exemples

5 + 3 = 8	5 et 3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.
(-5) + (-3) = -8	-5 et -3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.
5 + (-3) = 2	5 et -3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.
(-5) + 3 = -2	-5 et 3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

Définition

L'opposé d'un nombre a est le nombre noté – a tel que a + (-a) = 0.

Astuce

Pour prendre l'opposé d'un nombre, il suffit de changer son signe.

Exemples

L'opposé de 2 est noté -2 et vaut -2
L'opposé de -2 est noté - (-2) et vaut 2 donc - (-2) = +2.

Définition

Soustraire, c'est additionner l'opposé.

Exemples	**Astuce**
Soustraire 2 c'est additionner –2.	- 2 = + (-2)
Soustraire 5 c'est additionner –5.	- 5 = + (-5)
Soustraire -4 c'est additionner 4.	- (-4) = + 4
Soustraire -7 c'est additionner 7.	- (-7) = +7

Exemples de soustractions

5 – 2 = 5 + (-2) = 3   4 – 5 = 4 + (-5) = -1   5 – (-4) = 5 + 4 = 9   6 – (-7) = 6 + 7 = 13

Comment calculer une somme algébrique ?

On supprime les parenthèses, puis on effectue le travail précédent en additionnant les positifs et les négatifs (veiller à bien garder le signe qui se trouve devant un nombre lors du "réarrangement").

Exemple

(-5) + 3 – 4 + 5 + (-3) – 4 + 7 = -5 + 3 - 4 + 5 - 3 - 4 + 7 = -5 - 4 - 3 - 4 + 3 + 5 + 7 = -16 + 15 = -1

Propriété règle des signes admise

Le produit de deux nombres de même signe est positif

Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

×	+	-
+	+	-
-	-	+

La règle des signes s'applique aussi pour les divisions.

Comment multiplier deux nombres relatifs ?

1. On multiplie leurs distances à zéro.
2. On détermine le signe en utilisant la règle des signes.

Exemples de produits ou quotients

5 × 2 = +10 Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif. 10 ÷ 2 = +5	5 × (-2) = -10 Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif. 10 ÷ (-2) = -5	(-5) × 2 = -10 Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif. (-10) ÷ 2 = -5	(-5) × (-2) = +10 Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif. (-10) ÷ (-2) = +5

Propriété admise

Pour déterminer le signe d'une expression numérique dans laquelle n'interviennent que des multiplications et des divisions, il suffit de compter le nombre de facteurs négatifs.

Si ce nombre de facteurs négatifs est pair (0, 2, 4, 6, 8 …), le produit est positif.

Si ce nombre de facteurs négatifs est impair (1, 3, 5, 7, 9…), le produit est négatif.

Exemples

2 × 5 × (- 4) × 3 × (- 4) × (- 4) × 5 est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.

2 × (- 5) × (- 4) × 3 × (- 4) × (- 4) × 5 est positif car il y a un nombre pair (4) de facteurs négatifs.

Remarque

Peu importe le nombre de facteurs positifs ou s'il y a plus de facteurs positifs que négatifs ; seul compte le nombre de facteurs négatifs.

ATTENTION, la propriété précédente ne "marche" que s'il y a des multiplications et des divisions. Il ne faut surtout pas l'utiliser lorsqu'il y a des additions ou des soustractions.

Propriété priorités opératoires admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On effectue les multiplications et divisions (de gauche à droite).
3. On termine toujours par les additions et soustractions (de gauche à droite).

Exemple

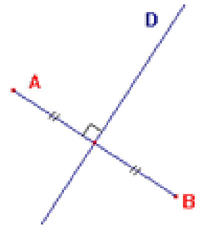
10 + 5 × (3 – (3 + 5 × 7)) = 10 + 5 × (3 – (3 + 35)) = 10 + 5 × (3 – 38) = 10 + 5 × (- 35) = 10 + (- 175) = - 165

Astuce

Dans le cas de parenthèses imbriquées, il peut être utile de mettre en couleur les paires de parenthèses pour repérer les calculs à effectuer.

SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS

I – Symétrie axiale

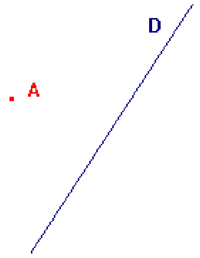


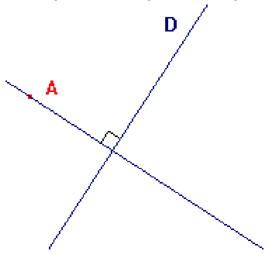
Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport à la droite D si D est la médiatrice de [AB].

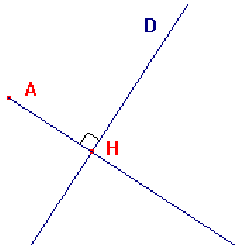
Construction avec la réquerre

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :

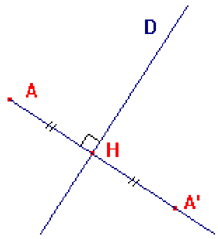




Tracer la droite perpendiculaire à D qui passe par A.



Elle coupe D en H.



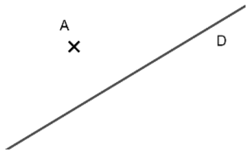
Placer le point A' tel que H soit le milieu de [AA'].

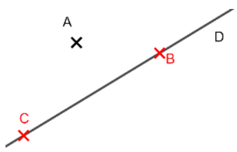
A' est le *symétrique* de A par la symétrie d'axe D.

On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie d'axe D.

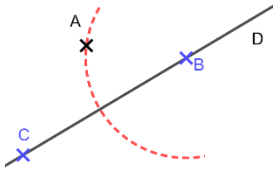
Construction avec le compas et la règle non graduée

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :

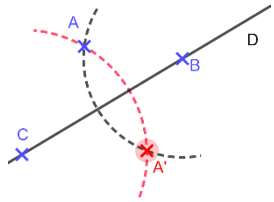




Placer deux points (B et C) sur D.



Tracer le cercle de centre B qui passe par A.



Tracer le cercle de centre C qui passe par B ; il coupe le cercle précédent en A'.

Propriété admise

La symétrie axiale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

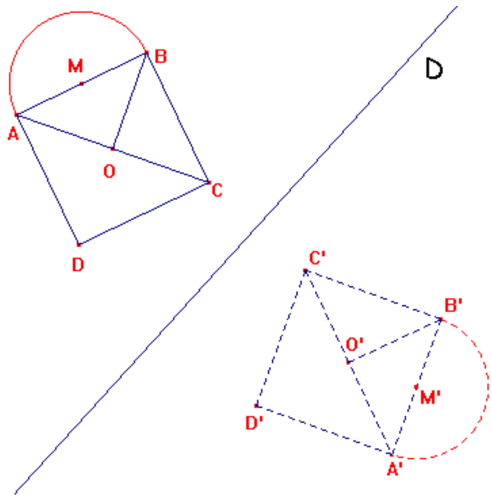
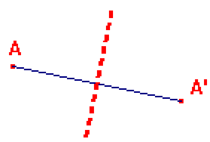


Image par la symétrie d'axe D

Pour mémoire

La symétrie axiale « correspond » à un miroir.

Caractériser

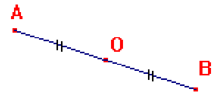


Pour caractériser une symétrie axiale, il faut donner son axe.

Pour retrouver son axe, il suffit de connaître un point et son image.

L'axe de symétrie est la médiatrice du segment formé par ces 2 points.

II – Symétrie centrale

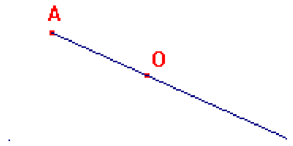


Définition

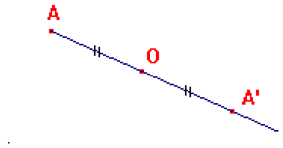
Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O si O est le milieu de [AB].

Construction

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport au point O il faut :



Tracer la demi-droite [AO).



Placer le point A' sur [AO) tel que O soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie de centre O.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie de centre O.

Propriété admise

La symétrie centrale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

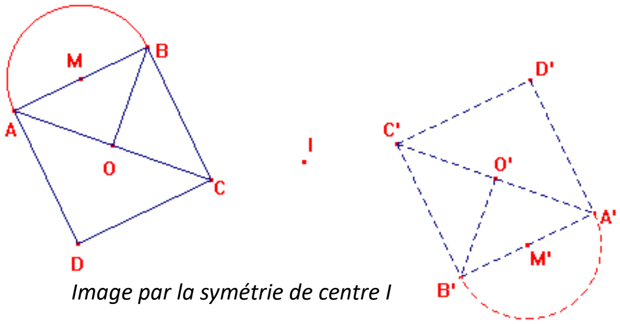


Image par la symétrie de centre I

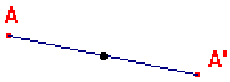
Pour mémoire

La symétrie centrale « correspond » à un demi-tour autour du centre de symétrie.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie centrale, il faut donner son centre.

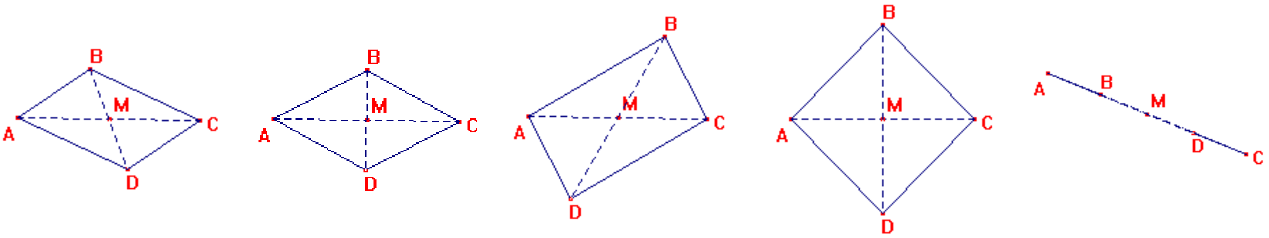
Pour retrouver son centre, il suffit de connaître un point et son image. Le centre de symétrie est le milieu du segment formé par ces 2 points.



III – Translation

Définition

ABCD est un *parallélogramme* si ces diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.



Dans tous les cas ci-dessus, ABCD est un parallélogramme car M est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

Définition

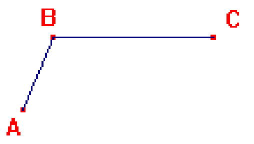
On dit que l'image du point D est le point C par la *translation* qui envoie A sur B si ABCD est un parallélogramme.

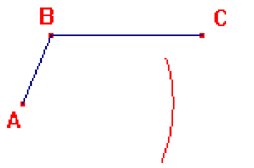
Construction

Pour construire l'image du point C dans la translation qui envoie A sur B il faut construire le parallélogramme ABC'C.

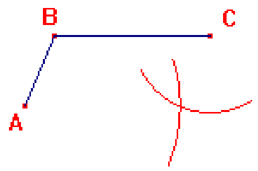
C' est le *translaté* de C par la translation qui envoie A sur B.
On dit aussi que C' est l'*image* de C par la translation qui envoie A sur B.

Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle et compas

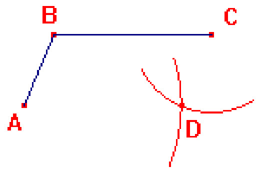




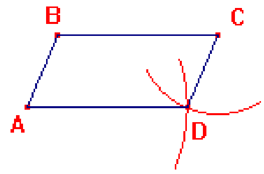
Tracer un arc de cercle de centre A et de rayon BC.



Tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB.

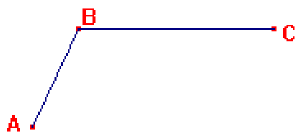


Les deux demi-cercle se coupent en D.

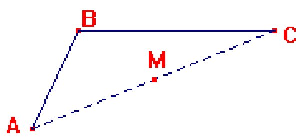


Tracer les segments [CD] et [AD]

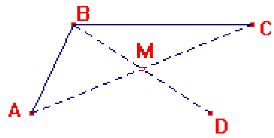
Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle graduée



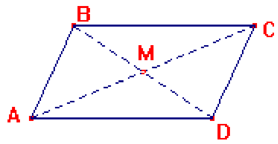
Tracer le segment [AC]



Construire le point M, milieu de [AC]



Tracer le point D, symétrique de B par rapport au point M.



Tracer les segments [CD] et [AD].

Propriété admise

La translation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

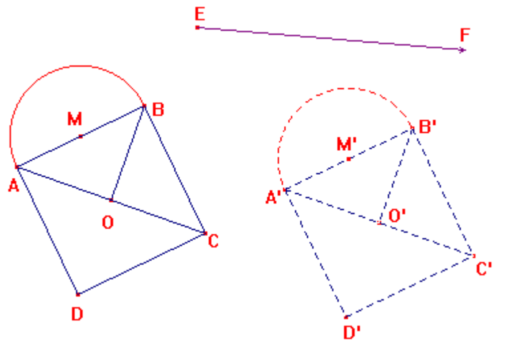


Image par la translation qui envoie E sur F

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour mémoire

La translation « correspond » à un glissement sans tourner.

Caractériser

Pour caractériser une translation, il faut donner un point et son image ou le vecteur dont les extrémités sont ces points.

Dans l'exemple, on peut parler de la translation qui envoie A sur B ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut aussi parler de la translation qui envoie C sur C' ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{CC'}$.

FRACTIONS : additions et soustractions

Définitions

Un nombre en *écriture fractionnaire* s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{le numérateur} \\ \leftarrow \text{le dénominateur} \end{array}$$

On parle de *fraction* lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

On parle de *fraction décimale* lorsque l'on a une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, 10000 ...

Propriété d'égalité de fractions - admise

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

Exemples

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35} \qquad \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \qquad \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

Définitions

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la distance à zéro de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

Exemples

$$\frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4} \qquad \frac{45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

Remarque

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

Propriétés admises : Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

- 186 se divise par 2 car il est pair (il se termine par 6).
- 187 ne se divise pas par 2 car il est impair.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 237 est divisible par 3 car 2+3+7=12 et 12 est divisible par 3.
- 238 n'est pas divisible par 3 car 2+3+8=13 et 13 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

- 25 292 est divisible par 4 car 92 est divisible par 4, car 92=40+40+12 et 12 est divisible par 4.
- 45 267 n'est pas divisible par 4 car 67 n'est pas divisible par 67=40+27 et 27 n'est pas divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

- 185 se divise par 5 car il se termine par 5.
- 190 se divise par 5 car il se termine par 0.
- 187 ne se divise pas par 5.

Un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 ET par 3, donc s'il est pair ET si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 894 se divise par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - ET il se divise par 3 car 8+9+4=21 qui se divise par 3.
- 165 ne se divise pas par 6 car
  - il ne se divise par 2 (il est impair),
  - même si il se divise par 3 car 1+6+5 = 12 qui se divise par 3.
- 898 ne se divise pas par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - mais il ne se divise pas par 3 car 8+9+8=25 qui ne se pas divise par 3.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

- 567 est divisible par 9 car 5+6+7=18 et 18 est divisible par 9.
- 123 456 789 est divisible par 9 car 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 et 45 est divisible par 9 car 4+5=9 qui est divisible par 9.
- 238 n'est pas divisible par 9 car 2+3+8=13 et 13 n'est pas divisible par 9.

Remarque

Un nombre divisible par 9 est obligatoirement divisible par 3.

Définition

Un nombre est dit premier s'il n'a que 1 et lui-même comme diviseur (un nombre premier a exactement 2 diviseurs).

Exemples

Le nombre 3 est premier car ses diviseurs sont 1 et 3.
Le nombre 6 n'est pas premier car il se divise par 1, 2, 3 et 6.
Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Astuce pour trouver tous les nombres premiers en partant de 2 : crible d'Ératosthène (c'est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec : -276 à -194).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On écrit tous les nombres de 1 à 100.

1 n'est pas premier donc on le barre

Le premier nombre non barré est 2 donc c'est un nombre premier On barre tous les multiples de 2 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 2 est 3 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 3 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 3 est 5 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 5 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 5 est 7 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 7 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 7 est 11 ; c'est un nombre premier.

On s'arrête ici car $11^2 = 11 \times 11 > 100$.
Tous les nombres non barrés sont premiers.

Les nombres premiers jusqu'à 100 sont : ♥ **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23**, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Comment décomposer un nombre en produits de facteurs premiers.

On veut décomposer 450.

450		On réécrit le nombre à gauche de la ligne verticale
225	2	2 est le plus petit nombre premier qui divise 450 $450 = 2 \times 225$ On écrit 225 à gauche et 2 à droite
75	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 225 $225 = 3 \times 75$ On écrit 75 à gauche et 3 à droite
25	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 75 $75 = 3 \times 25$
5	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 25 $25 = 5 \times 5$
1	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 5 $5 = 1 \times 5$ On s'arrête lorsqu'il y a 1 dans la colonne de gauche.

$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

Exemples de décomposition en facteurs premiers

Décomposons 180		Décomposons 380	
180		380	
90	2	190	2
45	2	95	2
15	3	19	5
5	3	1	19
1	5		

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ $\quad$ $380 = 2^2 \times 5 \times 19$

Utilisation de la calculatrice

Décomposons 180

CASIO FX92	TI COLLEGE PLUS
1 8 0 EXE SECONDE ⊦	180 SECONDE ▸ SIMP

On obtient : $2^2 \times 3^2 \times 5$

Exemple de simplification de fraction

Simplifier la fraction $\dfrac{21000}{29700}$

Décomposons 21000		Décomposons 29700	
21000		29700	
10500	2	14850	2
5250	2	7425	2
2625	2	2475	3
875	3	825	3
175	5	275	3
35	5	55	5
7	5	11	5
1	7	1	11

$21000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7$ $\quad$ $29700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$

$$\frac{21000}{29700} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 11} = \frac{70}{99}$$

Comment transformer une écriture fractionnaire en fraction ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateur entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, …).

Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

Exemples

$$\frac{5{,}2}{2} = \frac{5{,}2 \times 10}{2 \times 10} = \frac{52 \div 2}{20 \div 2} = \frac{26 \div 2}{10 \div 2} = \frac{13}{5} \qquad \frac{4{,}51}{3{,}7} = \frac{4{,}51 \times 100}{3{,}7 \times 100} = \frac{451}{370}$$

Propriété d'addition de fractions de même dénominateur - admise

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

Exemples

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{3+6}{4} = \frac{9}{4} \qquad \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1-8}{3} = \frac{-7}{3} \qquad \frac{-1}{5} - \frac{8}{5} = \frac{-9}{5} \qquad \frac{-15}{6} - \frac{-8}{6} = \frac{-15-(-8)}{6} = \frac{-15+8}{6} = \frac{-7}{6}$$

Définition

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

Remarque

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

Comment additionner deux fractions de dénominateurs différents ?

On se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

Exemples

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{3} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{21}{6} + \frac{10}{6} = \frac{31}{6} \qquad \frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 51}{34 \times 51} + \frac{8 \times 34}{51 \times 34} = \frac{255}{1734} + \frac{272}{1734} = \frac{527}{1734}$$

Remarque

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici, $\frac{527}{1734} = \frac{31}{102}$.

Astuce

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs.
Pour cela, on décompose les deux nombres.

Décomposons 34	Décomposons 51
$\begin{array}{r\|l} 34 & \\ 17 & 2 \\ 1 & 17 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 51 & \\ 17 & 3 \\ 1 & 17 \end{array}$
34 = 2 × 17	51 = 3 × 17

On cherche un nombre qui contient tous les facteurs ci-dessus :

2 × 3 × 17 = 102.

$$\frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 3}{34 \times 3} + \frac{8 \times 2}{51 \times 2} = \frac{15}{102} + \frac{16}{102} = \frac{31}{102}$$

Propriété admise

Prendre une quantité d'une fraction c'est multiplier le nombre par la fraction.

Exemples

Prendre $\frac{3}{4}$ de 126 € c'est prendre $\frac{3}{4} \times 126$ €.

Rouler $\frac{2}{5}$ de 800 km c'est rouler $\frac{2}{5} \times 800$ km.

Remarque

Le mot « de » en français se traduit par « × » en mathématiques.

Comment multiplier un nombre par une fraction ?

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$	$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$	$\frac{a}{b} \times c = a \times (c \div b)$
$\frac{12}{6} \times 7 = (12 \div 6) \times 7 = 2 \times 7 = 14$	$\frac{2}{3} \times 9 = (2 \times 9) \div 3 = 18 \div 3 = 6$	$\frac{5}{7} \times 21 = 5 \times (21 \div 7) = 5 \times 3 = 15$

Notation

La fraction $\frac{p}{100}$ est notée p %

La fraction $\frac{15}{100}$ est notée 15 %

Exemple de problème

Sébastien achète un pull. Le prix affiché est de 65€, mais il bénéficie d'une remise de 15%.
Combien va-t-il payer ?

Calculons le montant de la remise

15 % de 65 € = $\frac{15}{100}$ de 65

$$= \frac{15}{100} \times 65 = (15 \times 65) \div 100 = 975 \div 100 = 9{,}75$$

La remise est de 9,75 €.

Je calcule le prix réduit.

65 – 9,75 = 55,25

Le prix réduit est de **55,25 €**.

PROPORTIONNALITE, VITESSES et ECHELLES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

↓ × 1,52

Propriété admise

$a \times \frac{b}{a} = b$ Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b$ $\quad$ $départ \xrightarrow{\times \frac{arrivée}{départ}} arrivée$

Exemples

$5 \xrightarrow{\times 3} 15$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\times 13} 65$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\times \frac{645}{5} \text{ ou } \times 129} 645$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7$ $\quad$ $7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.

2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5,1}{3} = 1,7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8,5}{5} = 1,7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11,9}{7} = 1,7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$\frac{4,80}{3} = 1,6$ $\quad$ $\frac{8,00}{5} = 1,6$ $\quad$ $\frac{11,00}{7} \approx 1,57$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ $\quad$ Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix : $65 \times 161 = 10\,465$ et $91 \times 115 = 10\,465$

donc $65 \times 161 = 91 \times 115$ donc $\frac{65}{91} = \frac{115}{161}$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix : 7×17 = 119 et 13×9 = 117

donc 7×17 ≠ 13×9 donc $\frac{7}{13} \neq \frac{9}{17}$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\frac{5}{4} = \frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

5 × ? = 4 × 7 *On effectue les produits en croix*

5 × ? = 28 *On simplifie chaque membre*

? = 5,6 *On divise par 5*

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$$\frac{5}{4} = \frac{7}{a} \qquad a = \frac{4 \times 7}{5} = 5{,}6$$

$$\frac{5}{4} = \frac{b}{3} \qquad b = \frac{3 \times 5}{4} = 3{,}75$$

$$\frac{c}{4} = \frac{7}{2} \qquad c = \frac{4 \times 7}{2} = 14$$

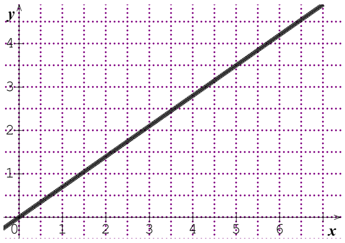
$$\frac{5}{d} = \frac{7}{3} \qquad d = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7}$$

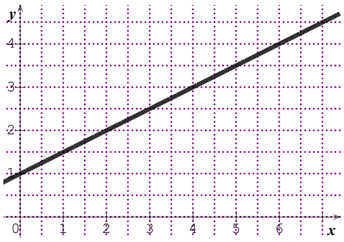
Propriété – admise

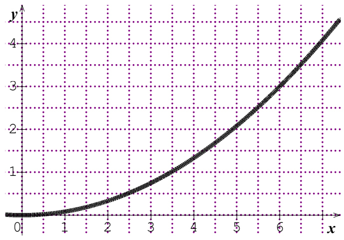
La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

- une droite
- qui passe par l'origine du repère

Exemples


Une droite qui passe par l'origine
Situation de proportionnalité


Une droite qui ne passe pas par l'origine


Pas une droite

Pas une situation de proportionnalité

II – Vitesse, distance et temps

3,4h ≠ 3h 40 min

3,4 h = 3h + 0,40h = 3h 24min

× 60

3h 18min ≠ 3,18h

3h 18 min = 3h + 0,30h = 3,3h

÷ 60

Conversion avec la calculatrice

CASIO FX92	Texas Instruments
3,15 EXE °'"	3,15 2nde π →DMS entrer

3,15 h = 3h 9min

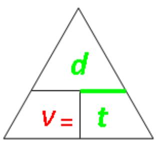
CASIO FX92	Texas Instruments
3 °'" 12 °'" EXE °'"	3 2nde π ° 12 2nde π ' entrer

3h 12min = 3,2h

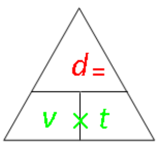
Propriétés admises

Si *d* est la distance, *t* le temps et *v* la vitesse moyenne on a alors

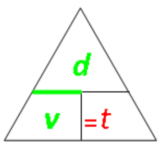
$$v = \frac{d}{t}$$



$$d = v \times t$$



$$t = \frac{d}{v}$$



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$$v=\frac{d}{t}=\frac{183}{3}=61$$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

$\downarrow \div 3$

$$?=\frac{183\times 1}{3}=61$$

Sa vitesse moyenne est de $\boxed{61 \text{ km/h}}$.

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$$d=v\times t=43\times 3=129$$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

$\downarrow \times 3$

$$?=\frac{43\times 3}{1}=129$$

La distance parcourue est $\boxed{129 \text{ km}}$.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$$t=\frac{d}{v}=\frac{12}{4,5}=\frac{8}{3}$$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

$\rightarrow \div 4,5$

$$?=12\div 4,5=\frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$h = $\boxed{2\text{h } 40\text{min}}$.

Exemple 4 : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km = 135 000 m	1 h = 3 600 s
?	1 s

$\downarrow \div 3\,600$

? = 135 000 ÷ 3 600 = 37,5

135 km/h = 37,5 m/s

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
? m = ? km	3 600 s = 1h

$\downarrow \times 3600$

? = 15 × 3600 = 54 000 m = 54 km

15 m/s = 54 km/h

III – Ratios

Remarque

Deux nombres a et b sont dans le *ratio* 2 : 3 si $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ | Trois nombres a, b, c sont dans le *ratio* 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{7}$

Exemple

$\frac{2}{3}=\frac{10}{15}=\frac{8}{12}$ donc 2, 10 et 8 sont dans le ratio 3 : 15 : 12

$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$ donc 10, 5 et 15 sont dans le ratio 12 : 6 : 18

Exemple 1
La vinaigrette est faite avec de l'huile, de la moutarde et du vinaigre dans le ratio 6 : 1 : 3.
On veut utiliser 2 cuillers de moutarde.
Combien faut-il prévoir des autres ingrédients ?

Je calcule la part des ingrédients

Ingrédient	Huile	Moutarde	Vinaigre
Ratio	6	1	3
Nombre de cuillers	?	2	??

$\times 2$

Le coefficient de proportionnalité est 2 donc il faut 2×6 = **12 cuillers d'huile** et 2×3 = **6 cuillers de vinaigre**.

Exemple 1
La vinaigrette est faite avec de l'huile, de la moutarde et du vinaigre dans le ratio 6 : 1 : 3.
On veut Obtenir 5 litres de vinaigrette.
Combien faut-il prévoir de chaque ingrédient ?

Je calcule la part des ingrédients

Ingrédient	Huile	Moutarde	Vinaigre	Total
Ratio	6	1	3	10
Volume	?	?	?	5 litres

$\times 0{,}5$

Le coefficient de proportionnalité est 0,5 donc il faut 0,5×6 = **3 L d'huile** et 0,5×1 = **1,5 L de moutarde** et 0,5×3 = **1,5 L de vinaigre**.

IV – Echelles

Remarque

Pour représenter la réalité, il peut être nécessaire de l'agrandir ou de la réduire.
S'il s'agit d'un agrandissement, on multiplie les distances par un nombre supérieur à 1.
S'il s'agit d'une réduction, on multiplie les distances par un nombre entre 0 et 1.

Réduction

En bas à gauche, il est indiqué que l'échelle est de 1 : 10 000 ; on devrait écrire $\frac{1}{10\,000}$.

Cela signifie que pour passer de la réalité à la carte, on a multiplié les distances par $\frac{1}{10\,000}$.

Par exemple, si on cherche les points à 350 m de l'entrée du collège, on doit chercher la distance correspondante sur la carte, on calcule :

$$350 \times \frac{1}{10\,000} = 0{,}0350$$

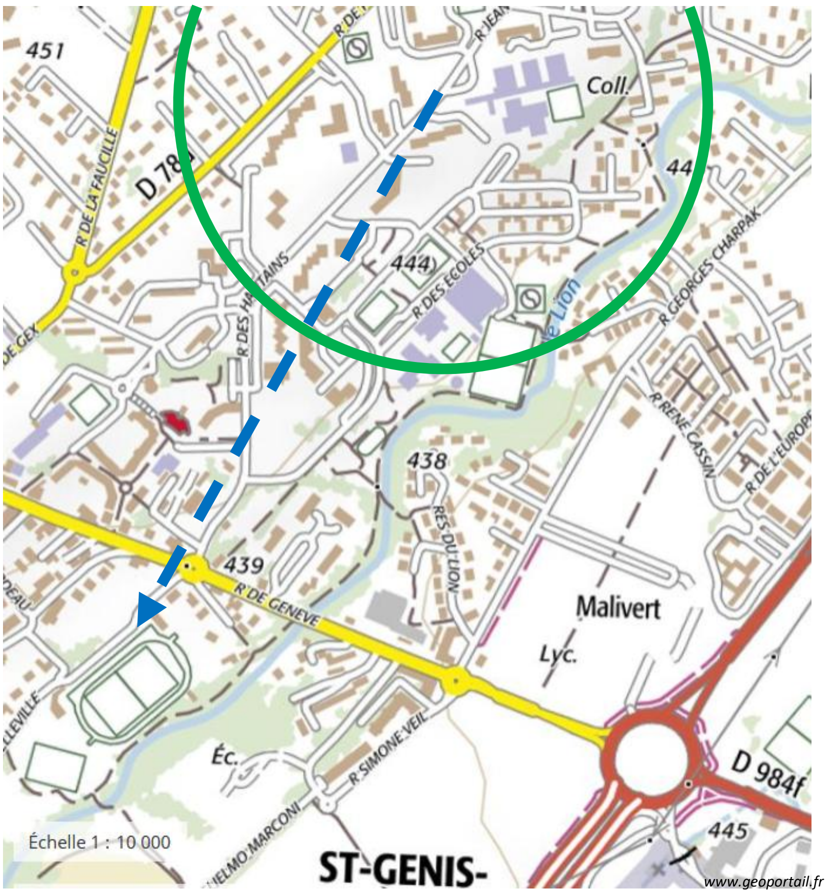
Sur la carte, cela correspond à 0,035 m = 3,5 cm
Ce sont donc tous les points sur le cercle vert.

L'échelle $\frac{1}{10\,000}$ signifie aussi que 1 cm sur la carte représente 10 00 cm = 100 m de la réalité.
On aurait aussi pu la trouver avec un tableau de proportionnalité en utilisant 350 m = 35 000 cm

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
?	35 000 cm

$$? = \frac{1 \times 35\,000}{10\,000} = 3{,}5$$

On retrouve le rayon de 3,5 cm.



Pour aller de l'entrée du collège au stade, il y a 8 cm (la flèche bleue pointillée). On peut déterminer la distance entre le collège et le stade :

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
8 cm	?

$$? = \frac{8 \times 10\,000}{1} = 80\,000$$

Il y a 80 000 cm = 800 m pour aller du collège au stade.

Agrandissement

L'échelle est ici de $\frac{20}{1}$. Cela signifie que pour passer de la réalité à la photo, on a multiplié les distances par $\frac{20}{1}$.
Cela signifie aussi que 20 cm sur la photo représentent 1 cm dans la réalité.

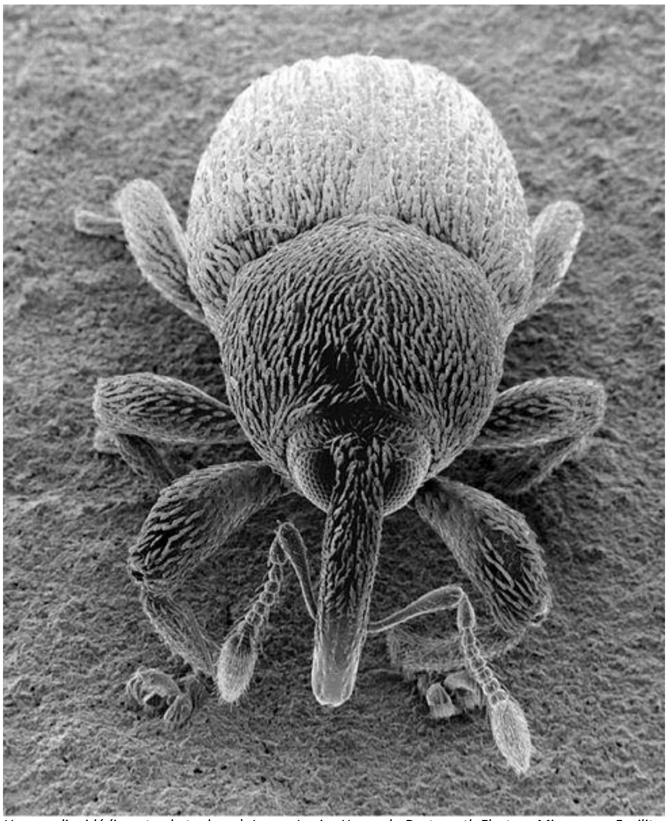
Pour connaître sa taille réelle, on la mesure sur la photo ; on trouve ici 8,6 cm.

Je calcule sa taille réelle :

Photo	Réalité
20 cm	1 cm
8,6 cm	?

$$? = \frac{8{,}6 \times 1}{20} = 0{,}43$$

La taille est donc de 0,43 cm = 4,3 mm.



Un curculionidé (insecte phytophage). Image Louisa Howard - Dartmouth Electron Microscope Facility.

CALCUL LITTERAL

I – L'utilisation de lettres dans les calculs

Histoire

Le calcul littéral (calcul avec des lettres) appelé aussi calcul algébrique, du mot algèbre, est un puissant outil développé par le mathématicien français François Viète (1540 – 1603) qui a attribué une lettre à des quantités inconnues dans des calculs, mais aussi à des coefficients.

L'aire d'un carré est A = $c \times c$; le périmètre d'un cercle est $P = \pi \times d$.

L'usage de la lettre X remonte à René Descartes. Mais l'idée de donner un nom à l'inconnue d'un problème est plus ancienne encore, puisqu'elle vient du mathématicien grec Diophante III^{e} siècle, qui l'appelait « arithmos », le nombre. Plus tard, le mathématicien perse Al-Kwarizmi IX^{e} siècle la nomma « shay », la chose en arabe. Ce mot est plus connu en français populaire dans sa forme plurielle chouïa, "un chouïa" signifiant "un peu".

Cette pratique parvint en France grâce aux Espagnols, qui transcrivaient ce mot en « xay ». Descartes simplifia en ne gardant que l'initiale, d'où « X ». Son usage s'étendit ensuite, en particulier au monde judiciaire.

Al-Khwarizmi, (latinisé en Algoritmi ou Algorizmi), né dans les années 780, probablement à Khiva dans la région du Khwarezm (d'où il prend son nom), dans l'actuel Ouzbékistann, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse, membre de la Maison de la sagesse de Bagdad. Ses écrits, rédigés en langue arabe, puis traduits en latin à partir du XII^{e} siècle, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe. Sa vie s'est déroulée en totalité à l'époque de la dynastie abbasside.

Son nom latinisé est à l'origine du mot algorithme et le titre de l'un de ses ouvrages (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison) est à l'origine du mot algèbre. L'utilisation des chiffres arabes et leur diffusion dans le Moyen-Orient et en Europe sont dues à un autre de ses livres nommé Traité du système de numération des Indiens qui fut diffusé via la langue arabe dans tout l'empire abbasside. Al-Khawarizmi a classifié les algorithmes existants, en particulier selon leurs critères de terminaison, mais ne revendique pas leur invention : l'algorithme le plus connu du monde est celui d'Euclide et les premiers algorithmes connus le furent, sans surprise, dans un pays devant gérer des calculs élaborés de l'impôt : à Babylone.

⚠ Attention

Il faut prêter une attention toute particulière à la graphie de la lettre x pour ne pas la confondre avec le signe de multiplication ×.

Remarque calcul de $5 \times (x + 3)$

Géométrique	" Répétitif "	Avec la simple distributivité
x 3 5 5x 15 $5 \times (x + 3) = 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $= 5 \times x + 5 \times 3$ $= 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5x + 15$

Propriété simple distributivité - admise

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

Exemples de distribution

$5 \times (2x + 7) = 10x + 35$ $8 \times (x - 3) = 8x - 24$ $-6 \times (x + 7) = -6x - 42$ $-4 \times (x - 7) = -4x + 28$

Remarque sur la réduction des produits

On peut toujours réduire les produits.

$2x \times 3x$	$-5 \times 3x$	$3x \times 7y$
$= 6x^2$	$= -15x$	$= 21xy$

Remarque sur la réduction de sommes

$3x + 2x$	$15x - 8x$	$4x - 12x$	$15x^2 - 8x^2$	$33x - 5x^2 + 7x + 11x^2$
$= 5x$	$= 7x$	$= -8x$	$= 7x^2$	$= 40x + 6x^2$

$5x^2 + 3x$ ne peut pas se réduire

Remarque

Dans tous les exercices, il faudra réduire les expressions (*même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé*).

Remarque gestion du signe « - »

$-(2x + 7) = -2x - 7$ $-(x - 3) = -x + 3$ $-(-3x + 7) = +3x - 7$ $-(-6x - 7) = +6x + 7$

Exemples complexes

$3\,(x + 5) + 7\,(x + 4) = 3x + 15 + 7x + 28 = 10x + 43$

$5\,(x + 7) + 8\,(x - 3) = 5x + 35 + 8x - 24 = 13x + 11$

$6\,(x - 4) - 9\,(x + 2) = 6x - 24 - 9x - 18 = -3x - 42$

$6\,(x - 7) + 9x\,(3x - 2) = 6x - 42 + 27x^2 - 18x = 27x^2 -12x - 42$

Propriété double distributivité

$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$

	c	d
a	**ac**	**ad**
b	**bc**	**bd**

Démonstration

$(a + b)\,(c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = ac + ad + bc + bd$

Exemples

$(x + 3)\,(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$

$(x + 2)\,(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

$(x + 5)\,(x - 4) = x^2 - 4x + 5x - 20 = x^2 + x - 20$

$(x - 8)\,(x + 3) = x^2 + 3x - 8x - 24 = x^2 - 5x - 24$

$(x - 4)\,(x - 6) = x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$

$(2x + 3)\,(3x + 7) = 6x^2 + 14x + 9x + 21 = 6x^2 + 23x + 21$

Exemples complexes

$(x + 5)\,(x + 4) + (x + 2)\,(x + 9) = x^2 + 4x + 5x + 20 + x^2 + 9x + 2x + 18 = 2x^2 + 20x + 38$

$(x + 5)\,(x - 4) + (x - 2)\,(x - 9) = x^2 - 4x + 5x - 20 + x^2 - 9x - 2x + 18 = 2x^2 - 10x - 2$

$(x + 3)\,(x - 2) + 5\,(x - 6)\,(x + 7) = x^2 - 2x + 3x - 6 + 5 \times (x^2 + 7x - 6x - 42) = x^2 + x - 6 + 5x^2 + 35x - 42x - 210$
$= 6x^2 - 6x - 216$

$(x - 2)\,(x - 3) - (x - 5)\,(x + 4) = x^2 - 3x - 2x + 6 - (x^2 + 4x - 5x - 20) = x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 4x + 5x + 20 = - 4x + 26$

$(2x + 7)\,(3x - 4) - 8\,(x + 2)\,(x - 5) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8 \times (x^2 - 5x + 2x - 10) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8x^2 + 40x - 16x + 80$
$= -2x^2 + 37x + 52$

II – Equations

Histoire

Dans l'Antiquité, vers -2000 avant JC, les Babyloniens savaient déjà résoudre des problèmes par équations, mais leur résolution n'a rien à voir avec les techniques actuelles. On le sait grâce à un célèbre document conservé au British Muséum à Londres, le Papyrus Rhind, qui date de -1650.

Le Papyrus Rhind a été écrit par un scribe égyptien nommé Ahmès. Son nom vient de l'Écossais Henry Rhind qui l'acheta en 1858 à Louxor. Il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes, en Egypte Actuellement conservé au British Museum (Londres), il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5 m de longueur et 32 cm de large. Ahmès indique que son papyrus est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers -2000) remontant aux Babyloniens.

« J'ai une pierre mais je ne l'ai pas pesée. Après avoir enlevé un septième de son poids, j'ai pesé le tout et j'ai trouvé 1 ma-na (unité de masse). Quel était le poids de la pierre à l'origine ? ».

Définition

$$\overbrace{\underbrace{5x + 5}_{\text{Membre de gauche}} = \underbrace{3x - 17}_{\text{Membre de droite}}}^{\text{Une équation}}$$

Remarque

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

Définition

On dit qu'un nombre est *une solution* d'une équation l'égalité entre les deux membres est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples

Pour l'équation $5x + 5 = 3x - 17$, tester si 2 et -11 sont des solutions.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = 2$ alors • le membre de gauche devient $5 \times 2 + 5 = 15$ • et le membre de droite devient $3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15$ et $3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $5x + 5$ | $3x - 17$ $= 5 \times 2 + 5$ | $= 3 \times 2 - 17$ $= 15$ | $= -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = -11$ alors • le membre de gauche devient $5 \times (-11) + 5 = -50$ • et le membre de droite devient $3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50$ et $3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $5x + 5$ | $3x - 17$ $= 5 \times (-11) + 5$ | $= 3 \times (-11) - 17$ $= -50$ | $= -50$ Donc **-11 est une solution**.

Définition

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

Exemples

Equation n'ayant pas de solution	Equation ayant une seule solution	Equation ayant une infinité de solution
$2x + 3 = 2x + 5$	$5x + 5 = 3x - 17$	$2\,(x + 5) - 2 = 2x + 8$
On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution.	La solution de cette équation est -11.	On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie. Quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace x, l'égalité sera vraie.

Remarque

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

Propriété - admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

1. On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
2. On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

Exemples d'application de la propriété

$x + 5 = 8$ $-5 \quad -5$ On veut faire disparaître +5 ; il faut faire -5 dans les deux membres. $x \quad = 3$ La solution est **3**.	$x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3}$ On veut faire disparaître $+\frac{1}{3}$; il faut faire $-\frac{1}{3}$ dans les deux membres. $x \quad = \frac{1}{6}$ La solution est $\mathbf{\frac{1}{6}}$.
$x - 7 = 4$ $+7 \quad +7$ On veut faire disparaître -7 ; il faut faire +7 dans les deux membres. $x \quad = 11$ La solution est **11**.	$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $+\frac{1}{4} \quad +\frac{1}{4}$ On veut faire disparaître $-\frac{1}{4}$; il faut faire $+\frac{1}{4}$ dans les deux membres. $x \quad = \frac{3}{4}$ La solution est $\mathbf{\frac{3}{4}}$.
$3x = 12$ $\div 3 \quad \div 3$ On veut faire disparaître le 3 devant le x donc le $\times 3$ devant le x ; il faut diviser les deux membres par 3. $x \quad = 4$ La solution est **4**. $\frac{x}{5} = 2$ $\times 5 \quad \times 5$ On veut faire disparaître la division par 5 ; il faut faire $\times 5$ dans les deux membres. $x \ = 10$ La solution est **10**.	$-7x = 42$ $\div(-7) \quad \div(-7)$ On veut faire disparaître le -7 devant le x donc le $\times(-7)$ devant le x ; il faut diviser les deux membres par -7. $x \quad = -6$ La solution est **-6**. $\frac{x}{-3} = 7$ $\times(-3) \quad \times(-3)$ On veut faire disparaître la division par (-7) ; il faut faire $\times(-7)$ dans les deux membres. $x \quad = -21$ La solution est **-21.**

Exemple de résolution d'une équation

Résoudre l'équation $2\,(x + 5) = 6x + 7$.

$2\,(x + 5) = 6x + 7$	On réécrit l'équation
$2x + 10 = 6x + 7$	On simplifie l'écriture de chacun des membres en développant et réduisant
$-6x \quad -10 \qquad -6x \quad -10$ $-4x = -3$	On isole les inconnues dans un membre et les nombres dans l'autre en utilisant le point 1 de la propriété ci-dessus.
$\div(-4) \qquad \div(-4)$ $x = 0{,}75$	Pour trouver x, on divise par le nombre devant x en utilisant le point 2 de la propriété ci-dessus.
Si $x = 0{,}75$ alors $2\,(x + 5) = 2 \times (0{,}75 + 5) = 11{,}5$ $6x + 7 = 6 \times 0{,}75 + 7 = 11{,}5$	On teste si le nombre trouvé est bien une solution de l'équation en remplaçant dans l'équation du départ.
La solution de l'équation est $\boxed{\mathbf{0{,}75}}$.	On conclue par une phrase.

En contrôle, il faut écrire tout ce qui est en noir (la colonne de gauche) ci-dessus.

III – Problèmes

Exemple 1

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des poules et des lapins. J'ai compté 174 têtes et 400 pattes.
Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

Soit L le nombre de lapins.	Expliciter l'inconnue. C'est souvent la question qui nous indique quelle inconnue choisir.
(tableau ci-dessous) $4 \times L + 2 \times (174 - L) = 400$	Ecrire l'équation
$4L + 348 - 2L = 400$ $2L + 348 = 400$ $-348 \qquad -348$ $2L = 52$ $\div 2 \qquad \div 2$ $L = 26$	Résoudre l'équation
Il y a **26 lapins** et 174-26 = **148 poules**.	Interpréter le résultat
Vérification : Têtes : 26 + 148 = 174 Pattes : 4×26 + 2×148 = 400 *C'est bon*	Vérifier sur les données du problème

	Lapins	Poules	Total
Têtes	L	174 - L	174
Pattes	4 × L	2 × (174 – L)	400

Exemple 2

Jules à 8 ans et son père a 42 ans.
Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

Soit x le nombre d'années à attendre.

	Jules	Père
Aujourd'hui	8	42
Dans x années	$8 + x$	$42 + x$

Père = 3 × Jules

$42 + x = 3 \times (8 + x)$

$42 + x = 24 + 3x$
$-24 \quad -x \quad -24 \quad -x$
$18 = 2x$
$\div 2 \quad \div 2$
$9 = x$

Il faut attendre **9 ans**

Vérification : dans 9 ans
Jules : 8 + 9 = 17 ans
Père : 42 + 9 = 51 ans
3 × 17 = 51
C'est bon

Exemple 3

Un kilogramme de poire coûte un euro de plus qu'un kilogramme de pommes.
Marion a acheté trois kilos de pommes et cinq kilos de poires.
Elle a payé vingt-cinq euros.
Quel est le prix d'un kilo de pommes ? de poires ?

Soit x le prix d'un kilogramme de pommes.

	Pommes	Poires	Total
Quantité en kg	3	5	
Prix au kg	x	$x + 1$	
Prix à payer	$3 \times x$	$5 \times (x + 1)$	25

$3 \times x + 5 \times (x + 1) = 25$

$3x + 5x + 5 = 25$
$8x + 5 = 25$
$-5 \quad -5$
$8x = 20$
$\div 8 \quad \div 8$
$x = 2{,}5$

Les pommes coûtent **2,5 €** au kilo
et les poires coûtent 2,5 + 1 = **3,5 €** au kilo.0

Vérification :
Pommes : 3 × 2,5 = 7,5
Poires : 5 × 5,5 = 17,5
Total : 7,5 + 17,5 = 25
C'est bon

Exemple 4

Marina et Karima pensent au même nombre.
Marina ajoute 8 et multiplie le résultat par 3.
Karima multiplie le résultat par 5 et ajoute 6.
Curieusement, elles trouvent le même résultat.
A quel nombre ont-elles pensé au départ ?

Soit x le nombre pensé au départ.

	Marina	Karima
Départ	x	x
Après calcul	$3 \times (x + 8)$	$5 \times x + 6$

$3 \times (x + 8) = 5 \times x + 6$

$3x + 24 = 5x + 6$
$-3x \quad -6 \quad -3x \quad -6$
$18 = 2x$
$\div 2 \quad \div 2$
$9 = x$

Elles ont pensé au nombre **9**.

Vérification :
Marina : 9 → 9 + 8 = 17 → 17 × 3 = 51
Karima : 9 → 9 × 5 = 45 → 45 + 6 = 51
C'est bon

Exemple 5

Kassandra et Arthur ont le même nombre de billes.
Si Arthur donne 10 billes à Kassandra, elle en aura alors deux fois plus que lui.
Combien ont-ils de billes au départ ?

Soit x le nombre de billes au départ.

	Kassandra	Arthur
Départ	x	x
Après calcul	$x + 10$	$x - 10$

Kassandra = 2 × Arthur

$x + 10 = 2 \times (x - 10)$

$x + 10 = 2x - 20$
$30 = x$

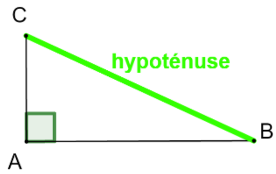
Ils avaient chacun 30 billes.

Vérification :
Kassandra : 30 → 30 + 10 = 40
Arthur : 30 → 30 – 10 = 20
2 × 20 = 40
C'est bon

Triangles rectangles : PYTHAGORE

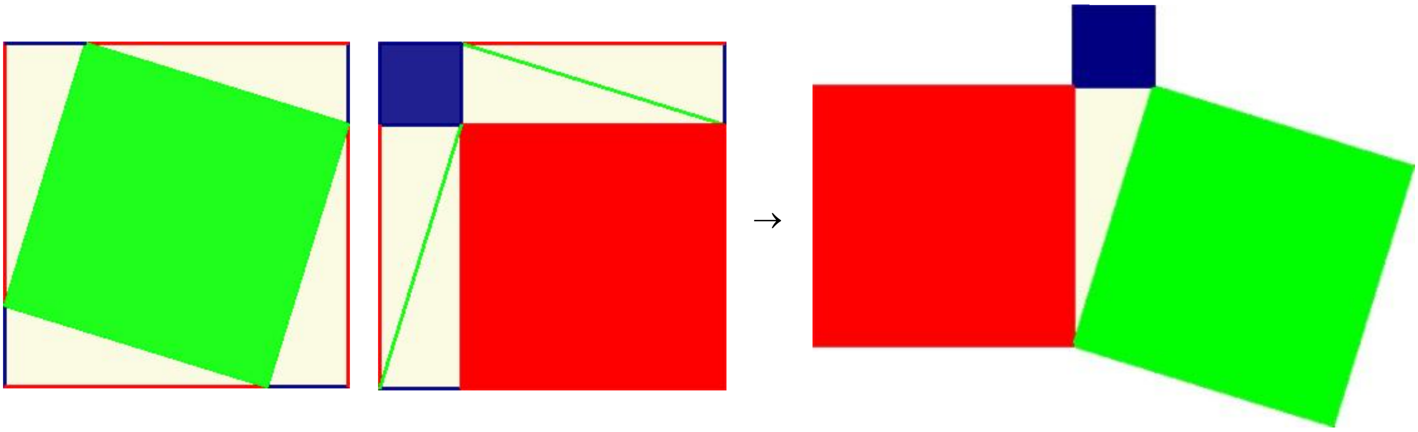
Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.



Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

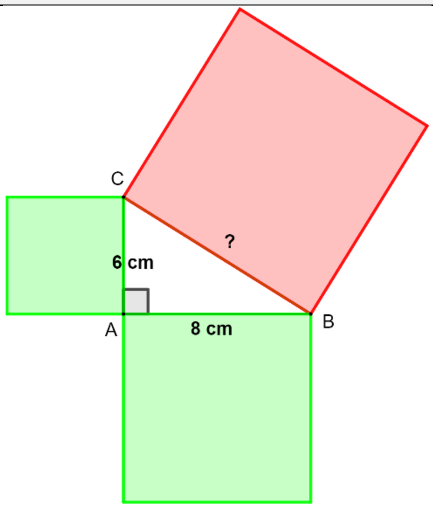
⚠ ***Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.***

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- AB = 6 cm
- AC = 8 cm

Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 6^2 + 8^2$

$BC^2 = 36 + 64$

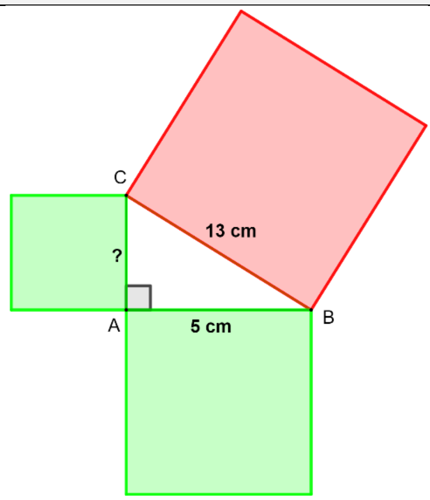
$BC^2 = 100$

$BC = \sqrt{100} = \boxed{10 \text{ cm}}$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- AB = 5 cm
- BC = 13 cm

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$13^2 = 5^2 + AC^2$

$169 = 25 + AC^2$

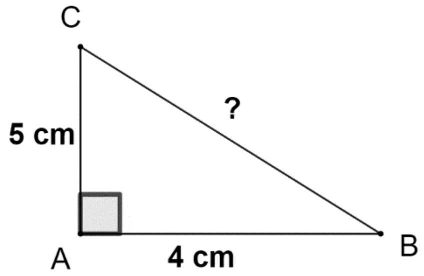
$-25 \quad -25$

$144 = AC^2$

$AC = \sqrt{144} = \boxed{12 \text{ cm}}$

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que AB = 4 cm et AC = 5 cm.
Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 5^2$
$BC^2 = 16 + 25$
$BC^2 = 41$
BC = $\sqrt{41}$ » 6,4 cm

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape	
6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{EXE}}$	6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ =

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape	
$\boxed{\text{SECONDE}}$ $\boxed{x^2}$ 100 $\boxed{\text{EXE}}$	$\boxed{\text{SECONDE}}$ $\boxed{x^2}$ 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 3 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm. *Quelle est la nature de ABC ?*	*Soit ABC un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 7 cm et AC = 6 cm.* *Quelle est la nature de ABC ?*
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté. $\begin{array}{r\|l} AC^2 & AB^2 + BC^2 \\ = 5^2 & = 3^2 + 4^2 \\ = 25 & = 9 + 16 \\ & = 25 \end{array}$ Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, **ABC est rectangle en B** *(car [AC] est l'hypoténuse).*	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté. $\begin{array}{r\|l} BC^2 & AB^2 + AC^2 \\ = 7^2 & = 5^2 + 6^2 \\ = 49 & = 25 + 36 \\ & = 61 \end{array}$ Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors **ABC n'est pas rectangle**.

FRACTIONS : multiplications et divisions

Propriété du signe des fractions

Une fraction est une division, donc la règle des signes s'applique pour déterminer le signe d'une fraction (on compte le nombre de termes négatifs).

Exemples

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} = -\frac{-3}{-4} = -0{,}75$$

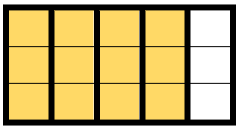
Il y a 1 (ou 3) terme(s) négatif(s), donc le résultat est négatif.

$$\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = +0{,}75$$

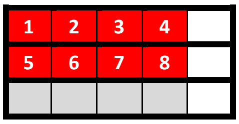
Il y a 2 termes négatifs, donc le résultat est positif.

Remarque

Quatre cinquièmes valent



Deux tiers de quatre cinquièmes valent huit quinzièmes



Deux tiers de quatre cinquièmes s'écrit $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ et on voit que $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

Propriété de multiplication de fractions - admise

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Astuce

Pour déterminer le signe, on utilise la règle des signes.

Exemples

$$\frac{5}{7} \times \frac{9}{11} = \frac{5 \times 9}{7 \times 11} = \frac{45}{77}$$

$$\frac{-5}{3} \times \frac{-8}{-4} = -\frac{5 \times 8}{3 \times 4} = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3}$$

Il y a 3 termes négatifs, donc le résultat est négatif.

⚠ $2 \times \frac{3}{5} \neq \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ mais $2 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$

Définition

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a vaut 1. L'inverse de a est noté : a^{-1}.

Exemples

- L'inverse de 2 est 0,5 car 2 × 0,5 = 1
- L'inverse de 4 est 0,25 car 4 × 0,25 = 1
- L'inverse de 0,8 est 1,25 car 0,8×1,25 = 1

Propriété

L'inverse du nombre *a* vaut $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ vaut $\frac{b}{a}$.

Démonstrations

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$$

Exemples

Nombre	5	-3	$\frac{2}{7}$	$\frac{-3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
Inverse	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	N'existe pas

Ne pas confondre inverse et opposé.
L'opposé de 2 est -2
L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$

Définition

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

Exemples

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{-2}{3} \div \frac{5}{7} = -\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = -\frac{14}{15}$$

$$\frac{7}{3} \div 2 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$8 \div \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5}$$

On inverse uniquement le nombre se trouvant après le symbole de division et on ne change pas celui qui est avant.

Application

Parcours bleu
Parcours rouge

Remarques

$\frac{3}{5}$ est une notation de 3 ÷ 5 et vaut 0,6

Il n'est pas possible de donner une valeur décimale exacte pour toutes les fractions, par exemple : $\frac{1}{3}$ » 0,33

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ » } 2{,}67$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \text{ » } 0{,}17$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Attention à la position du signe d'égalité lorsqu'il y a des fractions à "étages".

Exemple de calcul « complexe »

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{-1} = \frac{20}{-4} = -5$$

I – Théorème de Thalès

Rappel admise

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad \text{départ} \xrightarrow{\times \frac{\text{arrivée}}{\text{départ}}} \text{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow[\times 129]{\times \frac{645}{5} \text{ ou}} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

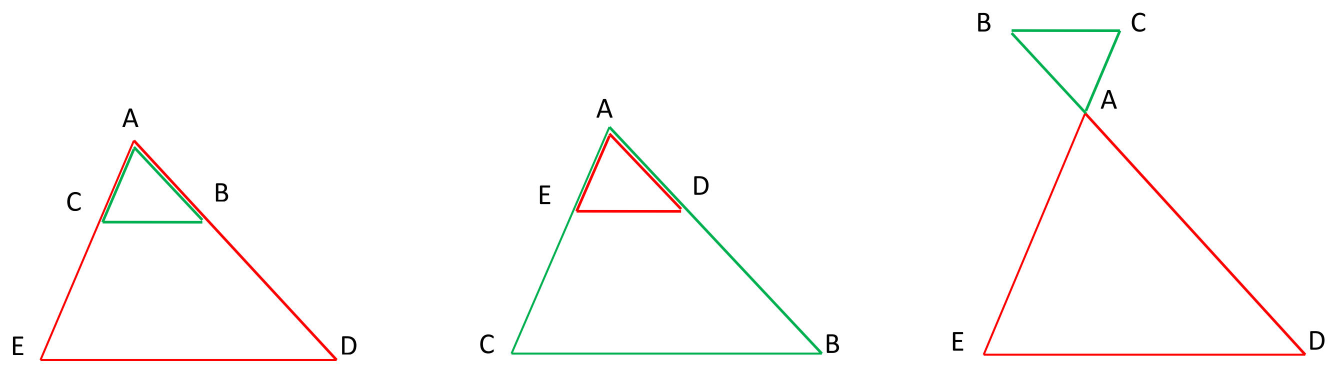
Soit ABC un triangle.

Si D∈(AB) et E∈(AC) et (BC)//(DE) alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si D∈(AB) et E∈(AC) tels que (BC)//(DE) alors $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ $\quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$



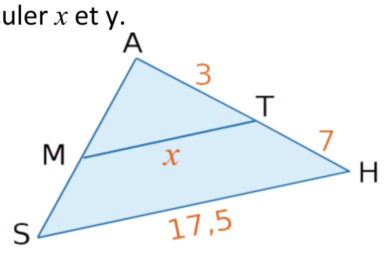
"Démonstration"

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

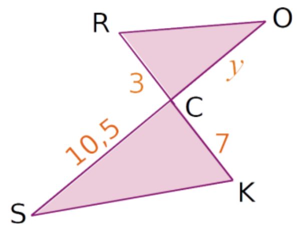
Exemples

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.



(MT)//(SH)



(RO)//(SK)

Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme (MT)//(HS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{AM}{AS} = \frac{x}{17{,}5}$$

$$x = \frac{3 \times 17{,}5}{10} = 5{,}25 \text{ cm}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme (RO)//(KS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CR}{CK} = \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{y}{10{,}5} = \frac{RO}{SK}$$

$$y = \frac{3 \times 10{,}5}{7} = 4{,}5 \text{ cm}$$

Propriété réciproque de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

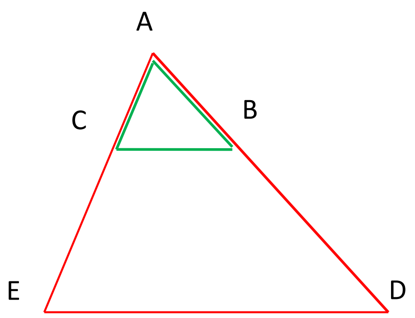
alors **(BC)//(DE)**

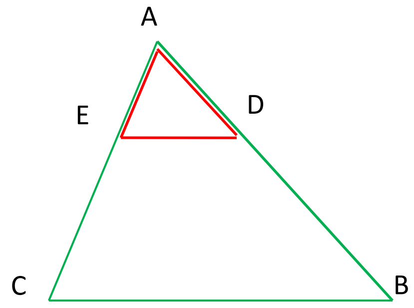
Propriété contraposée de Thalès - admise

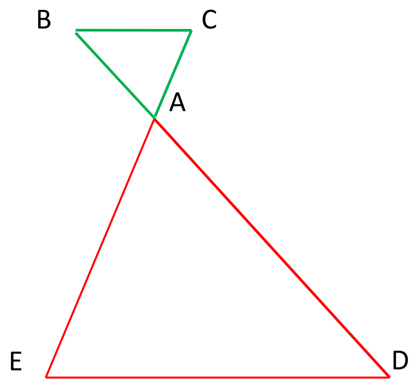
Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$

alors **(BC) et (DE) ne sont pas parallèles**

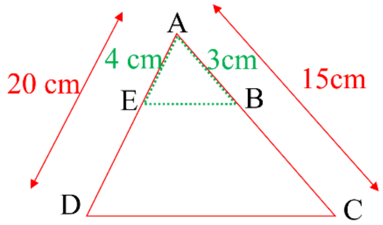


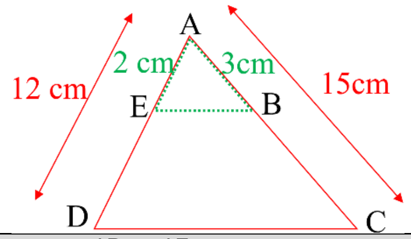




Exemples

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.





Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$. On calcule séparément ces deux rapports

$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{15}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$

$\frac{AE}{AD} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE)//(CD).

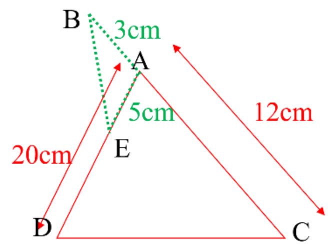
$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$\frac{AE}{AD} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

donc $\frac{AB}{AC} \neq \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.



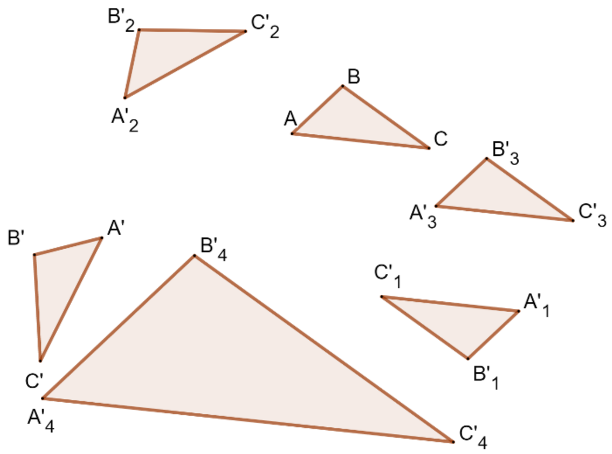
On a : $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

On a aussi : $\frac{AE}{AD} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA) sans appartenir à [DA].

II – Triangles semblables



Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels

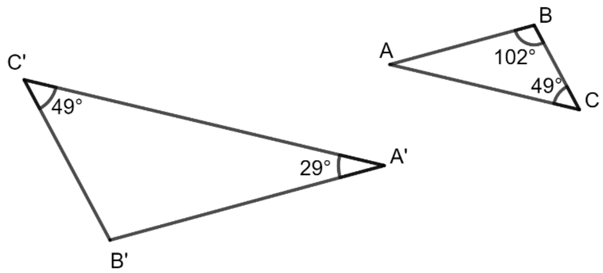
ou

- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles



Dans le triangle ABC, on a

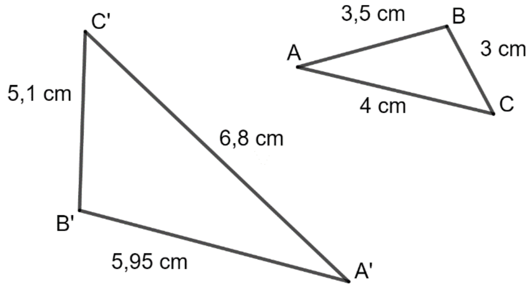
$\underline{\widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180 - (102 + 49) = 29°}$.

Dans le triangle A'B'C', on a

$\underline{\widehat{B'} = 180 - (\widehat{A'} + \widehat{C'}) = 180 - (49 + 29) = 102°}$.

On a donc $\underline{\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}}$ et $\underline{\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}}$ et $\underline{\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Exemple 2 : avec des côtés proportionnels



$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{5,95}{3,5} = 1,7$

$\dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{6,8}{4} = 1,7$

$\dfrac{C'B'}{CB} = \dfrac{5,1}{3} = 1,7$

Donc $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{C'B'}{CB}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

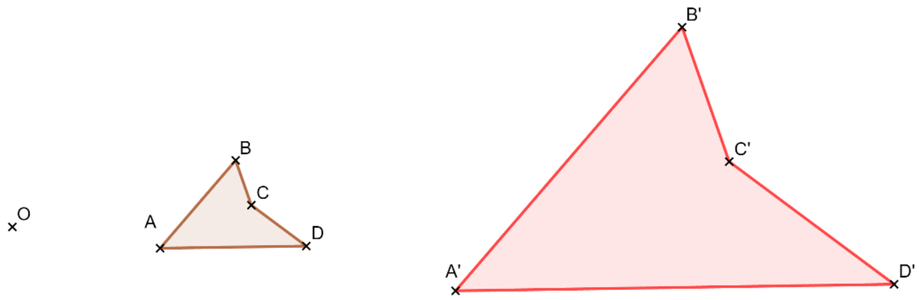
III – Homothéties : agrandissement/réduction

Définition

Le point A' est l'image du point A par l'*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

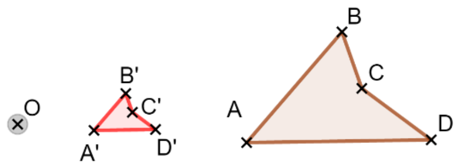
- A' ∈ (OA)
- OA' = k × OA

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'*agrandissement*.



Le quadrilatère A'B'C'D' est agrandissement de ABCD de centre O et de coefficient 3.

Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.

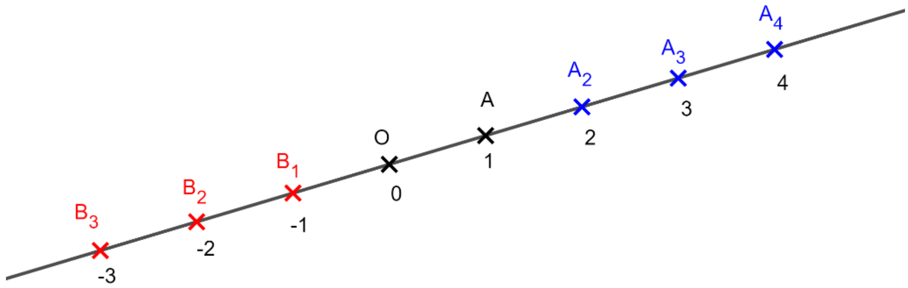


Le quadrilatère A'B'C'D' est la réduction de ABCD de centre O et de coefficient $\frac{1}{3}$.

Construction

Pour construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si k>0, tracer [OA) puis mesurer [OA] et placer A' sur [OA) tel que OA' = k × OA
- Si k<0, tracer [AO) puis mesurer [OA] et placer A' sur [AO) tel que OA' = (*distance à zéro de* k) × OA



- A_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d'agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l'année).

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu E'.
6. Tracer le segment [B'E'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

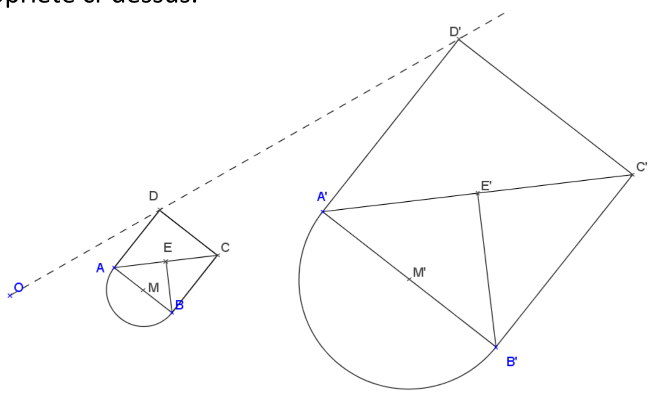


Image par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Caractériser

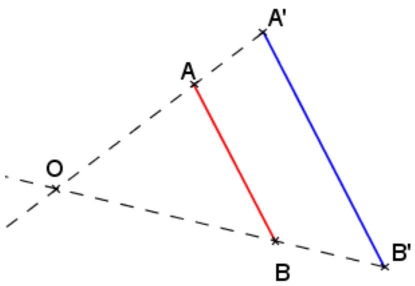
Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites [A'A) et [B'B) ; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer [OA] et [OA'].

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA\prime}{OA} = \frac{OB\prime}{OB}$.



PUISSANCES de 10 et NOTATION SCIENTIFIQUE

Définition

Le nombre noté a^n qui se lit « a exposant n » est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$$

Exemples

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ $\quad$ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ $\quad$ $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

Remarques

a^2 se lit "a exposant 2" ou "a au carré"
a^3 se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

Astuce

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de a^n est positif si :

- a est positif
- ou a est négatif et n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 …).

Le signe de a^n est négatif si : a est négatif et n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 …).

Exemples

4^5 est positif
$(-4)^5$ est négatif car il y a **5** facteurs négatifs.
$(-10)^8$ est positif car il y a **8** facteurs négatifs.

Application

Parcours vert

Propriété de priorité opératoire - admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On calcule les puissances.
3. On effectue les multiplications et divisions.
4. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple

$4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3)$
$= 4 \times 5^2 \times (5 - 12)$
$= 4 \times 5^2 \times (-7)$
$= 4 \times 25 \times (-7)$
$= 100 \times (-7)$
$= -700$

Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances

$(-2)^4 = 16$ car $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$

$-2^4 = -16$ car $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction.
On calcule d'abord la puissance.

Propriété 1 - admise

$x^a \times x^b = x^{a+b}$ $\quad$ S'il y a le même nombre en bas, on additionne les puissances

Exemples

$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$ $\quad$ $3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$ $\quad$ $(-2)^3 \times (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10}$

"Justification"

$2^3 \times 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{3+7} = 2^{10}$

⚠ Attention à la consigne car on peut attendre deux résultats différents.

Calcule	Mettre $2^3 \times 2^5$ sous la forme d'une seule puissance
$2^3 \times 2^5 = 8 \times 32$ $= \mathbf{256}$ *Le résultat est un nombre (entier ou décimal) ou une fraction*	$2^3 \times 2^5$ $= \mathbf{2^8}$ *Le résultat est* ***une*** *puissance*

Propriété 2 - admise

$$(x^a)^b = x^{a \times b}$$

Si les puissances sont imbriquées, on multiplie les exposants.

Exemples

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12} \qquad (10^2)^4 = 10^{2\times4} = 10^8$$

"Justification"

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12}$$

Remarque

¬ ÷ 10 ¾ ¾ × 10 ®	¬ ÷ 10 ¾ ¾ × 10 ®	¬ ÷ 10 ¾ ¾ × 10 ®	¬ ÷ 10 ¾ ¾ × 10 ®	¬ ÷ 10 ¾ ¾ × 10 ®	¬ ÷ 10 ¾ ¾ × 10 ®	¬ ÷ 10 ¾ ¾ × 10 ®	¬ ÷ 10 ¾ ¾ × 10 ®	¬ ÷ 10 ¾ ¾ × 10 ®
10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000	10 000
$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$					
$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^1}$					

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10^1}$$

Propriété 3 - admise

Si x ^{1} 0 alors $x^0 = 1$

Exemples

$4^0 = 1$ $\qquad$ $(-4)^0 = 1$ $\qquad$ p^0 = 1 $\qquad$ $2{,}7^0 = 1$ $\qquad$ $(-4{,}8)^0 = 1$ $\qquad$ $-9^0 = -1$

Propriété 4 - admise

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

L'exposant négatif devient « 1 sur … »

Exemples

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \qquad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Propriété - admise

Soit n un entier positif.
10^n s'écrit avec un "1" suivi de n "0".
10^{-n} s'écrit "0,0…01" avec n "0" au total en comptant celui avant la virgule.

Exemples

10^7 = 1**0000000** $\qquad$ 10^{-8} = **0,0000000**1

7 zéros $\qquad$ 8 zéros

Définition

Un nombre est dit **sous la forme scientifique** (ou en **notation scientifique**) s'il s'écrit sous la forme : $a \times 10^n$

å æ

a est un nombre décimal dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10).

n est un entier relatif (positif ou négatif)

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique

15	10^3	15×10^4	10×10^4	$0{,}8 \times 10^4$	$1{,}5 \times 10^{4{,}2}$
Il manque ×10$^{\cdots}$	Il manque un nombre devant	Le nombre devant est supérieur à 10.	Le nombre devant est égal à 10.	Le nombre devant n'est pas supérieur ou égal à 1.	L'exposant n'est pas entier

Exemples de nombres étant sous la forme scientifique

1×10^{4} $1{,}5 \times 10^{-5}$ $-1{,}5 \times 10^{42}$ $-9{,}5 \times 10^{-12}$ $-1{,}7 \times 10^{0}$ $1{,}5 \times 10^{0}$

Rappels

Si n est positif, multiplier par 10^{n} c'est décaler la virgule de *n* rangs vers la droite.
Si n est positif, multiplier par 10^{-n} c'est décaler la virgule de *n* rangs vers la gauche.

Exemples de passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$4{,}52 \times 10^{4} = 45200$ $-6 \times 10^{4} = -60000$ $4{,}52 \times 10^{-4} = 0{,}000452$

Exemples de passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$123{,}45 = 1{,}2345 \times 10^{2}$ *$10^{2} = 100$*

$0{,}012345 = 1{,}2345 \times 10^{-2}$ *$10^{-2} = 0{,}01$*

$123{,}45 \times 10^{5} = 1{,}2345 \times 10^{2} \times 10^{5} = 1{,}2345 \times 10^{7}$

Remarque

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique (où apparaissent uniquement des quotients ou produits), on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

Exemples

$12 \times 10^{4} \times 55 \times 10^{8} = 12 \times 55 \times 10^{4} \times 10^{8} = 660 \times 10^{12} = 6{,}6 \times 10^{2} \times 10^{12} = 6{,}6 \times 10^{14}$

$25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^{8} = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^{8} = -10000 \times 10^{-6} = -1 \times 10^{4} \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$

$0{,}0055 \times 10^{7} \times 2 \times 10^{8} = 0{,}0055 \times 2 \times 10^{7} \times 10^{8} = 0{,}011 \times 10^{15} = 1{,}1 \times 10^{-2} \times 10^{15} = 1{,}1 \times 10^{13}$

$$\frac{45 \times 10^{23} \times 24 \times 10^{-4}}{18 \times 10^{5}} = \frac{45 \times 24}{18} \times \frac{10^{23} \times 10^{-4}}{10^{5}} = \frac{1080}{18} \times \frac{10^{19}}{10^{5}} = 60 \times 10^{14} = 6 \times 10^{1} \times 10^{14} = 6 \times 10^{15}$$

Utilisation de la calculatrice

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{■^{■}}$ $\boxed{x^{■}}$ $\boxed{x^{y}}$ $\boxed{x^{n}}$ $\boxed{y^{x}}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\uparrow}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{x^{■}}$ cette touche.

Pour calculer $5^{3} \times 2 - (2 - 5)^{4}$ on tape 5 $\boxed{x^{■}}$ 3 × 2 - (2 - 5) $\boxed{x^{■}}$ 4 et on trouve 169.

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{\times 10^{■}}$ $\boxed{\times 10^{x}}$ $\boxed{\times 10^{n}}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{\text{EE}}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{\times 10^{■}}$ cette touche. Elle remplace l'appui sur les touches $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{x^{■}}$

Pour calculer $12 \times 10^{4} \times 55 \times 10^{8}$ on tape 12 $\boxed{\times 10^{■}}$ 4 × 55 $\boxed{\times 10^{■}}$ 8 et on trouve 6,6 ´ 10^{14}.

STATISTIQUES

Exemple

Voici la liste des âges en mois d'élèves de troisième :

180	176	179	176	182	**178**	184	181	179	173	182
187	175	181	174	183	**178**	180	**178**	184	173	175
173	180	195	179	174	182	172	174	195	183	193
190	181	173	177	180	183	180	183	186	180	

Définitions

On appelle effectif total le nombre de valeurs de la série.

Ici, l'effectif total est 43.

On appelle effectif de A le nombre de fois où A apparait dans la série.

L'effectif de **178** est 3 car il y a 3 personnes ayant **178** mois.

On appelle fréquence de A le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

La fréquence de **178** est $\frac{3}{43}$, ce qui signifie que 3 élèves sur les 43 du groupe ont **178** mois.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Les fréquences sont (souvent) exprimées en pourcentages.

La fréquence de **178** est $\frac{3}{43} \approx 7\%$.

$$\text{Fréquence de A en \%} = \text{Fréquence de A} \times 100 = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$$

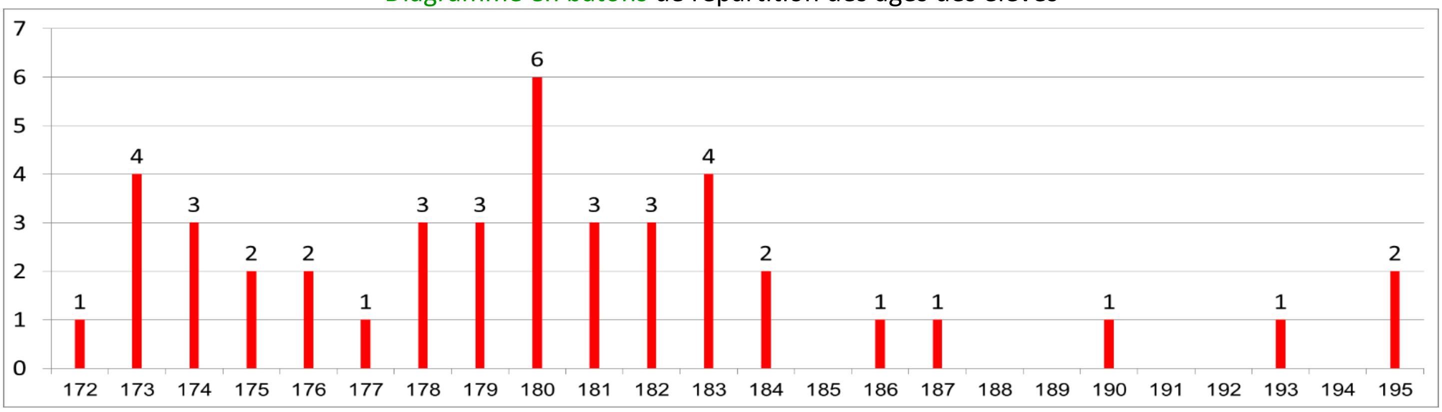
Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	**178**	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195	Total
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2	43
Fréquence	1/43	4/43	3/43	2/43	2/43	1/43	3/43	3/43	6/43	3/43	3/43	4/43	2/43	1/43	1/43	1/43	1/43	2/43	1
Fréquence en %	2 %	9 %	7 %	5 %	5 %	2 %	7 %	7 %	14 %	7 %	7 %	9 %	5 %	2 %	2 %	2 %	2 %	5 %	100 %

÷ 43

× 100

Diagramme en bâtons de répartition des âges des élèves



Définitions

On appelle *minimum* la plus petite valeur de la série.

Le minimum est 172.

On appelle *maximum* la plus grande valeur de la série.

Le maximum est 195.

On appelle *étendue* l'écart entre le minimum et le maximum.

L'étendue est 195 - 172 = 23 mois.

On appelle *médiane* une valeur qui partage la série en deux sous-parties de même effectif tel que dans une sous-partie sont regroupées toutes les valeurs inférieures ou égales à la médiane et dans l'autre sont regroupées toutes les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

Remarque

Une médiane peut être une valeur de la série (ou non).

Comment déterminer une médiane ?

On ordonne (on trie) la série (par ordre croissant).

On détermine l'effectif total N.

Si N est impair, la médiane est une des valeurs de la série ; c'est la $\frac{N+1}{2}$ème.

Si N est pair, une médiane est entre deux valeurs de la série ; entre la $\frac{N}{2}$ème et la $\frac{N}{2}+1$ ème.

Astuce pour déterminer la position de la médiane

On calcule $\frac{N+1}{2}$

Si on trouve un nombre entier, c'est la position de la médiane dans la série

Si ce n'est pas un nombre entier, la position de la médiane est donnée par les deux entiers consécutifs encadrant $\frac{N+1}{2}$.

Exemple 1

Dans la série 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10, l'effectif total est 9, donc la médiane est la 5ème valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée est 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; **6** ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 donc la médiane est **6**.

On prend les 2 entiers consécutifs encadrant $\frac{10+1}{2}=5{,}5$ On calcule $\frac{9+1}{2}=5$

Exemple 2

Dans la série 1 ; 2 ; 6 ; 7 ; **11 ; 15** ; 15 ; 17 ; 17 ; 17, l'effectif total est 10, donc une médiane est entre la 5ème valeur et la 6ème valeur de la série ordonnée.

La série est déjà ordonnée donc la médiane est **entre 11 et 15**. On peut prendre n'importe quelle valeur, mais on choisit le « milieu » de l'intervalle. Ici, une médiane est 13.

Exemple des âges

Dans l'exemple des âges, l'effectif total est 43. Une médiane est la 22-ème valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée commence par : 172, 173, 173, 173, 173, 174, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 177, 178, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, **180**, 180, 180, 180, 181, 181, 181 …

Inutile de trier toute la série car il nous faut juste la 22ème valeur.

La médiane est **180** mois.

Comment calculer la moyenne - *Méthode 1*

1. On additionne toutes les valeurs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Soit M la moyenne de cette série.

M = (180 + 176 + 179 + 176 + 182 + 178 + 184 + 181 + 179 + 173 + 182 + 187 + 175 + 181 + 174 + 183 + 178 + 180 + 178 + 184 + 173 + 175 + 173 + 180 + 195 + 179 + 174 + 182 + 172 + 174 + 195 + 183 + 193 + 190 + 181 + 173 + 177 + 180 + 183 + 180 + 183 + 186 + 180) ÷ 43

= 7751 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

L'âge moyen est de 7750 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

Comment calculer la « moyenne pondérée » - *Méthode 2*

1. On calcule la somme de toutes les valeurs en utilisant le tableau d'effectifs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Soit M la moyenne de cette série.

M = (172 + 4×173 + 3×174 + 2×175 + 2×176 + 177 + 3×178 + 3×179 + 6×180 + 3×181 + 3×182 + 4×183 + 2×184 + 186 + 187 + 190 + 193 + 2×195) ÷ 43
= 7751 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

L'âge moyen est de 7750 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

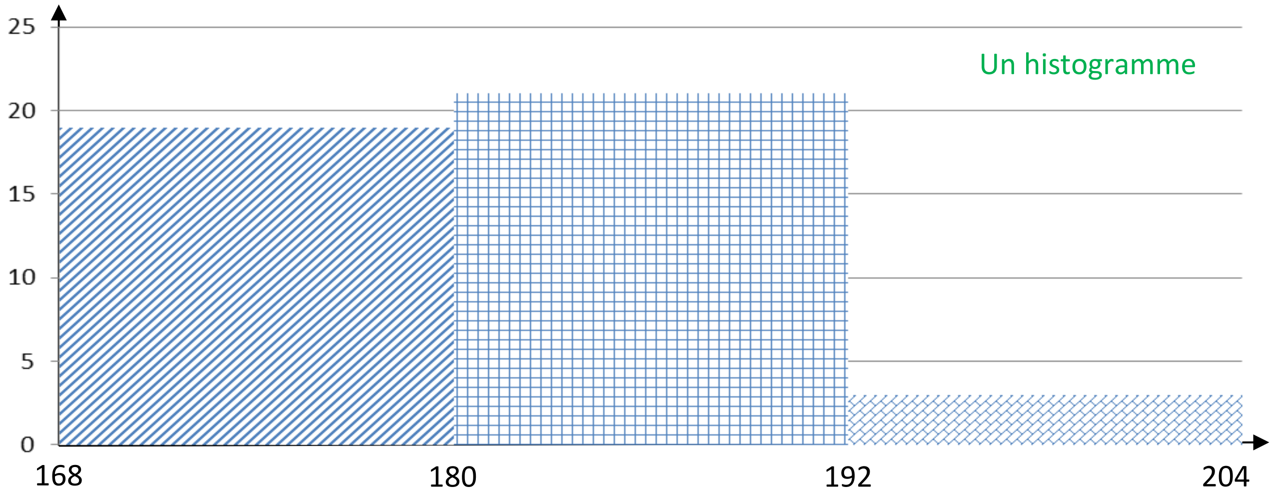
Partage en classes de valeurs

On regroupe les valeurs de la série en classes de valeurs.
Par exemple, on peut regrouper les personnes qui ont le même nombre d'années.

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %	Angle sur le diagramme circulaire en degré	Centre de la classe
[168 ; 180[	19	19/43	44 %	159°	174
[180 ; 192[	21	21/43	49 %	176°	186
[192 ; 204[	3	3/43	7 %	25°	198
Total	43	1	100 %	360°	

$\times 360$ $\times 3{,}6$ $\times \frac{360}{43}$



Un histogramme

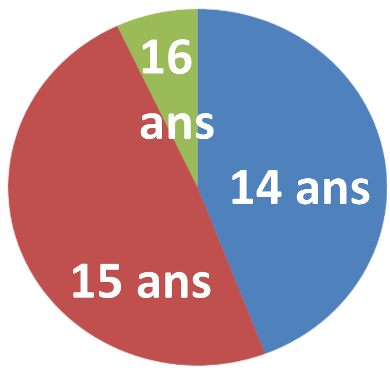
Définition

On appelle *centre de la classe*, le milieu de l'intervalle définissant la classe.

Exemple des âges.

Le milieu de l'intervalle [168 ; 180[est 174. Pour le calculer on effectue $\frac{168+180}{2}$.

<u>Calcul</u> d'une valeur approchée de la moyenne.
On suppose que les valeurs sont regroupées aux centres des classes.
Soit M une valeur approchée de la moyenne de cette série.
M = (19×174 + 21×186 + 3×198) ÷ 43 = 7806 ÷ 43 ≈ 181,5 mois.
Une valeur approchée de l'âge moyen est $\boxed{7806 \div 43 \approx 181{,}5 \text{ mois}}$.



Un diagramme circulaire

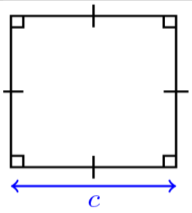
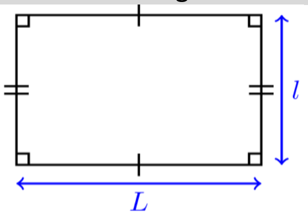
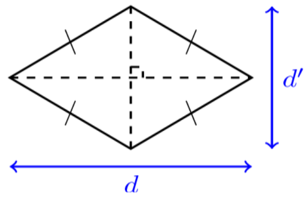
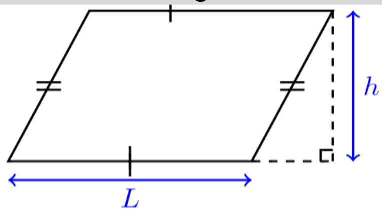
Remarques

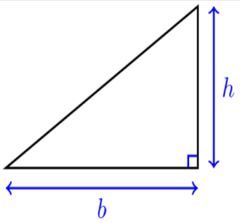
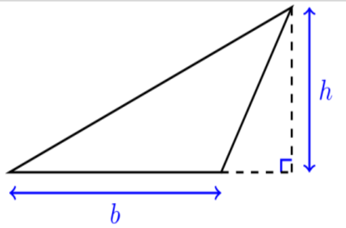
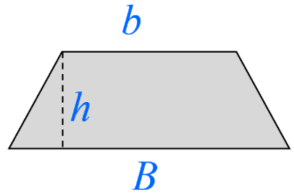
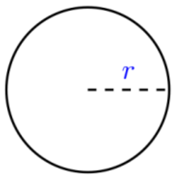
Le résultat est très bon.

La précision de la mesure est le mois et on trouve 1,3 mois d'écart avec la valeur exacte.

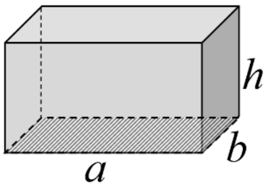
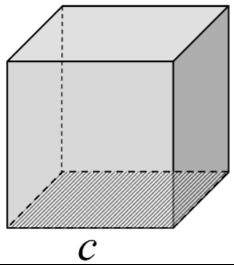
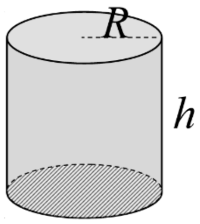
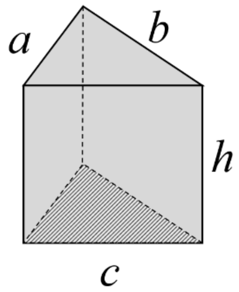
Cette méthode (malgré sa forte approximation) donne souvent de très bons résultats.

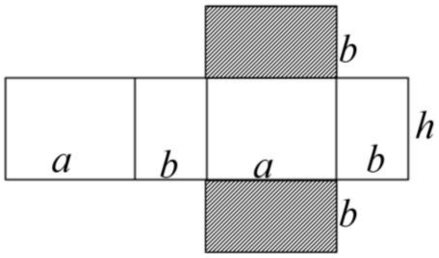
I – Rappel sur les aires

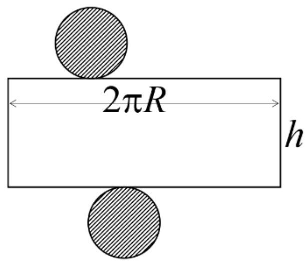
Carré	Rectangle	Losange	Parallélogramme
			
A = c^2	A = $L \times l$	A = $d \times d' \div 2$	A = $L \times h$

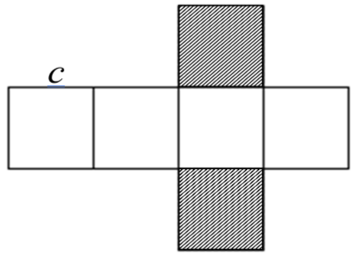
Triangle rectangle	Triangle quelconque	Trapèze	Disque
			
$\mathbf{A} = \dfrac{\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}$		$\mathbf{A} = \dfrac{(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}$	A = p × r^2

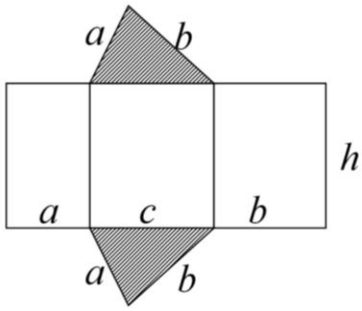
II – La famille des prismes

Parallélépipède rectangle Pavé droit	Cube	Cylindre	Prisme droit
			
© Volume = Aire de la base × hauteur			
V = $a \times b \times h$	V = $c \times c \times c = c^3$	V = p × $R^2 \times h$	V = aire triangle × h

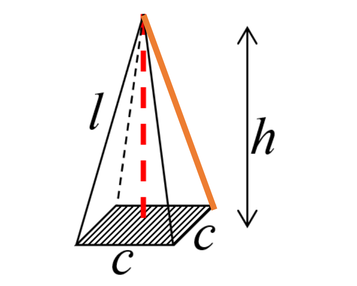
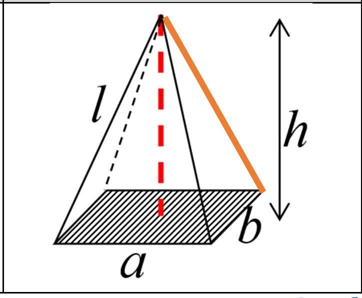
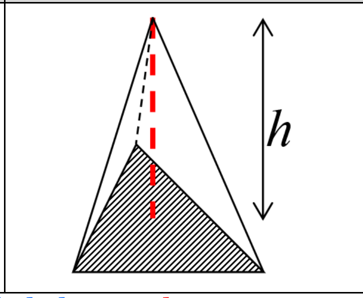
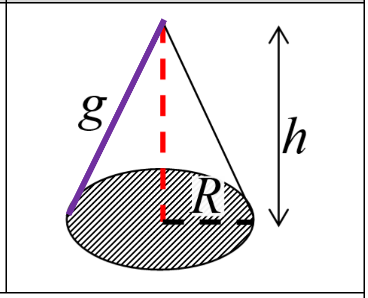


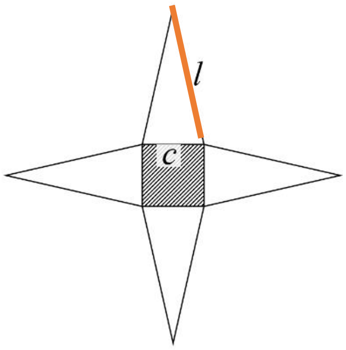


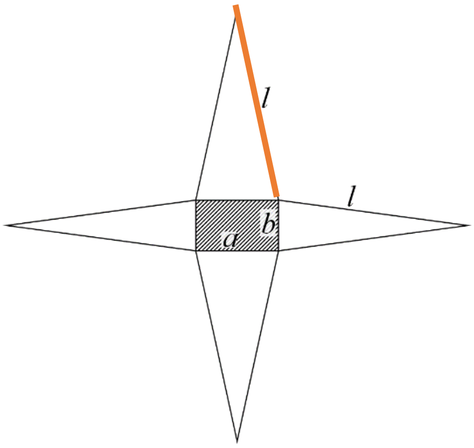


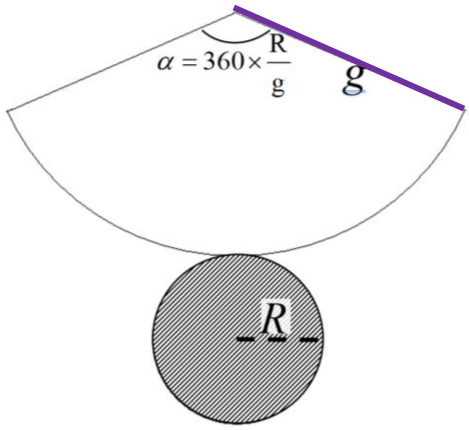


III – La famille des pyramides

Pyramide régulière	Pyramide	Tétraèdre	Cône
			
© **Volume** $= \dfrac{\textbf{Aire de la base} \times \textbf{hauteur}}{\mathbf{3}}$			
$\mathbf{V} = \dfrac{c^2 \times h}{3}$	$\mathbf{V} = \dfrac{a \times b \times h}{3}$	$\mathbf{V} = \dfrac{\textit{aire triangle} \times h}{3}$	$\mathbf{V} = \dfrac{p \times R^2 \times h}{3}$



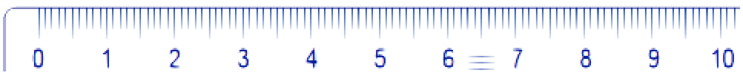




IV – Conversions

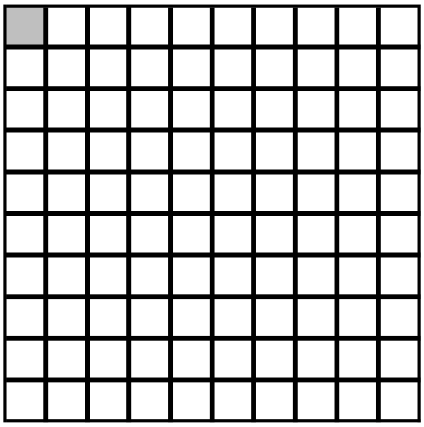
Longueurs

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
					1	0



Aires

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
			ha		a		ca						
							1	0	0				
					3	5	0 ,						
		7	0										

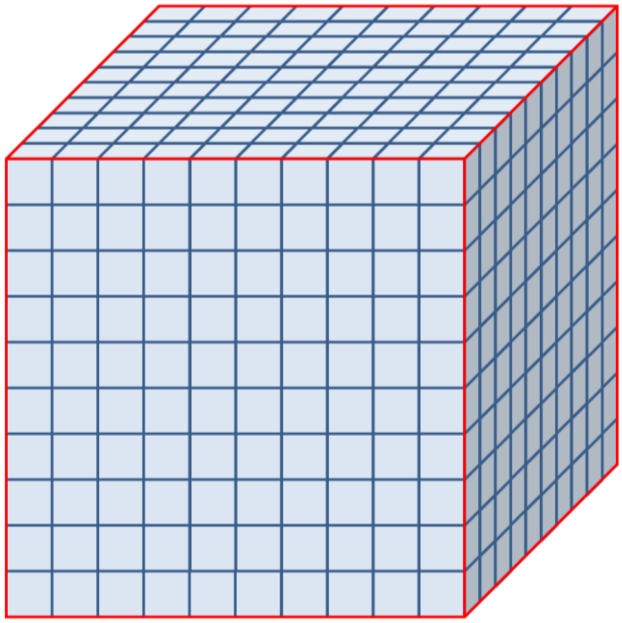


1 ha se lit « un hectare »
1 a se lit « un are »
1 ca se lit « un centiare »

Volumes

		km³			hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³
												hL	daL	L	dL	cL	mL			
											1	0	0	0						
													1	5,	3	4				
														2,	4	5	4			

1 dm³ = 1L



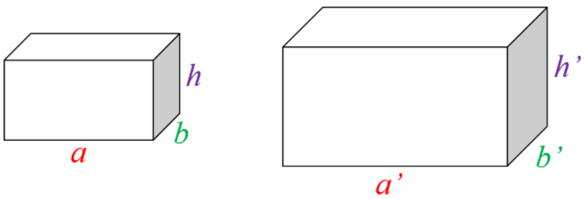
V – Agrandissements / réductions

Propriété admise

Si une figure est un agrandissement (ou une réduction) d'une autre figure de rapport k :

- les distances sont multipliées par k,
- les aires sont multipliées par k^2,
- les volumes sont multipliés par k^3.

Démonstration dans le cas des pavés droits.



Si le pavé de droite est un agrandissement du pavé gauche de coefficient k, alors on a :

$a' = k \times a$, $b' = k \times b$, et $h' = k \times h$.

Le volume du pavé de gauche est $V = a \times b \times h$

Le volume du pavé de droite est $V' = a' \times b' \times h'$

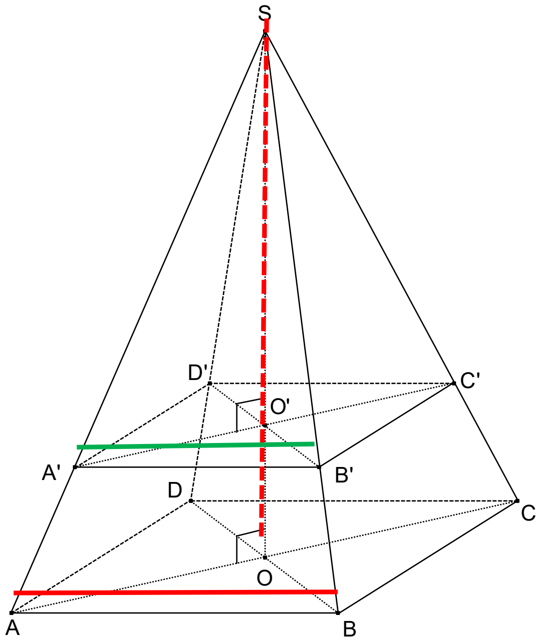
$V' = a' \times b' \times h' = k \times a \times k \times b \times k \times h = k^3 \times a \times b \times h = k^3 \times V$

Comment calculer le coefficient d'agrandissement-réduction ?

1. On repère une distance connue sur les 2 solides.
2. On calcule le coefficient par la formule :

$$\mathbf{k} = \frac{\textit{distance sur le solide d'arrivée}}{\textit{distance correspondante sur le solide de départ}}$$

Pour trouver le coefficient d'agrandissement-réduction, on repère une longueur connue sur le solide de départ et sur le solide d'arrivée.



Exemple 1

On donne une pyramide régulière de base ABCD et de sommet S.
On donne AB = 12 cm et OS = 21cm.

1°) *Calculer le volume de SABCD.*

2°) *On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base ABCD.*
On obtient une réduction SA'B'C'D'.
On donne A'B' = 9 cm.
Calculer le rapport de réduction.
En déduire le volume de SA'B'C'D'.

1°) Soit V le volume de SABCD.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{AB \times BC \times SO}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{12 \times 12 \times 21}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1008}$$

Le volume de la pyramide SABCD est $\boxed{1008\text{ cm}^3}$.

2°) Soit k le coefficient de réduction de SABCD vers SA'B'C'D'.

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \mathbf{0,75}$$

Soit V' le volume de SA'B'C'D'.

$$\mathbf{V' = k^3 \times V = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 1008 = 425,25}$$

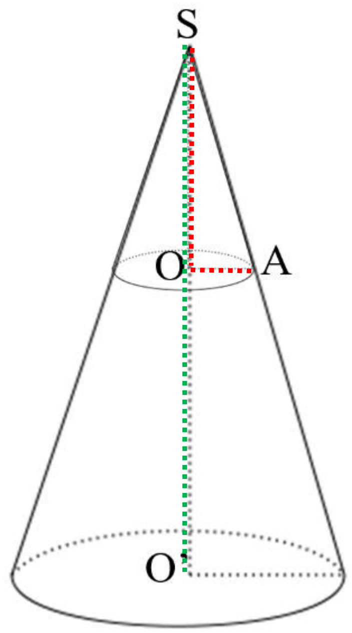
Le volume de SA'B'C'D' est $\boxed{425{,}25\text{ cm}^3}$.

Exemple 2

Sur la figure suivante, on donne les informations suivantes :

- *SO = 6 cm*
- *AO = 5 cm*
- *SO' = 15 cm.*

Calculer le volume du grand cône.
On donnera le volume en litre, arrondi au millilitre près.



Soit V le volume du petit cône.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathrm{p} \times \mathbf{R^2 \times h}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathrm{p} \times \mathbf{OA^2 \times OS}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathrm{p} \times \mathbf{5^2 \times 6}}{\mathbf{3}} = \mathbf{50}\mathrm{p}\ \mathbf{cm^3}$$

Soit k le coefficient d'agrandissement du petit vers le grand cône.

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{SO'}}{\mathbf{SO}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{6}} = \mathbf{2,5}$$

Soit V' le volume du grand cône.

$$\mathbf{V' = k^3 \times V = 2,5^3 \times 50}\mathrm{p} = \mathbf{781,25}\mathrm{p}$$

Le volume du grand cône est $\boxed{781{,}25\mathrm{p}}$ » 2454 cm^3 = $\boxed{2{,}454\text{ L}}$.

VI – Repérage

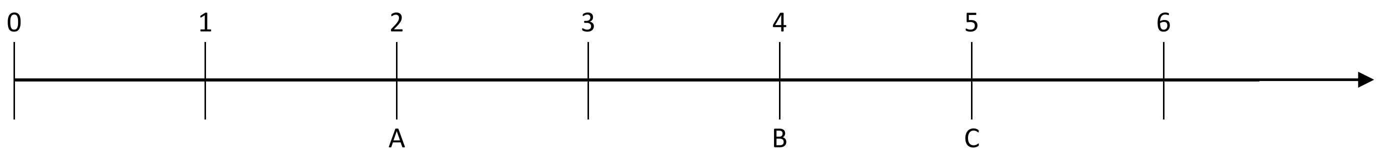
Avec 1 dimension

Pour se repérer, on a besoin de 2 points :

- l'origine (souvent le point O)
- l'unité (souvent le point I, ou le nombre 1).

On appelle *droite graduée*, une droite sur laquelle on a placé une origine et une unité.

Pour graduer la droite, il faut reporter l'unité.



Au lieu de parler de droite graduée, on pourra aussi parler d'axe gradué.

Lorsque l'on place un point sur une droite graduée, le nombre correspondant à ce point est appelé l'affixe de ce nombre.

Certaines fois on emploiera le mot abscisse.

L'affixe de A est 2 ; on notera A(2).
L'abscisse de B est 4.
Le nombre 4 est l'affixe du point B.
Le point C a pour affixe 5.

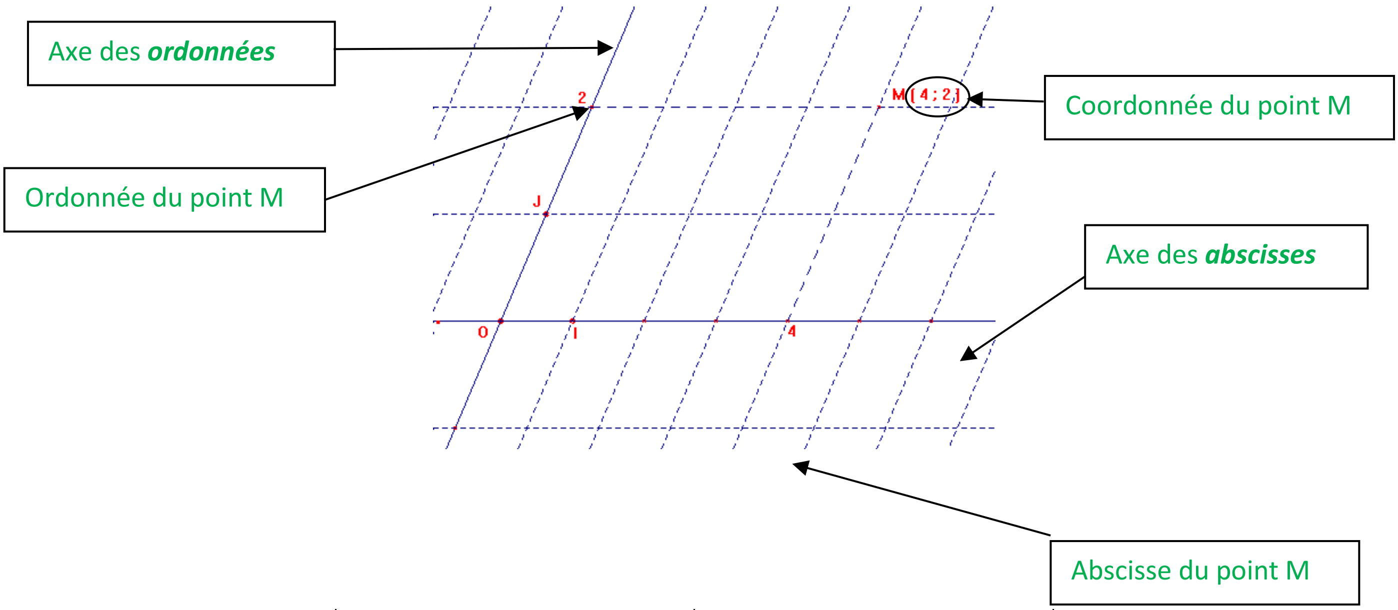
Avec 2 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 3 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.

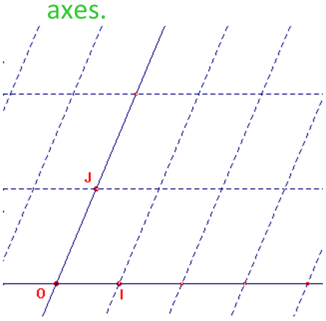
Le repère (O ; I ; J) est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées.



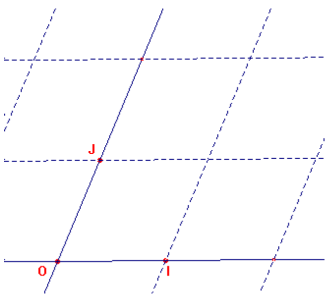
Le repère (O ; I ; J) est dit *quelconque* si

- ses axes ne sont pas perpendiculaires
- les unités ne sont pas les mêmes sur les deux axes.



Le repère (O ; I ; J) est dit *normé* ou *normal* si :

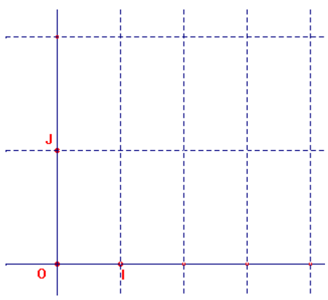
- OI = OJ



Même unité sur les deux axes.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthogonal* si :

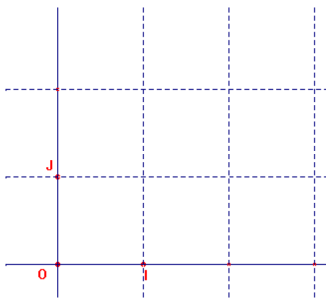
- (OI) ^ (OJ)



Axes perpendiculaires.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthonormé* ou *orthonormal* si :

- OI = OJ
- (OI) ^ (OJ)



Axes perpendiculaires
Même unité sur les deux axes.

Avec 3 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 4 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.
- un point sur l'axe des hauteurs.

Le repère (O ; I ; J ; K) est un repère pour lequel :

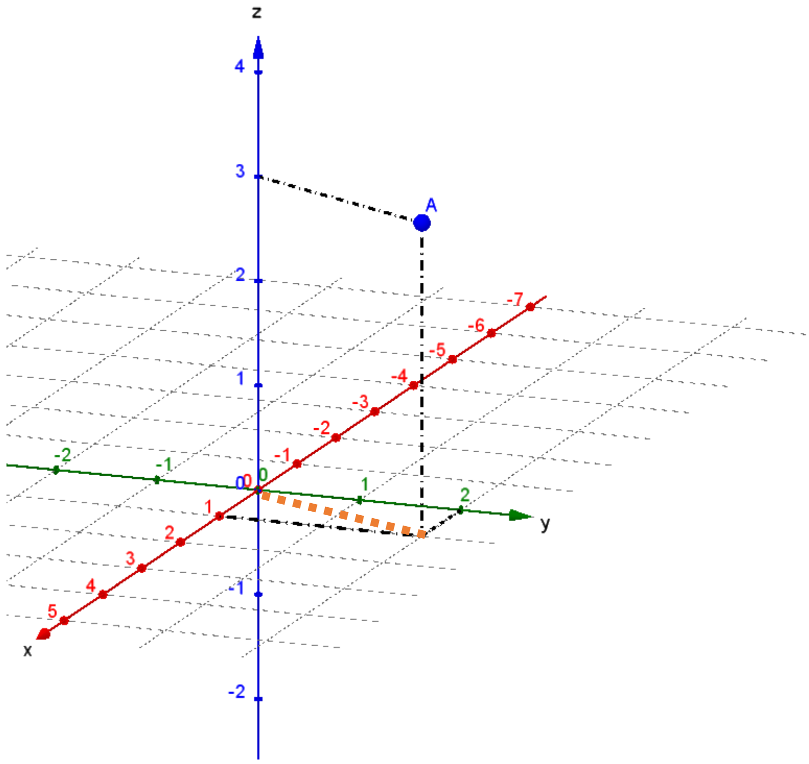
- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées
- K donne l'unité sur l'axe des hauteurs.

Pour se repérer dans l'espace, on « projette » le point sur le plan « horizontal ».

On commence par donner les coordonnées de ce point sur le plan en traçant les parallèles aux axes du plan de base ; ici on obtient 1 et 2 ; les cordonnées de ce point sont (1 ; 2).

On relie de point à l'origine du repère puis on trace la parallèle qui passe par A ; cette parallèle coupe l'axe des hauteurs qui indique alors la hauteur du point ; ici c'est 3.

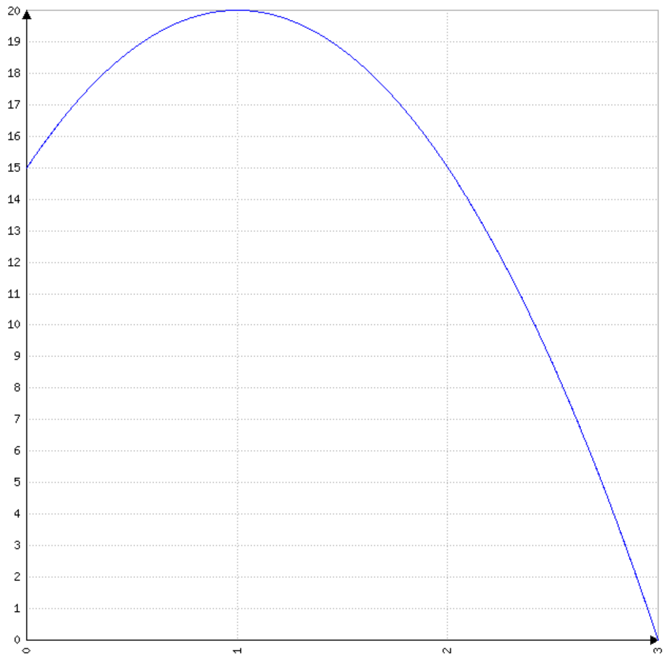
Le point A a pour coordonnées : A(1 ; 2 ; 3).



FONCTIONS : généralités

Exemple de la balle

On a lancé une balle en l'air.
Sur l'axe des abscisses se trouve le temps en secondes et sur l'axe des ordonnées se trouve la hauteur de la balle en mètres.



La hauteur de la balle dépend du temps ; on dit qu'on peut donner la hauteur de la balle en fonction du temps. On appelle x le temps et f la hauteur de la balle en fonction du temps. On dit qu'on peut exprimer f en fonction de *x*.

Après 0 seconde (au départ), la hauteur de la balle est de 15 m.
On dit que 15 est l'image de 0 par f et on note f(0) = 15, qui se lit *f de 0 égal 15*.

Après 1 seconde, la hauteur de la balle est à son maximum ; elle est de 20 m.
On dit que 20 est l'image de 1 par f et on note f(1) = 20.

Après 2 secondes, la hauteur de la balle est de 15 m.
On dit que 15 est l'image de 2 par f et on note f(2) = 15.

Après 3 secondes, la hauteur de la balle est de 0 m.
On dit que 0 est l'image de 3 par f et on note f(3) = 0.

On a déterminé (par un calcul de physique) que la hauteur en fonction du temps était donnée par la formule : $-5x^2 + 10x + 15$.

On notera :

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

ou

$$f : x \rightarrow -5x^2 + 10x + 15$$

On a vu qu'on pouvait lire l'image d'un nombre sur le graphique. Il est aisé de calculer cette image en utilisant la forme algébrique de la fonction.

Par exemple, on cherche la hauteur de la balle après 1,5 s. On va calculer f(1,5) :

$$f(1,5) = -5\times1,5^2 + 10\times1,5 + 15 = 18,75.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la hauteur de la balle après 1,5 s est de 18,75 m.

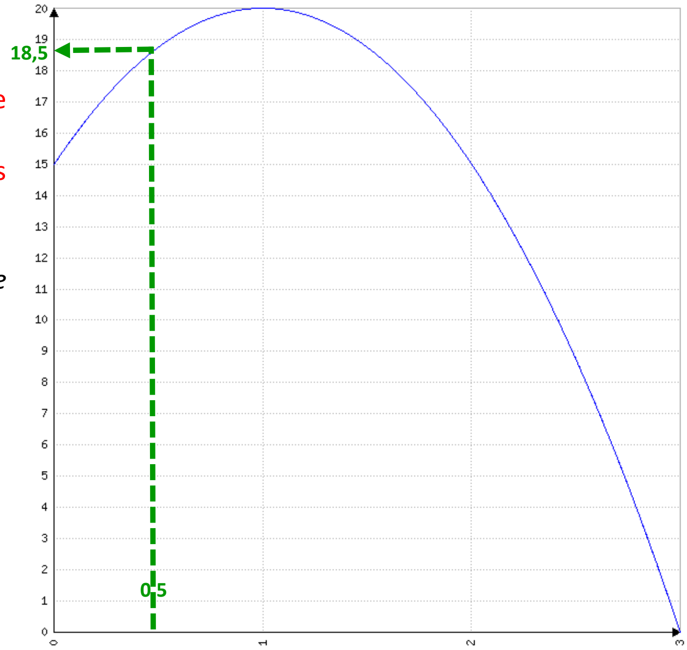
On a vu que la hauteur de la balle après 0 ou 2 secondes était la même (15 m). On dira que 0 et 2 secondes sont des antécédents de 15 m.
Le nombre 20 a un seul antécédent 1 s.
Le nombre 22 n'a pas d'antécédent car la balle n'est jamais montée jusqu'à 22 m.

Remarque

Un nombre a toujours une et une seule image par une fonction.
Un nombre peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents par une fonction.

Comment déterminer l'image d'un nombre par une fonction ?

Par exemple, on cherche l'image de 0,5 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.



1^er^ cas : méthode graphique

On se positionne à 0,5 sur l'axe des abscisses.

On « monte » (ou « descend ») jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « part horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées et on lit la valeur.

On trouve ici que $f(0,5) \approx 18,5$.

Par lecture graphique, on trouve une valeur dont on ne sait pas si elle est exacte.

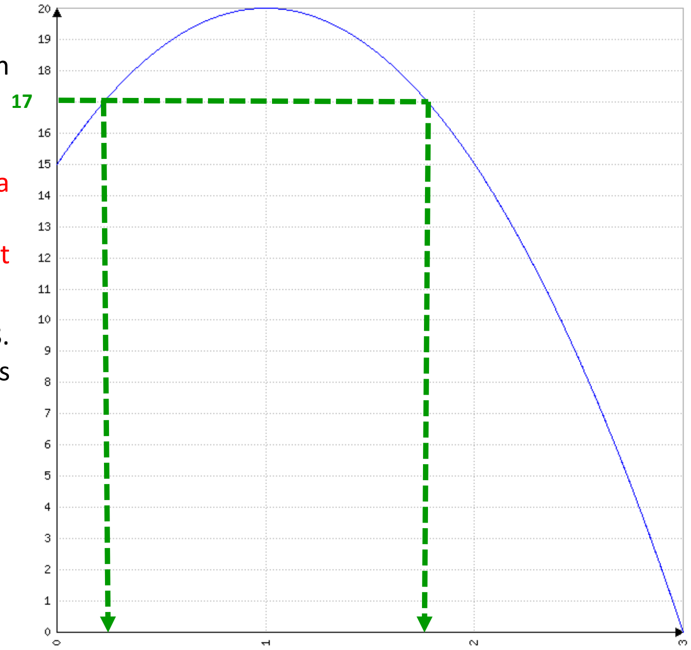
2^ème^ cas : par le calcul

Il suffit de remplacer x par 0,5 dans la formule $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

$f(0,5) = -5\times0,5^2 + 10\times0,5 + 15 = 18,75$.

On trouve une valeur exacte.

Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction ?



Méthode graphique

Par exemple, on cherche les antécédents de 17 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

On se positionne à 17 sur l'axe des ordonnées.

On « part horizontalement » jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « monte » (ou descend) jusqu'à l'axe des abscisses et on lit les valeurs.

On trouve ici que les antécédents de 17 sont environ 0,2 et 1,8.

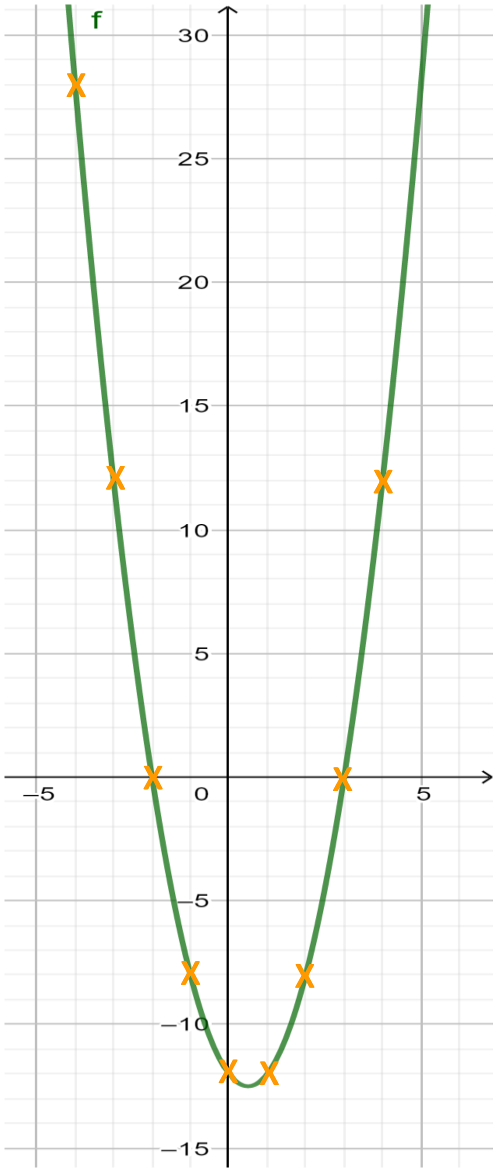
Par lecture graphique, on trouve des valeurs dont on ne sait pas si elles sont exactes.

Bien penser à chercher tous les antécédents.

Comment construire la représentation graphique d'une fonction ?

1. On construit un « tableau de valeurs ».
2. On construit un repère et on place les points dans le repère.
3. On relie les points.

Attention, les points ne sont pas obligatoirement alignés ; il faut donc les relier en formant une courbe et non pas nécessairement une droite.



Exemple

On veut construire la représentation graphique de la fonction f définie par la formule $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$ pour x appartenant à l'intervalle [-4 ; 4]

On prend n'importe quels nombres.

En général, on prend les bornes de l'intervalle (ici, -4 et 4) et on place des valeurs régulièrement. Ici, le pas (l'écart entre deux nombres) est 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	28	12	0	-8	-12	-12	-8	0	12

On calcule les images de la première ligne avec la formule

$f(x) = 2x^2 - 2x - 12$

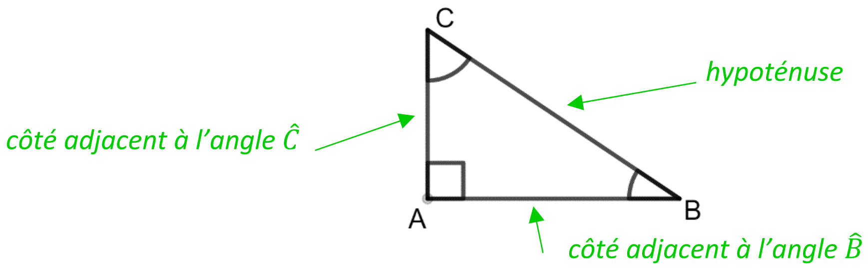
Ce tableau de valeur peut être calculé avec la machine.

Sur la CASIO, taper

MODE 4 :table	*Place la calculatrice en mode tableau de valeur*
f(X)= 2X² - 2X – 12 EXE	*On rentre la fonction en utilisant la touche X de la calculatrice.*
Début ? -4 EXE	*On rentre le point de départ du tableau de valeur.*
Fin ? 4 EXE	*On rentre le point d'arrivée du tableau de valeur.*
Pas ? 1 EXE	*On rentre le pas du tableau de valeur (l'écart entre deux nombres).*
	On obtient le tableau de valeur
MODE 1 :comp	*Pour revenir au mode « normal »*

Triangles rectangles : COSINUS

Définitions

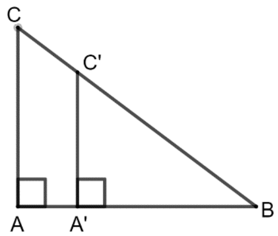


Propriété

Dans un triangle rectangle, le rapport du côté adjacent à un angle par l'hypoténuse ne dépend que de la mesure de l'angle et pas de taille d'un triangle ; on l'appelle le *cosinus* de l'angle.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC)//(A'C').
Comme (AC)//(A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :



$$\frac{BA'}{BA}=\frac{BC'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

BA' × BC = BC' × BA

÷BC' ÷BC ÷BC' ÷BC

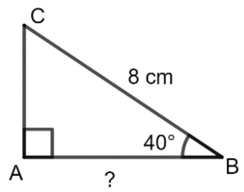
donc $\frac{BA'}{BC'}=\frac{BA}{BC}$ = cosinus de l'angle $\widehat{B}$

Astuce pour se rappeler de la formule

♥ **COS**inus = **ADJ**acent / **HYP**oténuse

Exemple 1 : calcul d'un petit côté

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que BC = 8 cm et $\widehat{ABC}$ = 40°
Calcule AB.



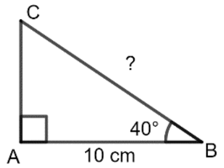
Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connait : • $\widehat{B}$ • BC : hypoténuse On cherche : • AB : adjacent	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
$\cos(\widehat{B})=\frac{AB}{BC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\cos(40°)=\frac{AB}{8}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\cos(40°)}{1}=\frac{AB}{8}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$AB=\frac{8\times\cos(40°)}{1}\approx 6,13\text{ cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

On tape 8 × cos 4 0) ÷ 1 EXE

Exemple 2 : calcul de l'hypoténuse

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 10 cm et $\widehat{ABC}$ = 40°

Calcule BC.



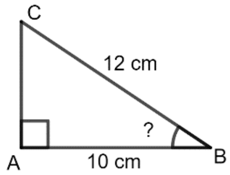
Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connait : • $\hat{B}$ • AB : adjacent On cherche : • BC : hypoténuse	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
$\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\cos(40°) = \frac{10}{BC}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\cos(40°)}{1} = \frac{10}{BC}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$BC = \frac{10 \times 1}{\cos(40°)} \approx 13,05 \text{ cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

On tape $\boxed{8}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{\cos}\ \boxed{4}\ \boxed{0}\ \boxed{)}\ \boxed{EXE}$

Exemple 3 : calcul d'un angle

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 10 cm et BC =12 cm

Calcule $\widehat{ABC}$.



Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On cherche : • $\hat{B}$ On connait : • AB : adjacent • BC : hypoténuse	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
$\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\cos(\hat{B}) = \frac{10}{12}$	On remplace les valeurs connues
$\hat{B} = \arccos\left(\frac{10}{12}\right) \approx 34°$	On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

On tape $\boxed{SECONDE}\ \boxed{\cos}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{)}\ \boxed{EXE}$

PROBABILITES

Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.

Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

Nombre de piles	Nombre de faces	Total
4 374	4 626	9 000

Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\textbf{Fréquence de A} = \frac{\textbf{Effectif de A}}{\textbf{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est $\frac{4\,374}{9\,000}$ » $\mathbf{0,486}$ et la fréquence de « Pile » est $\frac{4\,626}{9\,000}$ » $\mathbf{0,514}$.

Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\mathbf{0,486} = \frac{\mathbf{48,6}}{\mathbf{100}}$	<table><tr><td>Pile</td><td>4 374</td><td>?</td></tr><tr><td>Total</td><td>9 000</td><td>100</td></tr></table> $? = \frac{\mathbf{4\,374} \times}{\mathbf{9\,000}}$ $? = \frac{\mathbf{4\,374} \times \mathbf{100}}{\mathbf{9\,000}}$ » $\mathbf{48,6}$	$\textbf{Fréquence de A en \%} = \frac{\textbf{Effectif de A}}{\textbf{Effectif total}} \times \mathbf{100}$ $\textbf{Fréquence de "pile" en \%} = \frac{\mathbf{4\,374}}{\mathbf{9\,000}} \times \mathbf{100}$» $\mathbf{48,6}$

La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%.

Définitions

Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{2}$ et que la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{2}$.

On notera p(Pile) = $\frac{1}{2}$ et p(Face) = $\frac{1}{2}$.

p comme probabilité

Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

Nombre de tirages	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	1000000
Nombre de "Pile"99	2	23	46	240	494	2470	4908	24853	49914	500 557
Fréquence de "Pile" en %	20	46	46	48	49,4	49,4	49,08	49,706	49,914	50, 0557
Ecart avec la probabilité	30	4	4	2	0,6	0,6	0,92	0,294	0,086	0,0557