

3.1415926535897932384626433832795 0288419716939937510582097494459230781640628620899862803
482534 2117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521
1055 596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234
603 4861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436
78 92590360 01133053054 8820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611
7931051185 480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213
9494639522 47371907021 7986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526
3560827785 771342757789609173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542
0199561121 29021960864 0344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328
160963185 95024459455 34690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320
838142061 71776691473 03598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226
80661300 192787661119 59092164201989380952572010654858632788659361533818279682303019520353
018529 689957736225994 1389124972177528347913151557485724245415069595082953311686172785588
90750 9838175463746493 9319255060400927701671139009848824012858361603563707660104710181942
9555 96198946767837449 4482553797747268471040475346462080466842590694912933136770289891521
04752 162056966024058038 15019351125338243003558764024749647326391419927260426992279678235
4781636009341721641219924586315030286182974555706749838505494588586926995690927210797509
3029553211653449872027559602364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746
7289097777279380008164706001614524919217321721477235014144197356854816136115735255213347
5741849468438523323907394143334547762416862518983569485562099219222184272550254256887671
7904946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642251252
0511739298489608412848862694560424196528502221066118630674427862203919494504712371378696
09563 64371917 2874677646 57573962413890865 83264599 581339 0478027590099465764078 951269468398
35259 57098 25 82262 05224 89407726719478 26848 2601476 99090 2640136394437455305068 2034962524517
49399 65 43 14 29 09 1906 59 25 09 3722169 6461515 709858387 4105 978859 59772975498930 16 175 392846813
82686 8386 8942 77 41 559 91855925 245953 9594310 4997252 4680845987 273644695848653 836736222 626099
12460 8051 2438 84 39 04 51 244136 5497627 8079771 5691435 99770 01 2961 608944169486855584 84063534220
72225 82848 86 48 1 58 456 0285060 1684273 9452267 4676788 952521 385225 49954666727823986 45659611635
4886230577456498035593634568174324112515076069479451096596094025228879710893145669136867
2287489405601015033086179286809208747609178249385890097149096759852613655497818931297848
2168299894872265880485756401427047755513237964145152374623436454285844479526586782105114
1354735739523113427166102135969536231442952484937187110145765403590279934403742007310578
5390621983874478084784896833214457138687519435064302184531910484810053706146806749192781
9119793995206141966342875444064374512371819217999839101591956181467514269123974894090718
6494231961567945208095146550225231603881930142093762137855956638937787083039069792077346
7221825625996615014215030680384477345492026054146659252014974428507325186660021324340881
9071 0486331 73 4649651 45 3905796 26 8561005 508106658796 9981635 74 7363840 52 5714591 02 8970641 4011
0971206280 439 039759 5156771577004203378699360072305587631 763 594218731251471 205329281 91826
1861258673 215 791984 1484882916447060957527069572209175671 167 2291098169091528017350 6712748
5832 2287183 52 093539 657 2512108 357915136988 209144 421 0067510 334 671103 141267111 369 90865 35163
9831 501970165 151168 517 143765761835155 6508849099898 599823873 4552833 1635507647918 535893226
1854 896321329 330898 570 6420467525907091548141654985 9461637180 270981994309924488 9575712828
9059 2323326 09 7299712 08 4433573 26 5489382 391193259746 3667305 83 6041428 13 8830320 382 4903758985
2437441702913276561809377344403070746921120191302033038019762110110044929321516084244485
9637669838952286847831235526582131449576857262433441893039686426243410773226978028073189
1544110104468232527162010526522721116603966655730925471105578537634668206531098965269186
2056 47693 125 70586 35 66201 855 81007293 60659 876486117910453348850346113657686753249441668039
6265 79787 718 5560845 5296 5412 66540 853 06143444318586769751456614068007002378776591344017127
4947 04205 622 305 3899 45613 14071 127000 407 85473326993908145466464588079727082668306343285878
5698 3052 3580 8933065 7574 06795 457 16377 5254202114955761581400250126228594130216471550979259
2309 9079 6547 37612 55 1765 675135751782 96664 547791745011299614890304639947132962107340437518
9573596145890193897131117904297828564750320319869151402870808599048010941214722131794764
7772622414254854540332157185306142288137585043063321751829798662237172159160771669254748
7389 86654949 45011 465 40628 433 66393 790 0397 69265 672 1463 8530 6736 096571209 1807638327166416274
8888 00786925 60290228 4721040317211860 8204 19000422 966 17119 63779 2133 75751149595015660496318
6294 72654736 425 23081 77036 751590 67350 2350 728 35405 67 0 03867 735 1362222 477158915049530984448
9333 09634087 807693259939 7805419341447 3774 4184263 1298 6080 9988 86874 13260472156951623965864
5730 21631 598 19319 516 73538 129741 677294 786 72422 924 6543 6680 0980 6769 28238 2806899640048243540
3701416314965897940924323789690706977942236250822168895738379862300159377647165122893578
6015881617557829735233446042815126272037343146531977774160319906655418763979293344195215
4134189948544473456738316249934191318148092777710386387734317720 54565 3220777092120190
516609628049092636019759882816133231666365

Sommaire



Utilisation libre à la condition de l'attribuer à l'auteur en citant son nom. *Cela ne signifie pas que l'auteur est en accord avec l'utilisation qui est faite de ses œuvres.*
Autorisation de reproduire, diffuser, et à modifier tant que l'utilisation n'est pas commerciale.

Sommaire.....	2
LES NOMBRES RELATIFS	3
SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS.....	5
I – Symétrie axiale.....	5
II – Symétrie centrale.....	6
III – Translation	6
FRACTIONS : additions et soustractions	8
PROPORTIONNALITE, VITESSES et ECHELLES.....	12
I – Proportionnalité.....	12
II – Vitesse, distance et temps	13
III – Ratios	14
IV – Echelles	15
CALCUL LITTERAL	17
I – L'utilisation de lettres dans les calculs.....	17
II – Equations	18
III – Problèmes	20
Triangles rectangles : PYTHAGORE	22
FRACTIONS : multiplications et divisions.....	25
Théorème de THALES, TRIANGLES SEMBLABLES, HOMOTHETIES	27
I – Théorème de Thalès	27
II – Triangles semblables.....	29
III – Homothéties : agrandissement/réduction	29
PUISSANCES de 10 et NOTATION SCIENTIFIQUE	31
STATISTIQUES	34
SOLIDES, agrandissement/réduction.....	37
I – Rappel sur les aires	37
II – La famille des prismes.....	37
III – La famille des pyramides	38
IV – Conversions	38
V – Agrandissements / réductions.....	39
VI – Repérage.....	40
FONCTIONS : généralités	43
Triangles rectangles : COSINUS	46
PROBABILITES	48

LES NOMBRES RELATIFS

Définitions

Un *nombre relatif* est un nombre précédé d'un signe.

Si ce signe est "+", le nombre est dit *positif*.

Si ce signe est "-", le nombre est dit *néгатif*.

La *valeur absolue* d'un nombre relatif est la distance séparant ce nombre de 0.

Astuce

La valeur absolue d'un nombre est le nombre privé de son signe.

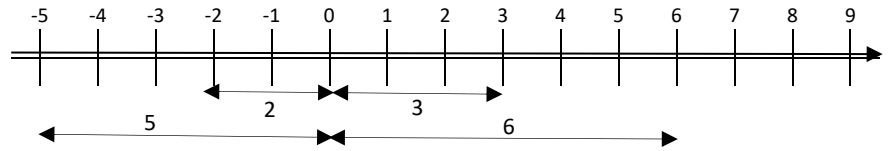
Exemples

La valeur absolue de -5 est 5.

La valeur absolue de -2 est 2.

La valeur absolue de +3 est 3.

La valeur absolue de +6 est 6.

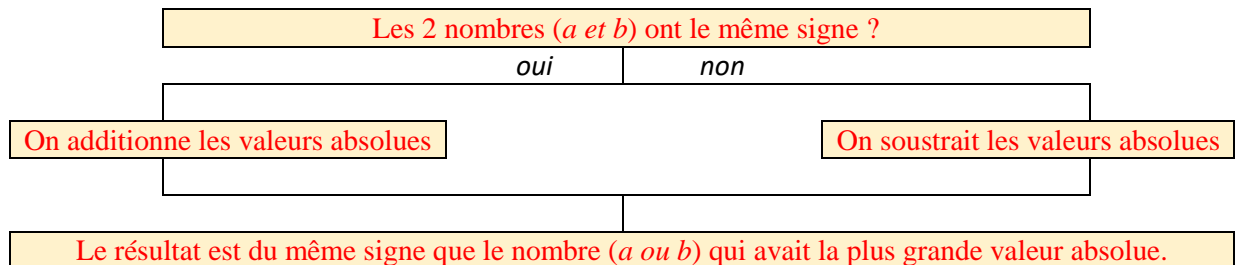


Convention

Les mathématiciens ont décidé de ne pas mettre de signe devant les nombres positifs.

Propriété admise

Pour additionner deux nombres relatifs ($a + b$), on procède comme suit :



Exemples

$5 + 3 = 8$ 5 et 3 ont le même signe, donc on additionne leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.

$(-5) + (-3) = -8$ -5 et -3 ont le même signe, donc on additionne leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

$5 + (-3) = 2$ 5 et -3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.

$(-5) + 3 = -2$ -5 et 3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs valeurs absolues. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

Définition

L'*opposé* d'un nombre a est le nombre noté $-a$ tel que $a + (-a) = 0$.

Astuce

Pour prendre l'opposé d'un nombre, il suffit de changer son signe.

Exemples

L'opposé de 2 est noté -2 et vaut -2

L'opposé de -2 est noté -(-2) et vaut 2 donc $-(-2) = +2$.

Définition

Soustraire, c'est additionner l'opposé.

Exemples

Soustraire 2 c'est additionner -2.

Soustraire 5 c'est additionner -5.

Soustraire -4 c'est additionner 4.

Soustraire -7 c'est additionner 7.

Astuce

$-2 = +(-2)$

$-5 = +(-5)$

$-(-4) = +4$

$-(-7) = +7$

Exemples de soustractions

$$5 - 2 = 5 + (-2) = 3$$

$$4 - 5 = 4 + (-5) = -1$$

$$5 - (-4) = 5 + 4 = 9$$

$$6 - (-7) = 6 + 7 = 13$$

Comment calculer une somme algébrique ?

On supprime les parenthèses, puis on effectue le travail précédent en additionnant les positifs et les négatifs (veiller à bien garder le signe qui se trouve devant un nombre lors du "réarrangement").

Exemple

$$(-5) + 3 - 4 + 5 + (-3) - (-6) + 7 = -5 + 3 - 4 + 5 - 3 + 6 + 7 = -5 - 4 - 3 + 3 + 5 + 6 + 7 = -12 + 21 = 9$$

Propriété règle des signes admise

Le produit de deux nombres de même signe est positif

Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

La règle des signes s'applique aussi pour les divisions.

×	+	-
+	+	-
-	-	+

Comment multiplier deux nombres relatifs ?

1. On multiplie leurs distances à zéro.
2. On détermine le signe en utilisant la règle des signes.

Exemples de produits ou quotients

$$5 \times 2 = +10$$

Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.

$$10 \div 2 = +5$$

$$5 \times (-2) = -10$$

Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif.

$$10 \div (-2) = -5$$

$$(-5) \times 2 = -10$$

Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif.

$$(-10) \div 2 = -5$$

$$(-5) \times (-2) = +10$$

Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.

$$(-10) \div (-2) = +5$$

Propriété admise

Pour déterminer le signe d'une expression numérique dans laquelle n'interviennent que des multiplications et des divisions, il suffit de compter le nombre de facteurs négatifs.

Si ce nombre de facteurs négatifs est pair (0, 2, 4, 6, 8 ...), le produit est positif.

Si ce nombre de facteurs négatifs est impair (1, 3, 5, 7, 9...), le produit est négatif.

Exemples

$2 \times 5 \times (-4) \times 3 \times (-4) \times (-4) \times 5$ est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.

$2 \times (-5) \times (-4) \times 3 \times (-4) \times (-4) \times 5$ est positif car il y a un nombre pair (4) de facteurs négatifs.

Remarque

Peu importe le nombre de facteurs positifs ou s'il y a plus de facteurs positifs que négatifs ; seul compte le nombre de facteurs négatifs.



ATTENTION, la propriété précédente ne "marche" que s'il y a des multiplications et des divisions. Il ne faut surtout pas l'utiliser lorsqu'il y a des additions ou des soustractions.

Propriété priorités opératoires admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On effectue les multiplications et divisions (de gauche à droite).
3. On termine toujours par les additions et soustractions (de gauche à droite).

Exemple

$$10 + 5 \times (3 - (3 + 5 \times 7)) = 10 + 5 \times (3 - (3 + 35)) = 10 + 5 \times (3 - 38) = 10 + 5 \times (-35) = 10 + (-175) = -165$$

Astuce

Dans le cas de parenthèses imbriquées, il peut être utile de mettre en couleur les paires de parenthèses pour repérer les calculs à effectuer.

SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS

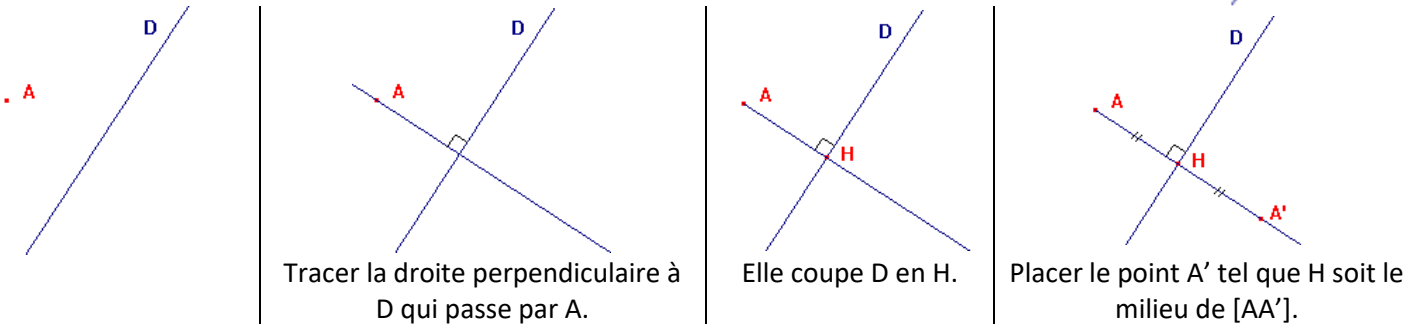
I – Symétrie axiale

Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport à la droite D si D est la médiatrice de [AB].

Construction avec la réquerre

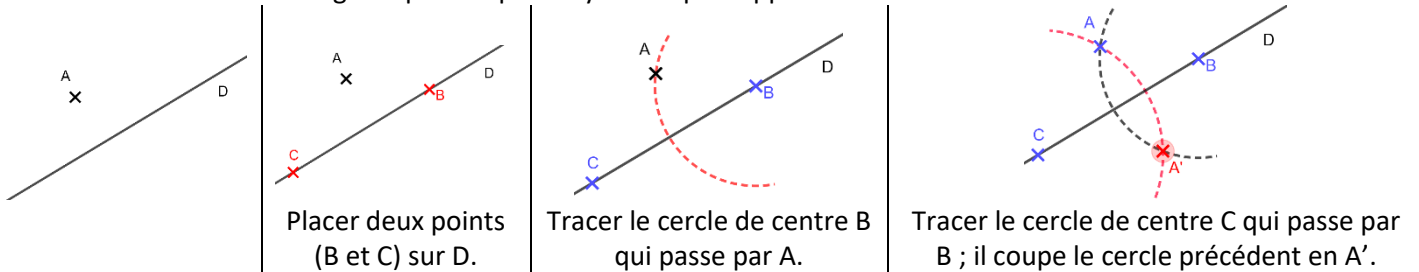
Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :



A' est le *symétrique* de A par la symétrie d'axe D.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie d'axe D.

Construction avec le compas et la règle non graduée

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :



Propriété admise

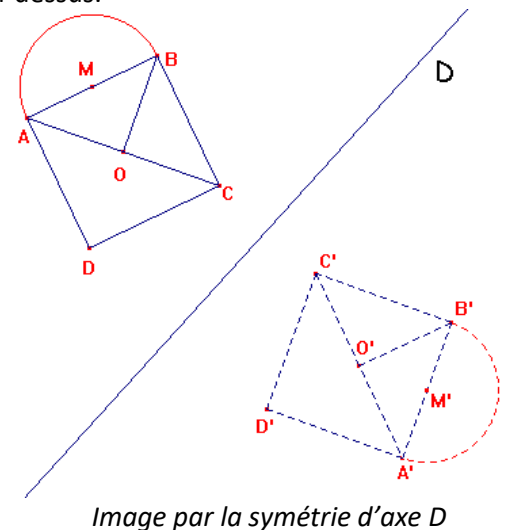
La symétrie axiale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré $A'B'C'D'$.
4. Tracer la diagonale $[A'C']$
5. Placer son milieu O' .
6. Tracer le segment $[B'O']$.
7. Placer le point M' au milieu de $[A'B']$.
8. Tracer le demi-cercle de diamètre $[A'B']$ à l'extérieur du carré.

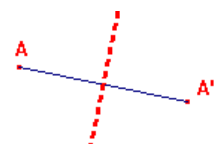


Pour mémoire

La symétrie axiale « correspond » à un miroir.

Caractériser

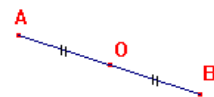
Pour caractériser une symétrie axiale, il faut donner son axe.
Pour retrouver son axe, il suffit de connaître un point et son image.
L'axe de symétrie est la médiatrice du segment formé par ces 2 points.



II – Symétrie centrale

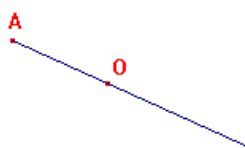
Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O si O est le milieu de [AB].



Construction

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport au point O il faut :



Tracer la demi-droite [AO).



Placer le point A' sur [AO) tel que O soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie de centre O.

On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie de centre O.

Propriété admise

La symétrie centrale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

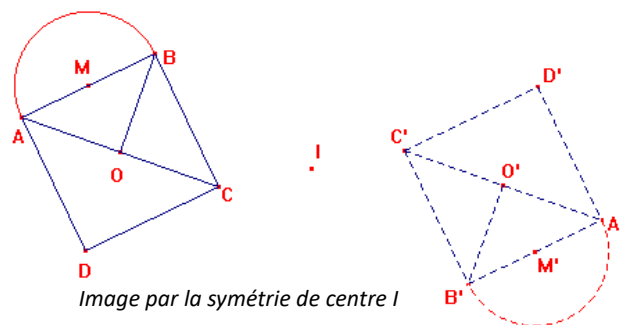


Image par la symétrie de centre I

Pour mémoire

La symétrie centrale « correspond » à un demi-tour autour du centre de symétrie.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie centrale, il faut donner son centre.

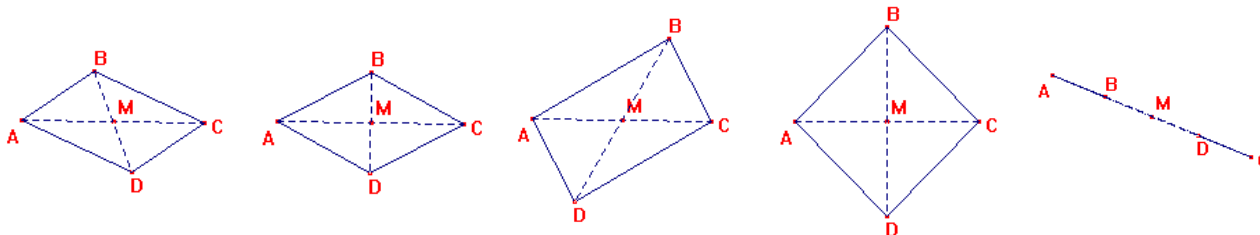
Pour retrouver son centre, il suffit de connaître un point et son image. Le centre de symétrie est le milieu du segment formé par ces 2 points.



III – Translation

Définition

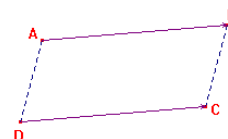
ABCD est un *parallélogramme* si ces diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.



Dans tous les cas ci-dessus, ABCD est un parallélogramme car M est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

Définition

On dit que l'image du point D est le point C par la *translation* qui envoie A sur B si ABCD est un parallélogramme.



Construction

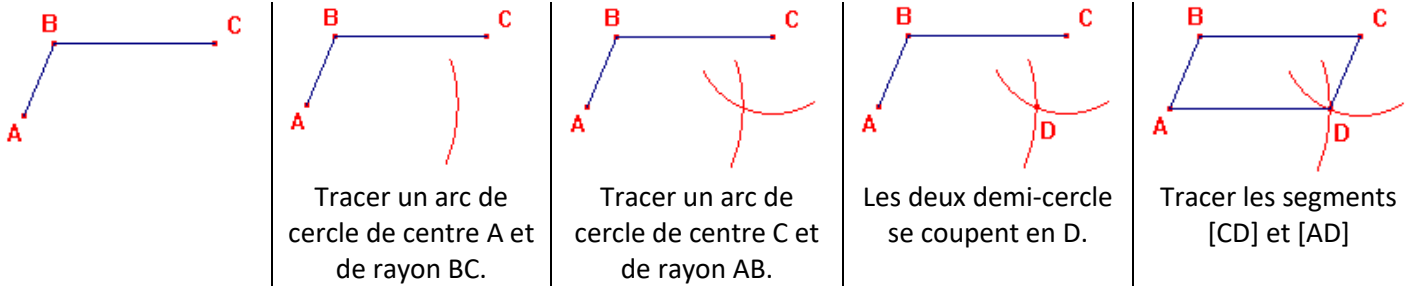
Pour construire l'image du point C dans la translation qui envoie A sur B il faut construire le parallélogramme ABC'C.

C' est le *translaté* de C par la translation qui envoie A sur B.

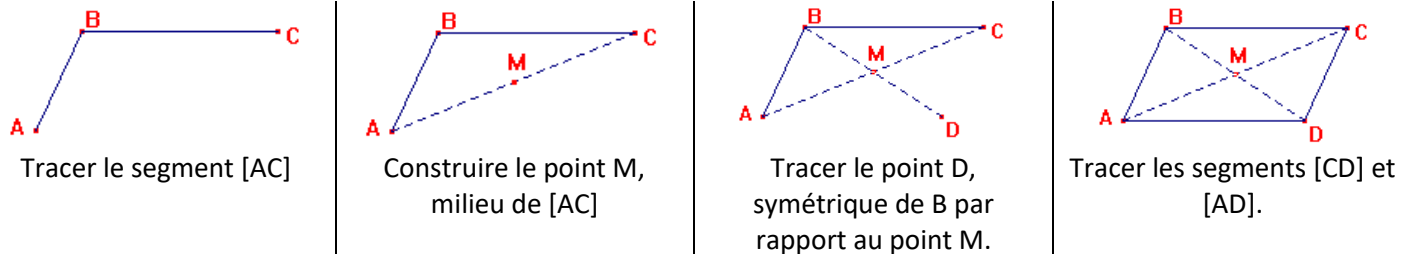
On dit aussi que C' est l'*image* de C par la translation qui envoie A sur B.



Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle et compas



Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle graduée



Propriété admise

La translation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour mémoire

La translation « correspond » à un glissement sans tourner.

Caractériser

Pour caractériser une translation, il faut donner un point et son image ou le vecteur dont les extrémités sont ces points.

Dans l'exemple, on peut parler de la translation qui envoie A sur B ou de la translation associée au vecteur \overrightarrow{AB} . On peut aussi parler de la translation qui envoie C sur C' ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{CC'}$.

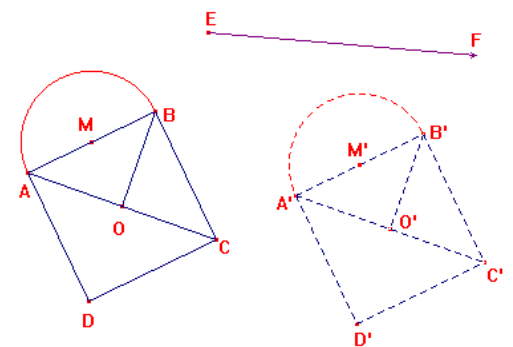


Image par la translation qui envoie E sur F



FRACTIONS : additions et soustractions

Définitions

Un nombre en *écriture fractionnaire* s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{b} \leftarrow \begin{array}{l} \text{le numérateur} \\ \text{le dénominateur} \end{array}$$

On parle de *fraction* lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

On parle de *fraction décimale* lorsque l'on a une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, 10000 ...

Propriété d'égalité de fractions - admise

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et le dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

Exemples

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35} \quad \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \quad \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

Définitions

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la valeur absolue de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

Exemples

$$\frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4} \quad \frac{45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

Remarque

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

Propriétés admises : Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

- 186 se divise par 2 car il est pair (il se termine par 6).
- 187 ne se divise pas par 2 car il est impair.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 237 est divisible par 3 car $2+3+7=12$ et 12 est divisible par 3.
- 238 n'est pas divisible par 3 car $2+3+8=13$ et 13 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

- 25 292 est divisible par 4 car 92 est divisible par 4, car $92=40+40+12$ et 12 est divisible par 4.
- 45 267 n'est pas divisible par 4 car 67 n'est pas divisible par $67=40+27$ et 27 n'est pas divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

- 185 se divise par 5 car il se termine par 5.
- 190 se divise par 5 car il se termine par 0.
- 187 ne se divise pas par 5.

Un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 ET par 3, donc s'il est pair ET si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 894 se divise par 6 car
 - il se divise par 2 (il est pair),
 - ET il se divise par 3 car $8+9+4=21$ qui se divise par 3.
- 165 ne se divise pas par 6 car
 - il ne se divise pas par 2 (il est impair),
 - même si il se divise par 3 car $1+6+5 = 12$ qui se divise par 3.
- 898 ne se divise pas par 6 car
 - il se divise par 2 (il est pair),
 - mais il ne se divise pas par 3 car $8+9+8=25$ qui ne se pas divise par 3.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

- 567 est divisible par 9 car $5+6+7=18$ et 18 est divisible par 9.
- 123 456 789 est divisible par 9 car $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ et 45 est divisible par 9 car $4+5=9$ qui est divisible par 9.
- 238 n'est pas divisible par 9 car $2+3+8=13$ et 13 n'est pas divisible par 9.

Remarque

Un nombre divisible par 9 est obligatoirement divisible par 3.

Définition

Un nombre est dit premier s'il n'a que 1 et lui-même comme diviseur (un nombre premier a exactement 2 diviseurs).

Exemples

Le nombre 3 est premier car ses diviseurs sont 1 et 3.

Le nombre 6 n'est pas premier car il se divise par 1, 2, 3 et 6.

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Astuce pour trouver tous les nombres premiers en partant de 2 : **crible d'Ératosthène** (c'est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec : -276 à -194).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On écrit tous les nombres de 1 à 100.

1 n'est pas premier donc on le barre

Le premier nombre non barré est 2 donc c'est un nombre premier On barre tous les multiples de 2 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 2 est 3 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 3 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 3 est 5 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 5 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 5 est 7 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 7 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 7 est 11 ; c'est un nombre premier.

On s'arrête ici car $11^2 = 11 \times 11 > 100$.

Tous les nombres non barrés sont premiers.

Les nombres premiers jusqu'à 100 sont : ♥ **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23**, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Comment décomposer un nombre en produits de facteurs premiers.

On veut décomposer 450.

450		On réécrit le nombre à gauche de la ligne verticale
225	2	2 est le plus petit nombre premier qui divise 450 $450 = 2 \times 225$ On écrit 225 à gauche et 2 à droite
75	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 225 $225 = 3 \times 75$ On écrit 75 à gauche et 3 à droite
25	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 75 $75 = 3 \times 25$
5	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 25 $25 = 5 \times 5$
1	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 5 $5 = 1 \times 5$ On s'arrête lorsqu'il y a 1 dans la colonne de gauche.

$$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

Exemples de décomposition en facteurs premiers

Décomposons 180 $\begin{array}{r l} 180 & \\ 90 & 2 \\ 45 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 5 \end{array}$ $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$	Décomposons 380 $\begin{array}{r l} 380 & \\ 190 & 2 \\ 95 & 2 \\ 19 & 5 \\ 1 & 19 \end{array}$ $380 = 2^2 \times 5 \times 19$
---	---

Utilisation de la calculatrice

Décomposons 180

CASIO FX92					TI COLLEGE PLUS			
1	8	0	EXE	SECONDE	F	180	SECONDE	► SIMP

On obtient : $2^2 \times 3^2 \times 5$

Exemple de simplification de fraction

Simplifier la fraction $\frac{21000}{29700}$

Décomposons 21000 $\begin{array}{r l} 21000 & \\ 10500 & 2 \\ 5250 & 2 \\ 2625 & 2 \\ 875 & 3 \\ 175 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 5 \\ 1 & 7 \end{array}$ $21000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7$	Décomposons 29700 $\begin{array}{r l} 29700 & \\ 14850 & 2 \\ 7425 & 2 \\ 2475 & 3 \\ 825 & 3 \\ 275 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 5 \\ 1 & 11 \end{array}$ $29700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$
---	--

$$\frac{21000}{29700} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 11} = \frac{70}{99}$$

Comment transformer une écriture fractionnaire en fraction ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateur entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, ...).

Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

Exemples

$$\frac{5,2}{2} = \frac{5,2 \times 10}{2 \times 10} = \frac{52 \div 2}{20 \div 2} = \frac{26 \div 2}{10 \div 2} = \frac{13}{5} \qquad \frac{4,51}{3,7} = \frac{4,51 \times 100}{3,7 \times 100} = \frac{451}{370}$$

Propriété d'addition de fractions de même dénominateur - admise

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

Exemples

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{3+6}{4} = \frac{9}{4} \qquad \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1-8}{3} = \frac{-7}{3} \qquad \frac{-1}{5} - \frac{8}{5} = \frac{-9}{5} \qquad \frac{-15}{6} - \frac{-8}{6} = \frac{-15 - (-8)}{6} = \frac{-15 + 8}{6} = \frac{-7}{6}$$

Définition

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

Remarque

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

Comment additionner deux fractions de dénominateurs différents ?

On se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

Exemples

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{3} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{21}{6} + \frac{10}{6} = \frac{31}{6} \qquad \frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 51}{34 \times 51} + \frac{8 \times 34}{51 \times 34} = \frac{255}{1734} + \frac{272}{1734} = \frac{527}{1734}$$

Remarque

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici, $\frac{527}{1734} = \frac{31}{102}$.

Astuce

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs. Pour cela, on décompose les deux nombres.

Décomposons 34		Décomposons 51
34		51
17 2		17 3
1 17		1 17
34 = 2 × 17		51 = 3 × 17

On cherche un nombre qui contient tous les facteurs ci-dessus :

$$2 \times 3 \times 17 = 102.$$

$$\frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 3}{34 \times 3} + \frac{8 \times 2}{51 \times 2} = \frac{15}{102} + \frac{16}{102} = \frac{31}{102}$$

Propriété admise

Prendre une quantité d'une fraction c'est multiplier le nombre par la fraction.

Exemples

Prendre $\frac{3}{4}$ de 126 € c'est prendre $\frac{3}{4} \times 126$ €.

Rouler $\frac{2}{5}$ de 800 km c'est rouler $\frac{2}{5} \times 800$ km.

Remarque

Le mot « de » en français se traduit par « × » en mathématiques.

Comment multiplier un nombre par une fraction ?

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$	$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$	$\frac{a}{b} \times c = a \times (c \div b)$
$\frac{12}{6} \times 7 = (12 \div 6) \times 7 = 2 \times 7 = 14$	$\frac{2}{3} \times 9 = (2 \times 9) \div 3 = 18 \div 3 = 6$	$\frac{5}{7} \times 21 = 5 \times (21 \div 7) = 5 \times 3 = 15$

Notation

La fraction $\frac{p}{100}$ est notée $p\%$

La fraction $\frac{15}{100}$ est notée 15%

Exemple de problème

Sébastien achète un pull. Le prix affiché est de 65€, mais il bénéficie d'une remise de 15%.
Combien va-t-il payer ?

Calculons le montant de la remise

$$\begin{aligned} 15\% \text{ de } 65 \text{ €} &= \frac{15}{100} \text{ de } 65 \\ &= \frac{15}{100} \times 65 = (15 \times 65) \div 100 = 975 \div 100 = 9,75 \end{aligned}$$

La remise est de 9,75 €.

Je calcule le prix réduit.

$$65 - 9,75 = 55,25$$

Le prix réduit est de **55,25 €**.

PROPORTIONNALITE, VITESSES et ECHELLES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

↓ × 1,52

Propriété admise

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \quad \text{départ} \xrightarrow{\times \frac{\text{arrivée}}{\text{départ}}} \text{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \quad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \quad 5 \xrightarrow{\times \frac{645}{5} \text{ ou } \times 129} 645 \quad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \quad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

- 1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.
- 2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5,1}{3} = 1,7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8,5}{5} = 1,7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11,9}{7} = 1,7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$$\frac{4,80}{3} = 1,6 \quad \frac{8,00}{5} = 1,6 \quad \frac{11,00}{7} \approx 1,57$$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$$\frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$

Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix : $65 \times 161 = 10\,465$

et $91 \times 115 = 10\,465$

donc $65 \times 161 = 91 \times 115$ donc $\frac{65}{91} = \frac{115}{161}$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix : $7 \times 17 = 119$ et $13 \times 9 = 117$

donc $7 \times 17 \neq 13 \times 9$ donc $\frac{7}{13} \neq \frac{9}{17}$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\frac{5}{4} = \frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$5 \times ? = 4 \times 7$ On effectue les produits en croix

$5 \times ? = 28$ On simplifie chaque membre

$? = 5,6$ On divise par 5

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$$\frac{5}{4} = \frac{7}{a}$$

$$a = \frac{4 \times 7}{5} = 5,6$$

$$\frac{5}{4} = \frac{b}{3}$$

$$b = \frac{3 \times 5}{4} = 3,75$$

$$\frac{c}{4} = \frac{7}{2}$$

$$c = \frac{4 \times 7}{2} = 14$$

$$\frac{5}{d} = \frac{7}{3}$$

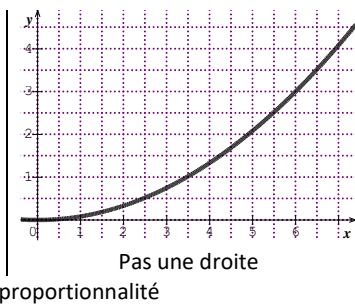
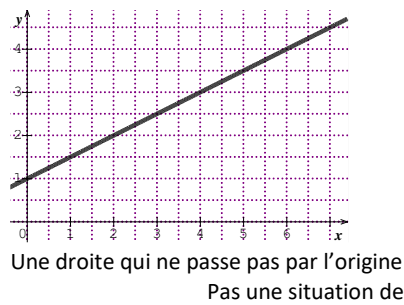
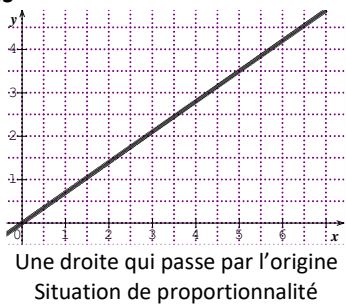
$$d = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7}$$

Propriété – admise

La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

- une droite
- qui passe par l'origine du repère

Exemples

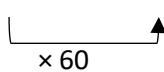


II – Vitesse, distance et temps



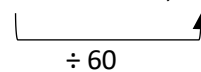
$3,4h \neq 3h 40 \text{ min}$

$3,4 \text{ h} = 3h + 0,40h = 3h 24\text{min}$



$3h 18\text{min} \neq 3,18h$

$3h 18 \text{ min} = 3h + 0,30h = 3,3h$



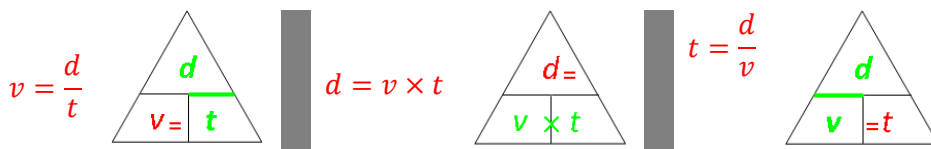
Conversion avec la calculatrice

CASIO FX92	Texas Instruments
3,15 [EXE] [0.] [0.] [0.]	3,15 [2nde] [π] [→DMS] [entrer]
3,15 h = 3h 9min	

CASIO FX92	Texas Instruments
3 [0.] [0.] [12] [0.] [0.] [EXE] [0.] [0.] [0.]	3 [2nde] [π] [°] [12] [2nde] [π] ['] [entrer]
3h 12min = 3,2h	

Propriétés admises

Si d est la distance, t le temps et v la vitesse moyenne on a alors



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$$v = \frac{d}{t} = \frac{183}{3} = 61$$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

↓ ÷3

$$? = \frac{183 \times 1}{3} = 61$$

Sa vitesse moyenne est de **61 km/h**.**Exemple 2** : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

↓ ×3

$$? = \frac{43 \times 3}{1} = 129$$

La distance parcourue est **129 km**.**Exemple 3** : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4,5} = \frac{8}{3}$$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

→ ÷ 4,5

$$? = 12 \div 4,5 = \frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$ h = **2h 40min**.**Exemple 4** : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km	1 h
=	=
135 000 m	3 600 s
?	1 s

↓ ÷ 3 600

$$? = 135\,000 \div 3\,600 = 37,5$$

$$135 \text{ km/h} = 37,5 \text{ m/s}$$

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
?	3 600 s
=	=
? km	1h

↓ × 3600

$$? = 15 \times 3600 = 54\,000 \text{ m} = 54 \text{ km}$$

$$15 \text{ m/s} = 54 \text{ km/h}$$

III – Ratios**Remarque**Deux nombres a et b sont dans le **ratio** 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ | Trois nombres a, b, c sont dans le **ratio** 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$ **Exemple**

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{8}{12} \text{ donc } 2, 10 \text{ et } 8 \text{ sont dans le ratio } 3 : 15 : 12$$

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = \frac{15}{18} \text{ donc } 10, 5 \text{ et } 15 \text{ sont dans le ratio } 12 : 6 : 18$$

Exemple 1

La vinaigrette est faite avec de l'huile, de la moutarde et du vinaigre dans le ratio 6 : 1 : 3.

On veut utiliser 2 cuillers de moutarde.

Combien faut-il prévoir des autres ingrédients ?

Je calcule la part des ingrédients

Ingrédient	Huile	Moutarde	Vinaigre
Ratio	6	1	3
Nombre de cuillers	?	2	??

↙ × 2

Le coefficient de proportionnalité est 2 donc il faut $2 \times 6 = 12$ cuillers d'huile et $2 \times 3 = 6$ cuillers de vinaigre.

Exemple 1

La vinaigrette est faite avec de l'huile, de la moutarde et du vinaigre dans le ratio 6 : 1 : 3.

On veut Obtenir 5 litres de vinaigrette.

Combien faut-il prévoir de chaque ingrédient ?

Je calcule la part des ingrédients

Ingrédient	Huile	Moutarde	Vinaigre	Total
Ratio	6	1	3	10
Volume	?	?	?	5 litres

↙ × 0,5

Le coefficient de proportionnalité est 0,5 donc il faut $0,5 \times 6 = 3$ L d'huile et $0,5 \times 1 = 1,5$ L de moutarde et $0,5 \times 3 = 1,5$ L de vinaigre.

IV – Echelles

Remarque

Pour représenter la réalité, il peut être nécessaire de l'agrandir ou de la réduire.

S'il s'agit d'un agrandissement, on multiplie les distances par un nombre supérieur à 1.

S'il s'agit d'une réduction, on multiplie les distances par un nombre entre 0 et 1.

Réduction

En bas à gauche, il est indiqué que l'échelle est de 1 : 10 000 ; on devrait écrire $\frac{1}{10\,000}$.

Cela signifie que pour passer de la réalité à la carte, on a multiplié les distances par $\frac{1}{10\,000}$.

Par exemple, si on cherche les points à 350 m de l'entrée du collège, on doit chercher la distance correspondante sur la carte, on calcule :

$$350 \times \frac{1}{10\,000} = 0,0350$$

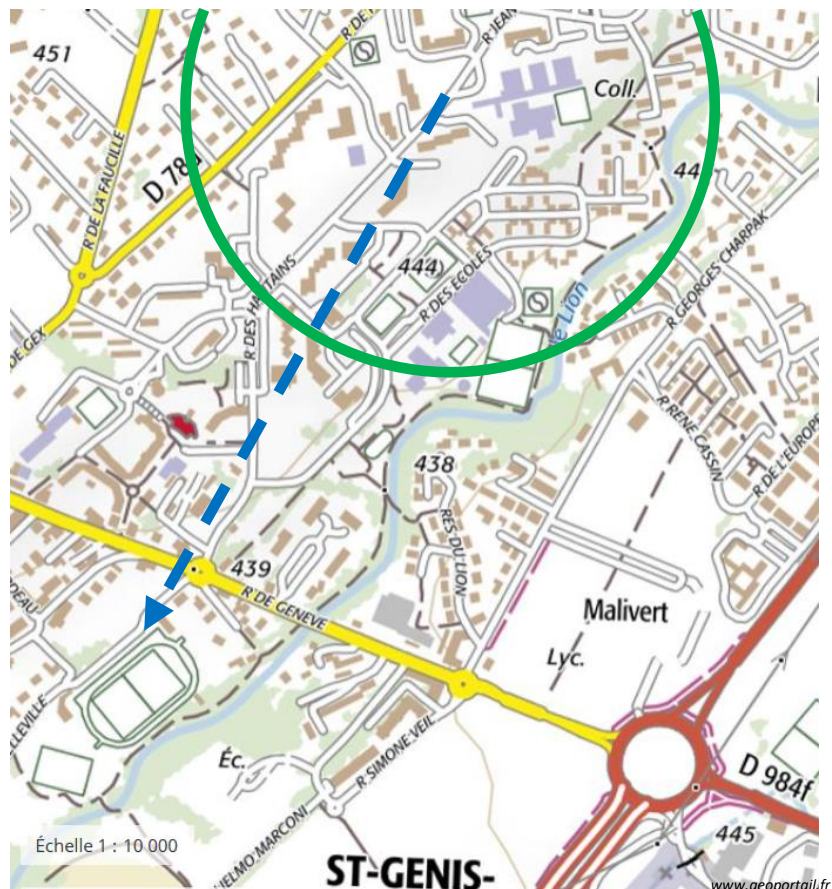
Sur la carte, cela correspond à 0,035 m = 3,5 cm
Ce sont donc tous les points sur le cercle vert.

L'échelle $\frac{1}{10\,000}$ signifie aussi que 1 cm sur la carte représente 10 00 cm = 100 m de la réalité. On aurait aussi pu la trouver avec un tableau de proportionnalité en utilisant 350 m = 35 000 cm

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
?	35 000 cm

$$? = \frac{1 \times 35\,000}{10\,000} = 3,5$$

On retrouve le rayon de 3,5 cm.



Pour aller de l'entrée du collège au stade, il y a 8 cm (la flèche bleue pointillée). On peut déterminer la distance entre le collège et le stade :

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
8 cm	?

$$? = \frac{8 \times 10\,000}{1} = 80\,000$$

Il y a 80 000 cm = 800 m pour aller du collège au stade.

Agrandissement

L'échelle est ici de $\frac{20}{1}$. Cela signifie que pour passer de la réalité à la photo, on a multiplié les distances par $\frac{20}{1}$.

Cela signifie aussi que 20 cm sur la photo représentent 1 cm dans la réalité.

Pour connaître sa taille réelle, on la mesure sur la photo ; on trouve ici 8,6 cm.

Je calcule sa taille réelle :

Photo	Réalité
20 cm	1 cm
8,6 cm	?

$$? = \frac{8,6 \times 1}{20} = 0,43$$

La taille est donc de 0,43 cm = 4,3 mm.



Un curculionidé (insecte phytophage). Image Louisa Howard - Dartmouth Electron Microscope Facility.

CALCUL LITTÉRAL

I – L'utilisation de lettres dans les calculs

Histoire

Le calcul littéral (calcul avec des lettres) appelé aussi calcul algébrique, du mot algèbre, est un puissant outil développé par le mathématicien français François Viète (1540 – 1603) qui a attribué une lettre à des quantités inconnues dans des calculs, mais aussi à des coefficients.

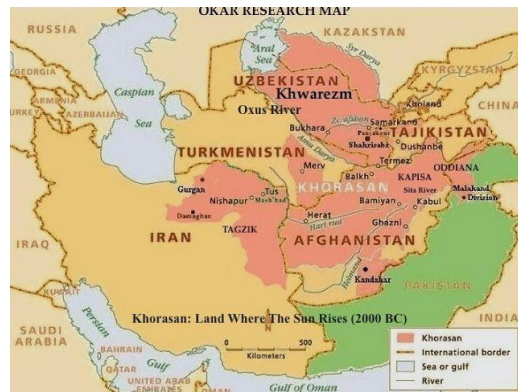
L'aire d'un carré est $A = c \times c$; le périmètre d'un cercle est $P = \pi \times d$.

L'usage de la lettre X remonte à René Descartes. Mais l'idée de donner un nom à l'inconnue d'un problème est plus ancienne encore, puisqu'elle vient du mathématicien grec Diophante III^e siècle, qui l'appelait « arithmos », le nombre. Plus tard, le mathématicien perse Al-Kwarizmi IX^e siècle la nomma « shay », la chose en arabe. Ce mot est plus connu en français populaire dans sa forme plurielle chouïa, "un chouïa" signifiant "un peu".

Cette pratique parvint en France grâce aux Espagnols, qui transcrivaient ce mot en « xay ». Descartes simplifia en ne gardant que l'initiale, d'où « X ». Son usage s'étendit ensuite, en particulier au monde judiciaire.

Al-Khwarizmi, (latinisé en Algoritmi ou Algorizmi), né dans les années 780, probablement à Khiva dans la région du Khwarezm (d'où il prend son nom), dans l'actuel Ouzbékistan, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse, membre de la Maison de la sagesse de Bagdad. Ses écrits, rédigés en langue arabe, puis traduits en latin à partir du XII^e siècle, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe. Sa vie s'est déroulée en totalité à l'époque de la dynastie abbasside.

Son nom latinisé est à l'origine du mot algorithme et le titre de l'un de ses ouvrages (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison) est à l'origine du mot algèbre. L'utilisation des chiffres arabes et leur diffusion dans le Moyen-Orient et en Europe sont dues à un autre de ses livres nommé Traité du système de numération des Indiens qui fut diffusé via la langue arabe dans tout l'empire abbasside. Al-Khwarizmi a classifié les algorithmes existants, en particulier selon leurs critères de terminaison, mais ne revendique pas leur invention : l'algorithme le plus connu du monde est celui d'Euclide et les premiers algorithmes connus le furent, sans surprise, dans un pays devant gérer des calculs élaborés de l'impôt : à Babylone.



⚠ Attention

Il faut prêter une attention toute particulière à la graphie de la lettre x pour ne pas la confondre avec le signe de multiplication \times .

Remarque calcul de $5 \times (x + 3)$

Géométrique	" Répétitif "	Avec la simple distributivité
<p>$5 \times (x + 3) = 5x + 15$</p>	$5 \times (x + 3) = x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $= 5 \times x + 5 \times 3$ $= 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5x + 15$

Propriété simple distributivité - admise

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Exemples de distribution

$$5 \times (2x + 7) = 10x + 35 \quad 8 \times (x - 3) = 8x - 24 \quad -6 \times (x + 7) = -6x - 42 \quad -4 \times (x - 7) = -4x + 28$$

Remarque sur la réduction des produits

On peut toujours réduire les produits.

$$2x \times 3x = 6x^2 \quad -5 \times 3x = -15x \quad 3x \times 7y = 21xy$$

Remarque sur la réduction de sommes

$$3x + 2x = 5x \quad 15x - 8x = 7x \quad 4x - 12x = -8x \quad 15x^2 - 8x^2 = 7x^2 \quad 33x - 5x^2 + 7x + 11x^2 = 40x + 6x^2$$

$5x^2 + 3x$ ne peut pas se réduire

Remarque

Dans tous les exercices, il faudra réduire les expressions (même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé).

Remarque gestion du signe « - »

$$-(2x + 7) = -2x - 7 \quad -(x - 3) = -x + 3 \quad -(-3x + 7) = +3x - 7 \quad -(-6x - 7) = +6x + 7$$

Exemples complexes

$$3(x+5) + 7(x+4) = 3x + 15 + 7x + 28 = 10x + 43$$

$$6(x-4) - 9(x+2) = 6x - 24 - 9x - 18 = -3x - 42$$

$$5(x+7) + 8(x-3) = 5x + 35 + 8x - 24 = 13x + 11$$

$$6(x-7) + 9x(3x-2) = 6x - 42 + 27x^2 - 18x = 27x^2 - 12x - 42$$

Propriété double distributivité

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration

$$(a+b)(c+d) = (a+b) \times c + (a+b) \times d = ac + ad + bc + bd$$

	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

Exemples

$$(x+3)(x+7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$$

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$(x+5)(x-4) = x^2 - 4x + 5x - 20 = x^2 + x - 20$$

$$(x-8)(x+3) = x^2 + 3x - 8x - 24 = x^2 - 5x - 24$$

$$(x-4)(x-6) = x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$$

$$(2x+3)(3x+7) = 6x^2 + 14x + 9x + 21 = 6x^2 + 23x + 21$$

Exemples complexes

$$(x+5)(x+4) + (x+2)(x+9) = x^2 + 4x + 5x + 20 + x^2 + 9x + 2x + 18 = 2x^2 + 20x + 38$$

$$(x+5)(x-4) + (x-2)(x-9) = x^2 - 4x + 5x - 20 + x^2 - 9x - 2x + 18 = 2x^2 - 10x - 2$$

$$(x+3)(x-2) + 5(x-6)(x+7) = x^2 - 2x + 3x - 6 + 5(x^2 + 7x - 6x - 42) = x^2 + x - 6 + 5x^2 + 35x - 42x - 210 = 6x^2 - 6x - 216$$

$$(x-2)(x-3) - (x-5)(x+4) = x^2 - 3x - 2x + 6 - (x^2 + 4x - 5x - 20) = x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 4x + 5x + 20 = -4x + 26$$

$$(2x+7)(3x-4) - 8(x+2)(x-5) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8(x^2 - 5x + 2x - 10) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8x^2 + 40x - 16x + 80 = -2x^2 + 37x + 52$$

II – Equations

Histoire

Dans l'Antiquité, vers -2000 avant JC, les Babyloniens savaient déjà résoudre des problèmes par équations, mais leur résolution n'a rien à voir avec les techniques actuelles. On le sait grâce à un célèbre document conservé au British Muséum à Londres, le Papyrus Rhind, qui date de -1650.

Le Papyrus Rhind a été écrit par un scribe égyptien nommé Ahmès. Son nom vient de l'Écossais Henry Rhind qui l'acheta en 1858 à Louxor. Il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes, en Egypte. Actuellement conservé au British Museum (Londres), il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5 m de longueur et 32 cm de large. Ahmès indique que son papyrus est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers -2000) remontant aux Babyloniens.

« J'ai une pierre mais je ne l'ai pas pesée. Après avoir enlevé un septième de son poids, j'ai pesé le tout et j'ai trouvé 1 ma-na (unité de masse). Quel était le poids de la pierre à l'origine ? ».

Définition

Une équation

$$5x + 5 = 3x - 17$$

Membre de gauche

Membre de droite

Remarque

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

Définition

On dit qu'un nombre est une solution d'une équation l'égalité entre les deux membres est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples

Pour l'équation $5x + 5 = 3x - 17$, tester si 2 et -11 sont des solutions.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = 2$ alors <ul style="list-style-type: none"> le membre de gauche devient $5 \times 2 + 5 = 15$ et le membre de droite devient $3 \times 2 - 17 = -11$ Donc 2 n'est pas une solution.	Si $x = 2$ alors $5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15$ et $3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11$ Donc 2 n'est pas une solution.	Si $x = 2$ alors $\begin{array}{l l} 5x + 5 & 3x - 17 \\ = 5 \times 2 + 5 & = 3 \times 2 - 17 \\ = 15 & = -11 \end{array}$ Donc 2 n'est pas une solution.
Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = -11$ alors <ul style="list-style-type: none"> le membre de gauche devient $5 \times (-11) + 5 = -50$ et le membre de droite devient $3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc -11 est une solution.	Si $x = -11$ alors $5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50$ et $3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc -11 est une solution.	Si $x = -11$ alors $\begin{array}{l l} 5x + 5 & 3x - 17 \\ = 5 \times (-11) + 5 & = 3 \times (-11) - 17 \\ = -50 & = -50 \end{array}$ Donc -11 est une solution.

Définition

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

Exemples

Equation n'ayant pas de solution	Equation ayant une seule solution	Equation ayant une infinité de solution
$2x + 3 = 2x + 5$	$5x + 5 = 3x - 17$	$2(x + 5) - 2 = 2x + 8$
On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution.	La solution de cette équation est -11.	On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie. Quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace x , l'égalité sera vraie.

Remarque

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

Propriété - admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

- On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
- On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

Exemples d'application de la propriété

$x + 5 = 8$ $-5 \quad -5$ On veut faire disparaître +5 ; il faut faire -5 dans les deux membres. $x = 3$ La solution est 3 .	$x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3}$ On veut faire disparaître $+\frac{1}{3}$; il faut faire $-\frac{1}{3}$ dans les deux membres. $x = \frac{1}{6}$ La solution est $\frac{1}{6}$.
$x - 7 = 4$ $+7 \quad +7$ On veut faire disparaître -7 ; il faut faire +7 dans les deux membres. $x = 11$ La solution est 11 .	$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $+\frac{1}{4} \quad +\frac{1}{4}$ On veut faire disparaître $-\frac{1}{4}$; il faut faire $+\frac{1}{4}$ dans les deux membres. $x = \frac{3}{4}$ La solution est $\frac{3}{4}$.
$3x = 12$ $\div 3 \quad \div 3$ On veut faire disparaître le 3 devant le x donc le $\times 3$ devant le x ; il faut diviser les deux membres par 3. $x = 4$ La solution est 4 . $\frac{x}{5} = 2$ $\times 5 \quad \times 5$ On veut faire disparaître la division par 5 ; il faut faire $\times 5$ dans les deux membres. $x = 10$ La solution est 10 .	$-7x = 42$ $\div (-7) \quad \div (-7)$ On veut faire disparaître le -7 devant le x donc le $\times (-7)$ devant le x ; il faut diviser les deux membres par -7. $x = -6$ La solution est -6 . $\frac{x}{-3} = 7$ $\times (-3) \quad \times (-3)$ On veut faire disparaître la division par (-7) ; il faut faire $\times (-7)$ dans les deux membres. $x = -21$ La solution est -21 .

Exemple de résolution d'une équation

Résoudre l'équation $2(x + 5) = 6x + 7$.

$2(x + 5) = 6x + 7$	On réécrit l'équation
$2x + 10 = 6x + 7$	On simplifie l'écriture de chacun des membres en développant et réduisant
$\begin{array}{r} -6x \quad -10 \quad -6x \quad -10 \\ -4x \quad = \quad -3 \end{array}$	On isole les inconnues dans un membre et les nombres dans l'autre en utilisant le point 1 de la propriété ci-dessus.
$\begin{array}{r} \div (-4) \quad \quad \quad \div (-4) \\ x \quad = \quad 0,75 \end{array}$	Pour trouver x , on divise par le nombre devant x en utilisant le point 2 de la propriété ci-dessus.
Si $x = 0,75$ alors $\begin{array}{r l} 2(x + 5) & 6x + 7 \\ = 2 \times (0,75 + 5) & = 6 \times 0,75 + 7 \\ = 11,5 & = 11,5 \end{array}$	On teste si le nombre trouvé est bien une solution de l'équation en remplaçant dans l'équation du départ.
La solution de l'équation est 0,75 .	On conclue par une phrase.

En contrôle, il faut écrire tout ce qui est en noir (la colonne de gauche) ci-dessus.

III – Problèmes

Exemple 1

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des poules et des lapins. J'ai compté 174 têtes et 400 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

Soit L le nombre de lapins.	Expliciter l'inconnue. C'est souvent la question qui nous indique quelle inconnue choisir.												
<table border="1"><thead><tr><th></th><th>Lapins</th><th>Poules</th><th>Total</th></tr></thead><tbody><tr><td>Têtes</td><td>L</td><td>$174 - L$</td><td>174</td></tr><tr><td>Pattes</td><td>$4 \times L$</td><td>$2 \times (174 - L)$</td><td>400</td></tr></tbody></table> $4 \times L + 2 \times (174 - L) = 400$		Lapins	Poules	Total	Têtes	L	$174 - L$	174	Pattes	$4 \times L$	$2 \times (174 - L)$	400	Ecrire l'équation
	Lapins	Poules	Total										
Têtes	L	$174 - L$	174										
Pattes	$4 \times L$	$2 \times (174 - L)$	400										
$4L + 348 - 2L = 400$ $2L + 348 = 400$ $\begin{array}{r} -348 \quad -348 \\ 2L \quad = \quad 52 \end{array}$ $\begin{array}{r} \div 2 \quad \quad \quad \div 2 \\ L \quad = \quad 26 \end{array}$	Résoudre l'équation												
Il y a 26 lapins et $174 - 26 =$ 148 poules .	Interpréter le résultat												
Vérification : Têtes : $26 + 148 = 174$ Pattes : $4 \times 26 + 2 \times 148 = 400$ C'est bon	Vérifier sur les données du problème												

Exemple 2

Jules à 8 ans et son père a 42 ans.

Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

Soit x le nombre d'années à attendre.

	Jules	Père
Aujourd'hui	8	42
Dans x années	$8 + x$	$42 + x$

$$\text{Père} = 3 \times \text{Jules}$$

$$42 + x = 3 \times (8 + x)$$

$$42 + x = 24 + 3x$$

$$\begin{array}{r} -24 \\ -x \end{array} \quad \begin{array}{r} -24 \\ -x \end{array}$$

$$18 = 2x$$

$$\begin{array}{r} \div 2 \\ \div 2 \end{array}$$

$$9 = x$$

Il faut attendre **9 ans**

Vérification : dans 9 ans

$$\text{Jules : } 8 + 9 = 17 \text{ ans}$$

$$\text{Père : } 42 + 9 = 51 \text{ ans}$$

$$3 \times 17 = 51$$

C'est bon

Exemple 4

Marina et Karima pensent au même nombre.

Marina ajoute 8 et multiplie le résultat par 3.

Karima multiplie le résultat par 5 et ajoute 6.

Curieusement, elles trouvent le même résultat.

A quel nombre ont-elles pensé au départ ?

Soit x le nombre pensé au départ.

	Marina	Karima
Départ	x	x
Après calcul	$3 \times (x + 8)$	$5 \times x + 6$

$$3 \times (x + 8) = 5 \times x + 6$$

$$3x + 24 = 5x + 6$$

$$\begin{array}{r} -3x \\ -6 \end{array} \quad \begin{array}{r} -3x \\ -6 \end{array}$$

$$18 = 2x$$

$$\begin{array}{r} \div 2 \\ \div 2 \end{array}$$

$$9 = x$$

Elles ont pensé au nombre **9**.

Vérification :

$$\text{Marina : } 9 \rightarrow 9 + 8 = 17 \rightarrow 17 \times 3 = 51$$

$$\text{Karima : } 9 \rightarrow 9 \times 5 = 45 \rightarrow 45 + 6 = 51$$

C'est bon

Exemple 3

Un kilogramme de poire coûte un euro de plus qu'un kilogramme de pommes.

Marion a acheté trois kilos de pommes et cinq kilos de poires.

Elle a payé vingt-cinq euros.

Quel est le prix d'un kilo de pommes ? de poires ?

Soit x le prix d'un kilogramme de pommes.

	Pommes	Poires	Total
Quantité en kg	3	5	
Prix au kg	x	$x + 1$	
Prix à payer	$3 \times x$	$5 \times (x + 1)$	25

$$3 \times x + 5 \times (x + 1) = 25$$

$$3x + 5x + 5 = 25$$

$$8x + 5 = 25$$

$$\begin{array}{r} -5 \\ -5 \end{array}$$

$$8x = 20$$

$$\begin{array}{r} \div 8 \\ \div 8 \end{array}$$

$$x = 2,5$$

Les pommes coûtent **2,5 €** au kilo

et les poires coûtent $2,5 + 1 = \mathbf{3,5 €}$ au kilo.0

Vérification :

$$\text{Pommes : } 3 \times 2,5 = 7,5$$

$$\text{Poires : } 5 \times 3,5 = 17,5$$

$$\text{Total : } 7,5 + 17,5 = 25$$

C'est bon

Exemple 5

Kassandra et Arthur ont le même nombre de billes.

Si Arthur donne 10 billes à Kassandra, elle en aura alors deux fois plus que lui.

Combien ont-ils de billes au départ ?

Soit x le nombre de billes au départ.

	Kassandra	Arthur
Départ	x	x
Après calcul	$x + 10$	$x - 10$

$$\text{Kassandra} = 2 \times \text{Arthur}$$

$$x + 10 = 2 \times (x - 10)$$

$$x + 10 = 2x - 20$$

$$30 = x$$

Ils avaient chacun **30 billes**.

Vérification :

$$\text{Kassandra : } 30 \rightarrow 30 + 10 = 40$$

$$\text{Arthur : } 30 \rightarrow 30 - 10 = 20$$

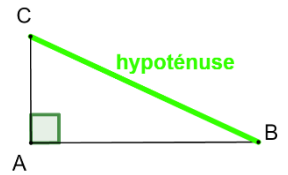
$$2 \times 20 = 40$$

C'est bon

Triangles rectangles : PYTHAGORE

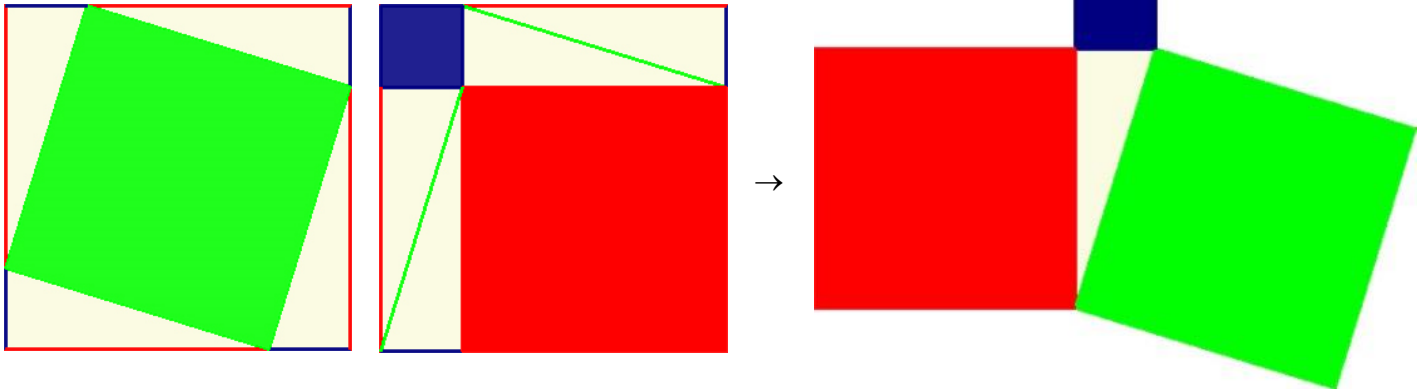
Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.



Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

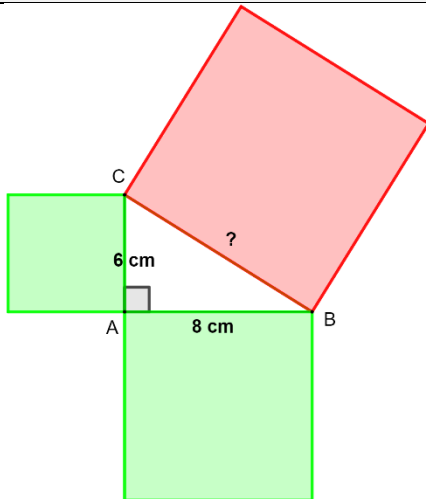
⚠ Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 6$ cm
- $AC = 8$ cm

Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2$$

$$BC^2 = 36 + 64$$

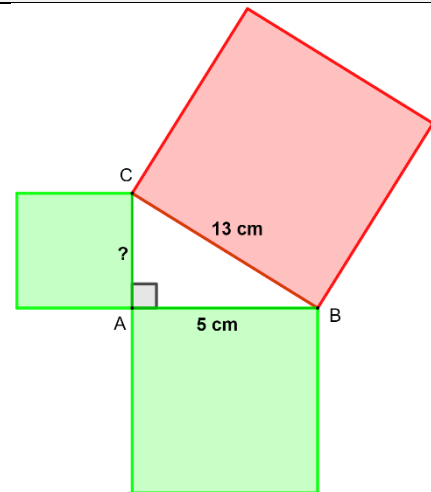
$$BC^2 = 100$$

$$BC = \sqrt{100} = \boxed{10 \text{ cm}}$$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 5$ cm
- $BC = 13$ cm

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$13^2 = 5^2 + AC^2$$

$$169 = 25 + AC^2$$

$$- 25 \quad - 25$$

$$144 = AC^2$$

$$AC = \sqrt{144} = \boxed{12 \text{ cm}}$$

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$.

Calcule BC.

Dans ABC rectangle en A,

d'après le théorème de Pythagore

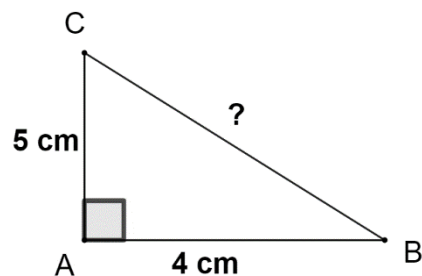
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 4^2 + 5^2$$

$$BC^2 = 16 + 25$$

$$BC^2 = 41$$

$$BC = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ cm}$$



Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	TI collègue
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape	
6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ \boxed{EXE}	6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ =
CASIO FX92	TI collègue
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape	
$\boxed{SECONDE}$ $\boxed{x^2}$ 100 \boxed{EXE}	$\boxed{SECONDE}$ $\boxed{x^2}$ 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

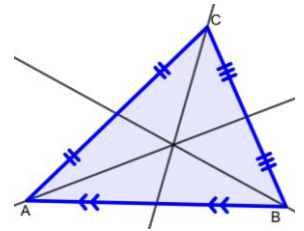
Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$. Quelle est la nature de ABC ?	Soit ABC un triangle tel que $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$ et $AC = 6 \text{ cm}$. Quelle est la nature de ABC ?
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté.
$\begin{array}{l l} AC^2 & AB^2 + BC^2 \\ = 5^2 & = 3^2 + 4^2 \\ = 25 & = 9 + 16 \\ & = 25 \end{array}$	$\begin{array}{l l} BC^2 & AB^2 + AC^2 \\ = 7^2 & = 5^2 + 6^2 \\ = 49 & = 25 + 36 \\ & = 61 \end{array}$
Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B (car [AC] est l'hypoténuse).	Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors ABC n'est pas rectangle .

Définition

La *médiane* d'un triangle est la droite issue d'un sommet qui passe par le milieu du côté opposé.

Dans le triangle ABC , la médiane issue de A est la droite qui passe par A et par le milieu de $[BC]$.



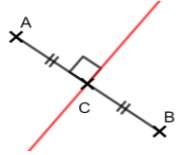
Propriété admise

Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre de gravité* du triangle.

Définition

La *médiatrice* d'un segment est la droite qui passe par le milieu d'un segment ET qui est perpendiculaire au support de ce segment.

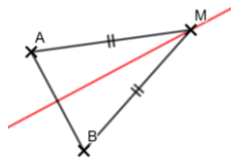
La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite qui passe par le milieu de $[AB]$ et qui est perpendiculaire à (AB) .



Propriétés admises

Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant (même distance) des extrémités de ce segment.

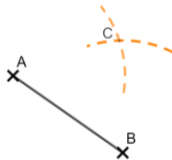
Si M est sur la médiatrice de $[AB]$ alors $MA = MB$.



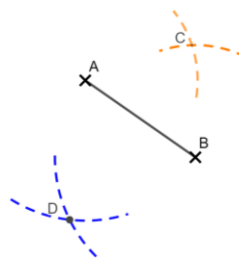
Si un point est équidistant (même distance) des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Si $MA = MB$ alors M est sur la médiatrice de $[AB]$.

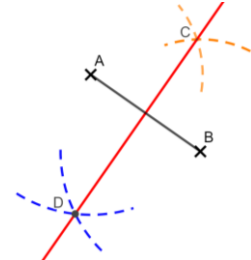
Construction de la médiatrice du segment $[AB]$



Tracer deux arcs de cercle de même rayon et de centres A et B .
Ils se coupent en C .



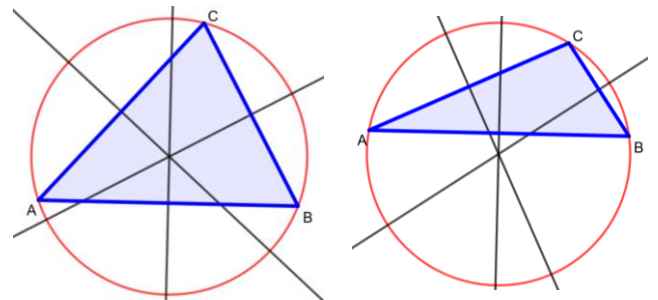
Tracer deux autres arcs de cercle de même rayon et de centres A et B .
Ils se coupent en D .



La médiatrice de $[AB]$ est la droite (CD) .

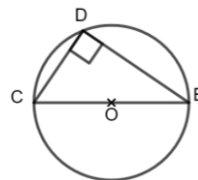
Propriété admise

Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle circonscrit au triangle*.



Propriétés admises

Si un triangle a ses 3 sommets sur un cercle et a un côté qui est un diamètre du cercle alors ce triangle est rectangle.



Si un triangle est rectangle alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

FRACTIONS : multiplications et divisions

Propriété du signe des fractions

Une fraction est une division, donc la règle des signes s'applique pour déterminer le signe d'une fraction (on compte le nombre de termes négatifs).

Exemples

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} = -\frac{-3}{-4} = -0,75$$

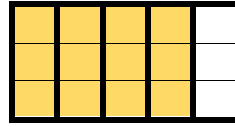
Il y a 1 (ou 3) terme(s) négatif(s),
donc le résultat est négatif.

$$\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = +0,75$$

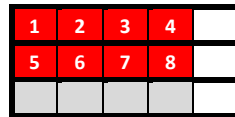
Il y a 2 termes négatifs,
donc le résultat est positif.

Remarque

Quatre cinquièmes valent



Deux tiers de quatre cinquièmes valent huit quinzièmes



Deux tiers de quatre cinquièmes s'écrit $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ et on voit que $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

Propriété de multiplication de fractions - admise

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Astuce

Pour déterminer le signe, on utilise la règle des signes.

Exemples

$$\frac{5}{7} \times \frac{9}{11} = \frac{5 \times 9}{7 \times 11} = \frac{45}{77}$$

$$\frac{-5}{3} \times \frac{-8}{-4} = -\frac{5 \times 8}{3 \times 4} = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3}$$

Il y a 3 termes négatifs,
donc le résultat est négatif.



$$2 \times \frac{3}{5} \neq \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{mais} \quad 2 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$$

Définition

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a vaut 1. L'inverse de a est noté : a^{-1} .

Exemples

- L'inverse de 2 est 0,5 car $2 \times 0,5 = 1$
- L'inverse de 4 est 0,25 car $4 \times 0,25 = 1$
- L'inverse de 0,8 est 1,25 car $0,8 \times 1,25 = 1$

Propriété

L'inverse du nombre a vaut $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ vaut $\frac{b}{a}$.

Démonstrations

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$$

Exemples

Nombre	5	-3	$\frac{2}{7}$	$\frac{-3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
Inverse	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	N'existe pas



Ne pas confondre inverse et opposé.

L'opposé de 2 est -2

L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$

Définition

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

Exemples

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{-2}{3} \div \frac{5}{7} = -\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = -\frac{14}{15}$$

$$\frac{7}{3} \div 2 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$8 \div \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5}$$



On inverse uniquement le nombre se trouvant après le symbole de division et on ne change pas celui qui est avant.

Application

Parcours bleu

Parcours rouge

Remarques

$\frac{3}{5}$ est une notation de $3 \div 5$ et vaut 0,6

Il n'est pas possible de donner une valeur décimale exacte pour toutes les fractions, par exemple : $\frac{1}{3}$ » 0,33



Attention à la position du signe d'égalité lorsqu'il y a des fractions à "étages".

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \gg 2,67$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \gg 0,17$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Exemple de calcul « complexe »

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{-1} = \frac{20}{-4} = -5$$

Théorème de THALES, TRIANGLES SEMBLABLES, HOMOTHETIES

I – Théorème de Thalès

Rappel admise

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \quad \text{départ} \xrightarrow{\times \frac{\text{arrivée}}{\text{départ}}} \text{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \quad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \quad 5 \xrightarrow{\begin{matrix} \times \frac{645}{5} \\ \text{ou} \\ \times 129 \end{matrix}} 645 \quad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \quad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

Soit ABC un triangle.

Si $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$ et $(BC) \parallel (DE)$ alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

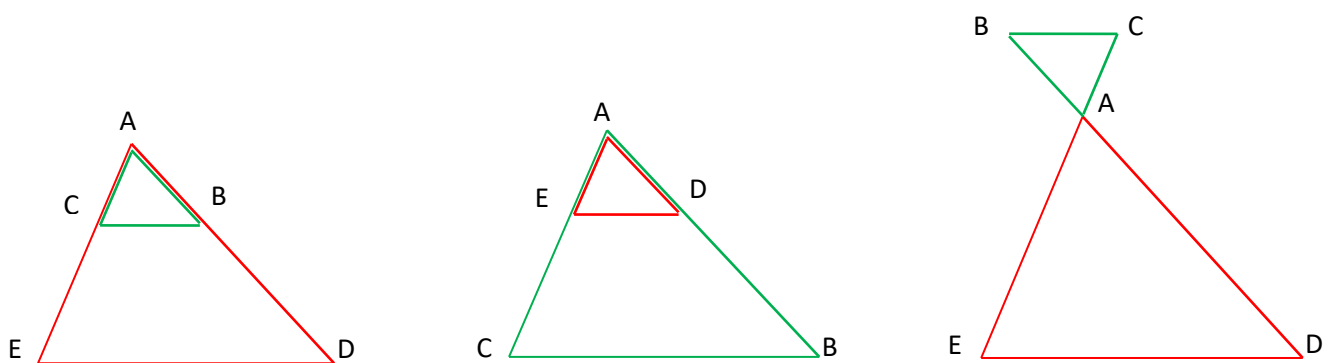
Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$ tels que $(BC) \parallel (DE)$ alors

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



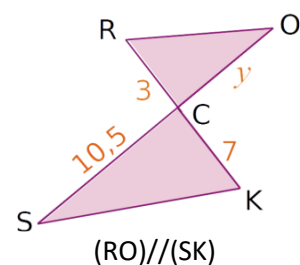
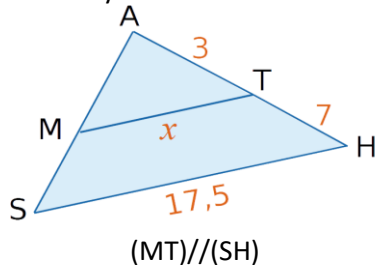
"Démonstration"

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

Exemples

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.



Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme $(MT) \parallel (HS)$, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{AM}{3 \times 17,5} = \frac{x}{17,5}$$

$$x = \frac{3 \times 17,5}{10} = 5,25 \text{ cm}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme $(RO) \parallel (KS)$, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CR}{CK} = \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{CO}{10,5} = \frac{y}{SK}$$

$$y = \frac{3 \times 10,5}{7} = 4,5 \text{ cm}$$

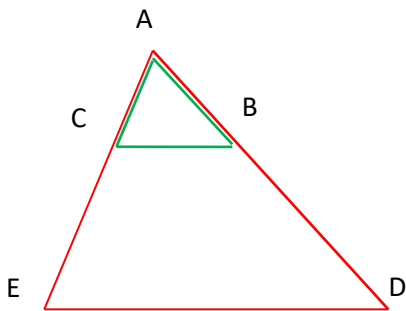
Propriété réciproque de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$$

alors (BC) // (DE)



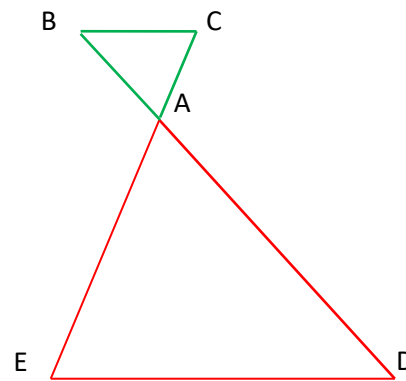
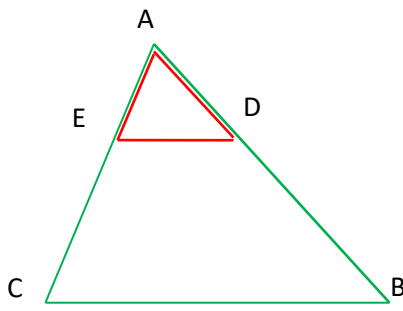
Propriété contraposée de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$$\frac{AB}{AC} \neq \frac{AE}{AD}$$

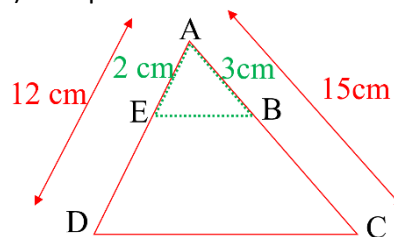
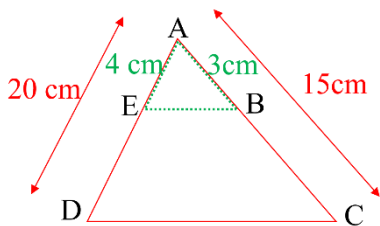
$$\frac{AD}{AE} \neq \frac{AC}{AB}$$

alors (BC) et (DE) ne sont pas parallèles



Exemples

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.



Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$. On calcule séparément ces deux rapports

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE) // (CD).

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

donc $\frac{AB}{AC} \neq \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

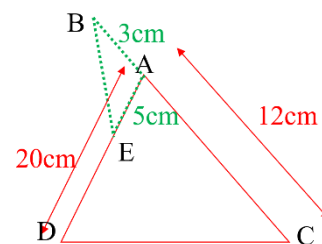
Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.

On a : $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

On a aussi : $\frac{AE}{AD} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.



Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA] sans appartenir à [DA].

II – Triangles semblables

Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels
- ou
- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles

Dans le triangle ABC, on a

$$\widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180 - (102 + 49) = 29^\circ.$$

Dans le triangle A'B'C', on a

$$\widehat{B}' = 180 - (\widehat{A}' + \widehat{C}') = 180 - (49 + 29) = 102^\circ.$$

On a donc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

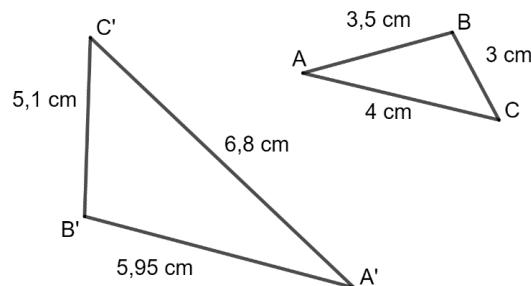
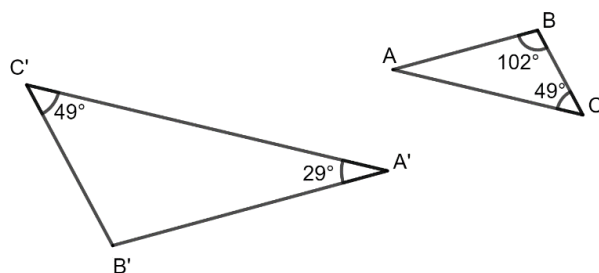
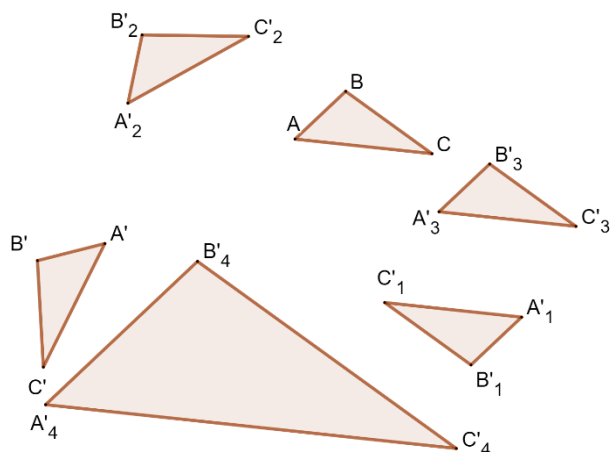
Exemple 2 : avec des côtés proportionnels

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{5,95}{3,5} = 1,7$$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{6,8}{4} = 1,7$$

$$\frac{C'B'}{CB} = \frac{5,1}{3} = 1,7$$

Donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.



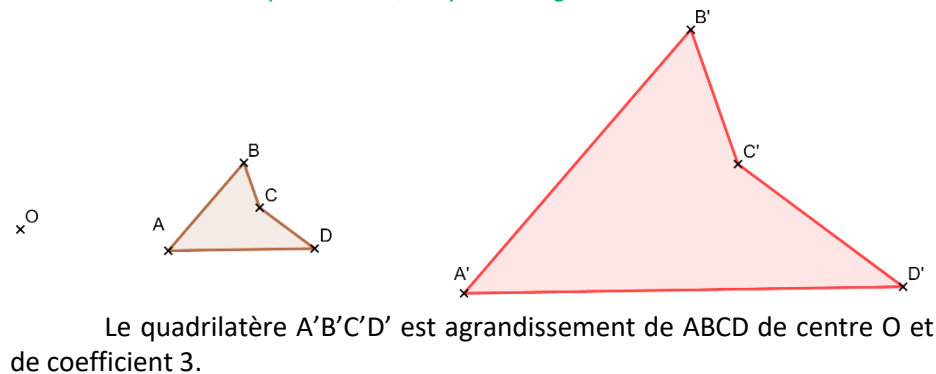
III – Homothéties : agrandissement/réduction

Définition

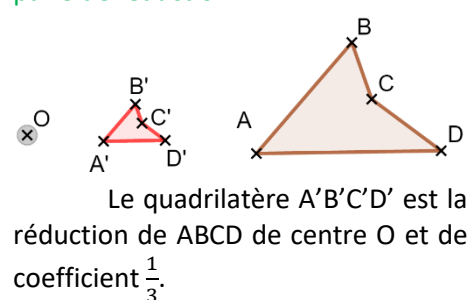
Le point A' est l'image du point A par l'*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

- $A' \in (OA)$
- $OA' = k \times OA$

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'*agrandissement*.



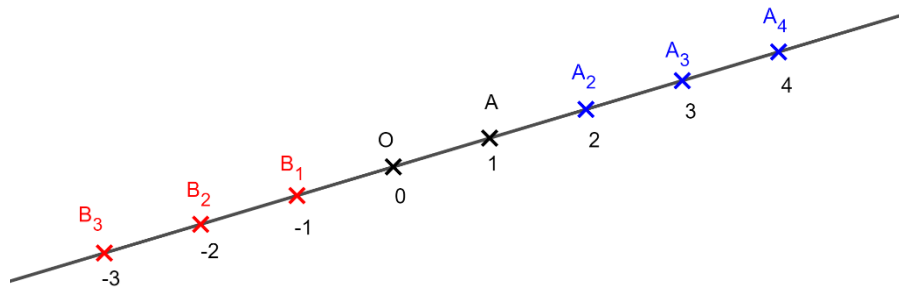
Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.



Construction

Pour construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si $k > 0$, tracer $[OA]$ puis mesurer $[OA]$ et placer A' sur $[OA]$ tel que $OA' = k \times OA$
- Si $k < 0$, tracer $[AO]$ puis mesurer $[OA]$ et placer A' sur $[AO]$ tel que $OA' = (\text{valeur absolue de } k) \times OA$



- A_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d'agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l'année).

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré $A'B'C'D'$.
4. Tracer la diagonale $[A'C']$
5. Placer son milieu E' .
6. Tracer le segment $[B'E']$.
7. Placer le point M' au milieu de $[A'B']$.
8. Tracer le demi-cercle de diamètre $[A'B']$ à l'extérieur du carré.

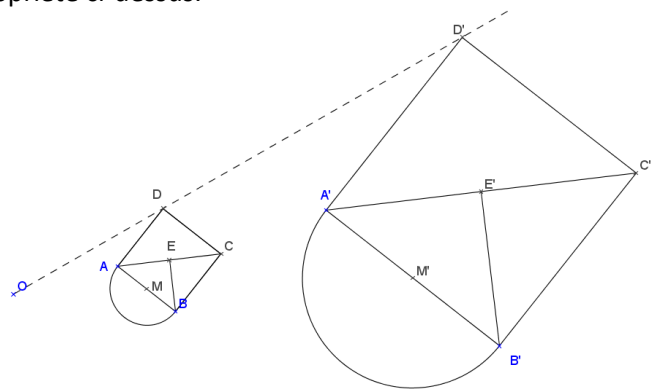


Image par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Caractériser

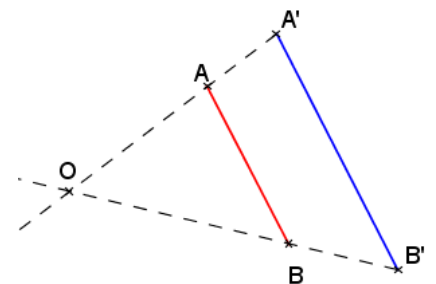
Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites $[A'A]$ et $[B'B]$; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer $[OA]$ et $[OA']$.

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.



PUISSANCES de 10 et NOTATION SCIENTIFIQUE

Définition

Le nombre noté a^n qui se lit « a exposant n » est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemples

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \quad 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \quad (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

Remarques

a^2 se lit "a exposant 2" ou "a au carré"

a^3 se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

Astuce

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de a^n est positif si :

- a est positif
- ou a est négatif et n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 ...).

Le signe de a^n est négatif si : a est négatif et n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 ...).

Exemples

4^5 est positif

$(-4)^5$ est négatif car il y a 5 facteurs négatifs.

$(-10)^8$ est positif car il y a 8 facteurs négatifs.

Application

Parcours vert

Propriété de priorité opératoire - admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On calcule les puissances.
3. On effectue les multiplications et divisions.
4. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple

$$\begin{aligned} & 4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3) \\ &= 4 \times 5^2 \times (5 - 12) \\ &= 4 \times 5^2 \times (-7) \\ &= 4 \times 25 \times (-7) \\ &= 100 \times (-7) \\ &= -700 \end{aligned}$$



Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances

$$(-2)^4 = 16 \text{ car } (-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

$$-2^4 = -16 \text{ car } -2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction.

On calcule d'abord la puissance.

Propriété 1 - admise

$$\underline{x^a \times x^b = x^{a+b}}$$

S'il y a le même nombre en bas, on additionne les puissances

Exemples

$$\underline{2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}}$$

$$\underline{3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}}$$

$$\underline{(-2)^3 \times (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10}}$$

"Justification"

$$2^3 \times 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{3+7} = 2^{10}$$

⚠ Attention à la consigne car on peut attendre deux résultats différents.

Calcule

Mettre $2^3 \times 2^5$ sous la forme d'une seule puissance

$$2^3 \times 2^5 = 8 \times 32 = 256$$

Le résultat est un nombre (entier ou décimal) ou une fraction

$$2^3 \times 2^5 = 2^8$$

Le résultat est **une** puissance

Propriété 2 - admise

$$(x^a)^b = x^{a \times b}$$

Si les puissances sont imbriquées, on multiplie les exposants.

Exemples

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} \quad (10^2)^4 = 10^{2 \times 4} = 10^8$$

"Justification"

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12}$$

Remarque

10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000	10 000
$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1 000	10 000
$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^1}$	1	10	100	1 000	10 000

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1}$$

Propriété 3 - admise

Si $x \neq 0$ alors $x^0 = 1$

Exemples

$4^0 = 1$

$(-4)^0 = 1$

$p^0 = 1$

$2,7^0 = 1$

$(-4,8)^0 = 1$

$-9^0 = -1$

Propriété 4 - admise

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

L'exposant négatif devient « 1 sur ... »

Exemples

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \quad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Propriété 5 - admise

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

L'exposant négatif devient « 1 sur ... »

Exemples

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \quad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Propriété - admise

Soit n un entier positif.

10^n s'écrit avec un "1" suivi de n "0".

10^{-n} s'écrit "0,0...01" avec n "0" au total en comptant celui avant la virgule.

Exemples

$10^7 = 10000000$
7 zéros

$10^{-8} = 0,00000001$
8 zéros

Définition

Un nombre est dit **sous la forme scientifique** (ou en **notation scientifique**) s'il s'écrit sous la forme : $a \times 10^n$



a est un nombre décimal dont la valeur absolue est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10). n est un entier relatif (positif ou négatif)

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique

15 Il manque $\times 10^{\dots}$	10^3 Il manque un nombre devant	15×10^4 Le nombre devant est supérieur à 10.	10×10^4 Le nombre devant est égal à 10.	$0,8 \times 10^4$ Le nombre devant n'est pas supérieur ou égal à 1.	$1,5 \times 10^{4,2}$ L'exposant n'est pas entier
-------------------------------------	--------------------------------------	--	---	--	--

Exemples de nombres étant sous la forme scientifique

1×10^4	$1,5 \times 10^{-5}$	$-1,5 \times 10^{42}$	$-9,5 \times 10^{-12}$	$-1,7 \times 10^0$	$1,5 \times 10^0$
-----------------	----------------------	-----------------------	------------------------	--------------------	-------------------

Rappels

Si n est positif, multiplier par 10^n c'est décaler la virgule de n rangs vers la droite.

Si n est négatif, multiplier par 10^{-n} c'est décaler la virgule de n rangs vers la gauche.

Exemples de passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$$4,52 \times 10^4 = 45200 \quad -6 \times 10^4 = -60000 \quad 4,52 \times 10^{-4} = 0,000452$$

Exemples de passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$$123,45 = 1,2345 \times 10^2 \quad 10^2 = 100$$

$$0,012345 = 1,2345 \times 10^{-2} \quad 10^{-2} = 0,01$$

$$123,45 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^2 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^7$$

Remarque

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique (où apparaissent uniquement des quotients ou produits), on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

Exemples

$$12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8 = 12 \times 55 \times 10^4 \times 10^8 = 660 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^2 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^{14}$$

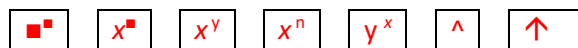
$$25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^8 = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^8 = -10000 \times 10^{-6} = -1 \times 10^4 \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$$

$$0,0055 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 0,0055 \times 2 \times 10^7 \times 10^8 = 0,011 \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{-2} \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{13}$$

$$\frac{45 \times 10^{23} \times 24 \times 10^{-4}}{18 \times 10^5} = \frac{45 \times 24}{18} \times \frac{10^{23} \times 10^{-4}}{10^5} = \frac{1080}{18} \times \frac{10^{19}}{10^5} = 60 \times 10^{14} = 6 \times 10^1 \times 10^{14} = 6 \times 10^{15}$$

Utilisation de la calculatrice

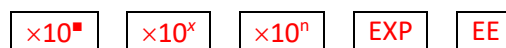
Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :



Dans la suite, on nommera x^{\square} cette touche.

Pour calculer $5^3 \times 2 - (2 - 5)^4$ on tape $5 \square x^y 3 \times 2 - (2 - 5) \square x^y 4$ et on trouve 169.

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :



Dans la suite, on nommera $\square x 10^{\square}$ cette touche. Elle remplace l'appui sur les touches $\square x 10^{\square}$

Pour calculer $12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8$ on tape $12 \square x 10^{\square} 4 \times 55 \square x 10^{\square} 8$ et on trouve $6,6 \times 10^{14}$.

STATISTIQUES

Exemple

Voici la liste des âges en mois d'élèves de troisième :

180	176	179	176	182	178	184	181	179	173	182
187	175	181	174	183	178	180	178	184	173	175
173	180	195	179	174	182	172	174	195	183	193
190	181	173	177	180	183	180	183	186	180	

Définitions

On appelle **effectif total** le nombre de valeurs de la série.

Ici, l'effectif total est 43.

On appelle **effectif de A** le nombre de fois où A apparaît dans la série.

L'effectif de 178 est 3 car il y a 3 personnes ayant 178 mois.

On appelle **fréquence de A** le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

La fréquence de 178 est $\frac{3}{43}$, ce qui signifie que 3 élèves sur les 43 du groupe ont 178 mois.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Les fréquences sont (souvent) exprimées en pourcentages.

La fréquence de 178 est $\frac{3}{43} \approx 7\%$.

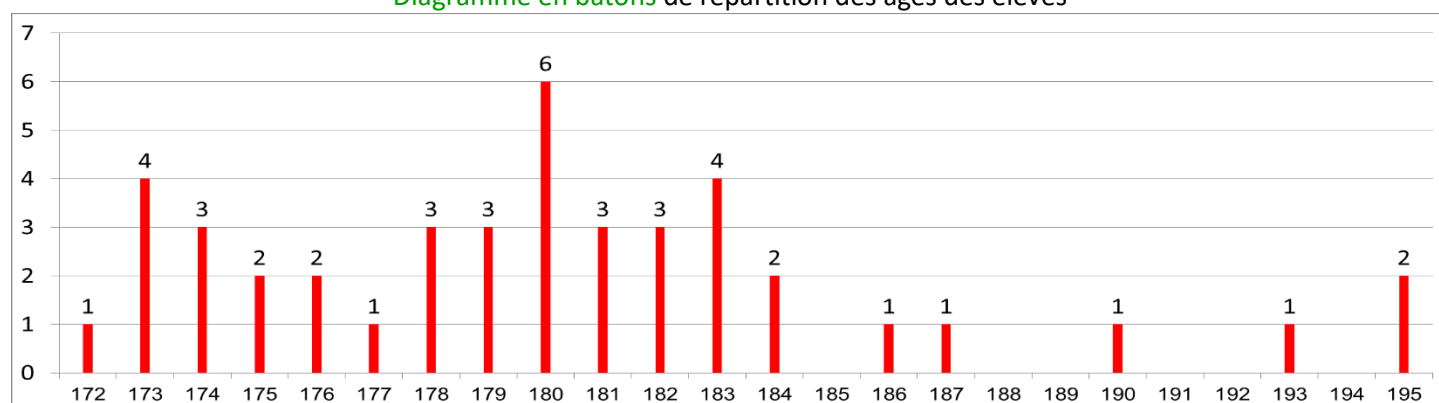
$$\text{Fréquence de A en \%} = \text{Fréquence de A} \times 100 = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$$

Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195	Total
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2	43
Fréquence	$\frac{1}{43}$	$\frac{4}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{6}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{3}{43}$	$\frac{4}{43}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{2}{43}$	1
Fréquence en %	2%	9%	7%	5%	5%	2%	7%	7%	14%	7%	7%	9%	5%	2%	2%	2%	2%	5%	100%

} $\div 43$
} $\times 100$

Diagramme en bâtons de répartition des âges des élèves



Définitions

On appelle **minimum** la plus petite valeur de la série.

Le minimum est 172.

On appelle **maximum** la plus grande valeur de la série.

Le maximum est 195.

On appelle **étendue** l'écart entre le minimum et le maximum.

L'étendue est $195 - 172 = 23$ mois.

On appelle *médiane* une valeur qui partage la série en deux sous-parties de même effectif tel que dans une sous-partie sont regroupées toutes les valeurs inférieures ou égales à la médiane et dans l'autre sont regroupées toutes les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

Remarque

Une médiane peut être une valeur de la série (ou non).

Comment déterminer une médiane ?

On ordonne (on trie) la série (par ordre croissant).

On détermine l'effectif total N.

Si N est impair, la médiane est une des valeurs de la série ; c'est la $\frac{N+1}{2}$ ème.

Si N est pair, une médiane est entre deux valeurs de la série ; entre la $\frac{N}{2}$ ème et la $\frac{N}{2} + 1$ ème.

Astuce pour déterminer la position de la médiane

On calcule $\frac{N+1}{2}$

Si on trouve un nombre entier, c'est la position de la médiane dans la série

Si ce n'est pas un nombre entier, la position de la médiane est donnée par les deux entiers consécutifs encadrant $\frac{N+1}{2}$.

Exemple 1

Dans la série 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10, l'effectif total est 9, donc la médiane est la 5^{ème} valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée est 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 donc la médiane est 6.

On prend les 2 entiers consécutifs encadrant $\frac{10+1}{2} = 5,5$

On calcule $\frac{9+1}{2} = 5$

Exemple 2

Dans la série 1 ; 2 ; 6 ; 7 ; 11 ; 15 ; 15 ; 17 ; 17 ; 17, l'effectif total est 10, donc une médiane est entre la 5^{ème} valeur et la 6^{ème} valeur de la série ordonnée.

La série est déjà ordonnée donc la médiane est **entre 11 et 15**. On peut prendre n'importe quelle valeur, mais on choisit le « milieu » de l'intervalle. Ici, une médiane est 13.

Exemple des âges

Dans l'exemple des âges, l'effectif total est 43. Une médiane est la 22^{ème} valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée commence par : 172, 173, 173, 173, 173, 174, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 177, 178, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, 180, 180, 180, 181, 181, 181 ...

Inutile de trier toute la série car il nous faut juste la 22^{ème} valeur.

La médiane est 180 mois.

Comment calculer la moyenne - Méthode 1

1. On additionne toutes les valeurs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Soit M la moyenne de cette série.

$$M = (180 + 176 + 179 + 176 + 182 + 178 + 184 + 181 + 179 + 173 + 182 + 187 + 175 + 181 + 174 + 183 + 178 + 180 + 178 + 184 + 173 + 175 + 173 + 180 + 195 + 179 + 174 + 182 + 172 + 174 + 195 + 183 + 193 + 190 + 181 + 173 + 177 + 180 + 183 + 180 + 183 + 186 + 180) \div 43$$

$$= 7751 \div 43 \approx 180,2 \text{ mois.}$$

L'âge moyen est de $7750 \div 43 \approx 180,2$ mois.

Comment calculer la « moyenne pondérée » - Méthode 2

1. On calcule la somme de toutes les valeurs en utilisant le tableau d'effectifs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Soit M la moyenne de cette série.

$$M = (172 + 4 \times 173 + 3 \times 174 + 2 \times 175 + 2 \times 176 + 177 + 3 \times 178 + 3 \times 179 + 6 \times 180 + 3 \times 181 + 3 \times 182 + 4 \times 183 + 2 \times 184 + 186 + 187 + 190 + 193 + 2 \times 195) \div 43$$

$$= 7751 \div 43 \approx 180,2 \text{ mois.}$$

L'âge moyen est de $7750 \div 43 \approx 180,2$ mois.

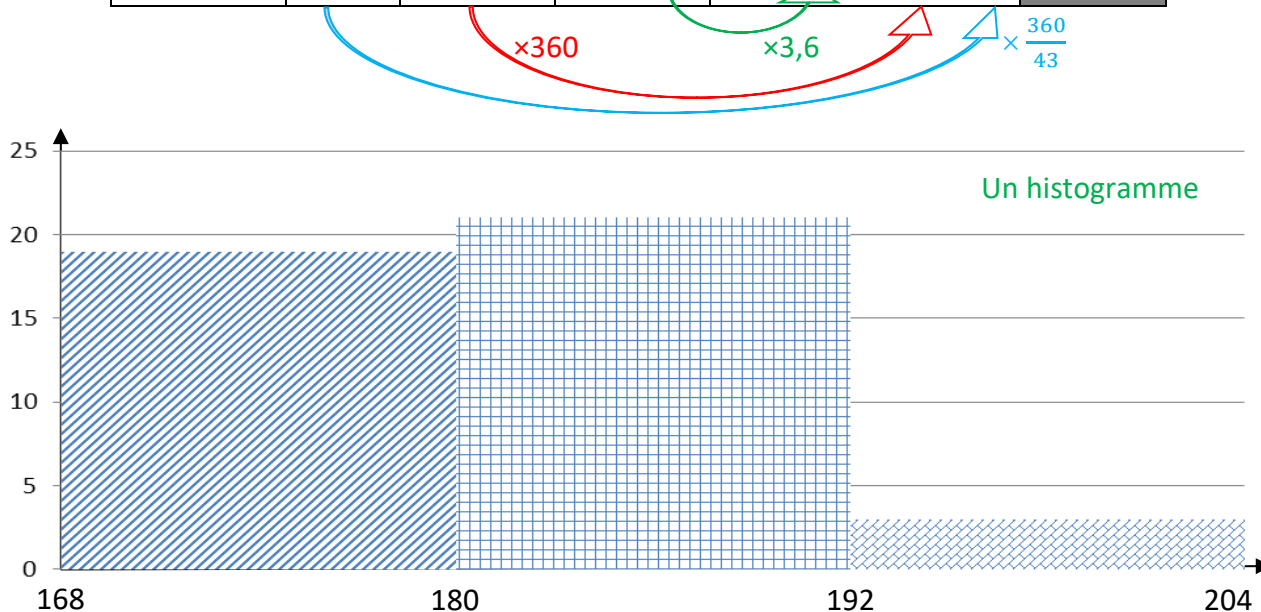
Partage en classes de valeurs

On regroupe les valeurs de la série en classes de valeurs.

Par exemple, on peut regrouper les personnes qui ont le même nombre d'années.

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %	Angle sur le diagramme circulaire en degré	Centre de la classe
[168 ; 180[19	19/43	44 %	159°	174
[180 ; 192[21	21/43	49 %	176°	186
[192 ; 204[3	3/43	7 %	25°	198
Total	43	1	100 %	360°	



Définition

On appelle *centre de la classe*, le milieu de l'intervalle définissant la classe.

Exemple des âges.

Le milieu de l'intervalle [168 ; 180[est 174. Pour le calculer on effectue $\frac{168+180}{2}$.

Calcul d'une valeur approchée de la moyenne.

On suppose que les valeurs sont regroupées aux centres des classes.

Soit M une valeur approchée de la moyenne de cette série.

$$M = (19 \times 174 + 21 \times 186 + 3 \times 198) \div 43 = 7806 \div 43 \approx 181,5 \text{ mois.}$$

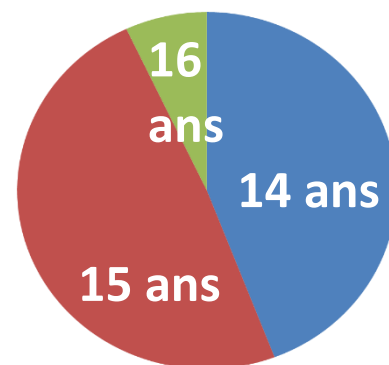
Une valeur approchée de l'âge moyen est $7806 \div 43 \approx 181,5$ mois.

Remarques

Le résultat est très bon.

La précision de la mesure est le mois et on trouve 1,3 mois d'écart avec la valeur exacte.

Cette méthode (malgré sa forte approximation) donne souvent de très bons résultats.



Un diagramme circulaire

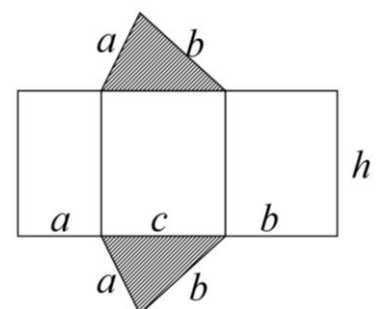
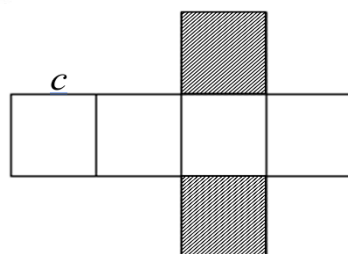
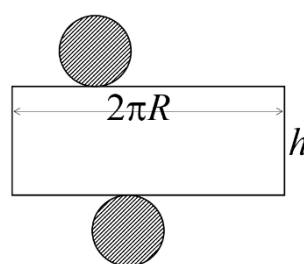
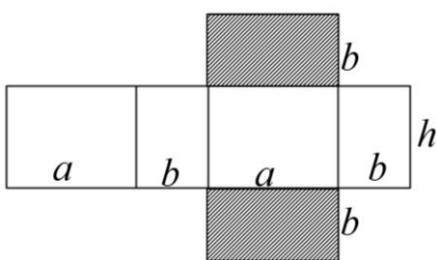
SOLIDES, agrandissement/réduction

I – Rappel sur les aires

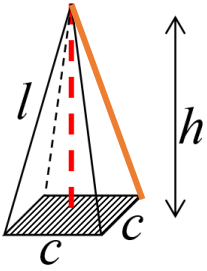
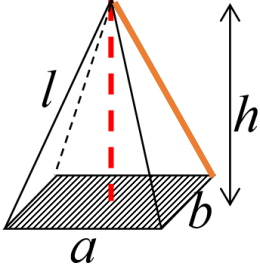
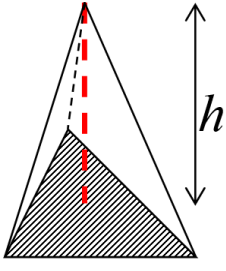
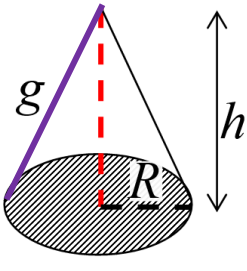
<p>Carré</p> <p>$A = c^2$</p>	<p>Rectangle</p> <p>$A = L \times l$</p>	<p>Losange</p> <p>$A = d \times d' \div 2$</p>	<p>Parallélogramme</p> <p>$A = L \times h$</p>
<p>Triangle rectangle</p> <p>$A = \frac{b \times h}{2}$</p>	<p>Triangle quelconque</p> <p>$A = \frac{b \times h}{2}$</p>	<p>Trapèze</p> <p>$A = \frac{(b + B) \times h}{2}$</p>	<p>Disque</p> <p>$A = p \times r^2$</p>

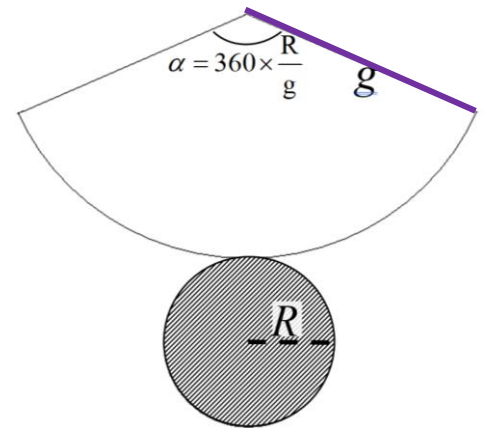
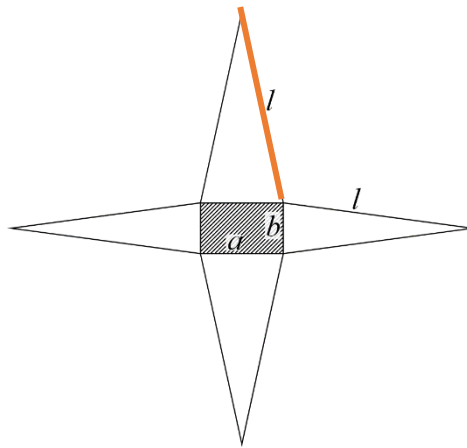
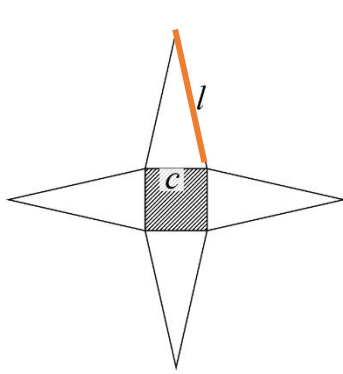
II – La famille des prismes

<p>Parallélépipède rectangle Pavé droit</p>	<p>Cube</p>	<p>Cylindre</p>	<p>Prisme droit</p>
<p>© Volume = Aire de la base x hauteur</p>			
$V = a \times b \times h$	$V = c \times c \times c = c^3$	$V = p \times R^2 \times h$	$V = \text{aire triangle} \times h$



III – La famille des pyramides

Pyramide régulière	Pyramide	Tétraèdre	Cône
			
© Volume = $\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$			
$V = \frac{c^2 \times h}{3}$	$V = \frac{a \times b \times h}{3}$	$V = \frac{\text{aire triangle} \times h}{3}$	$V = \frac{p \times R^2 \times h}{3}$



IV – Conversions

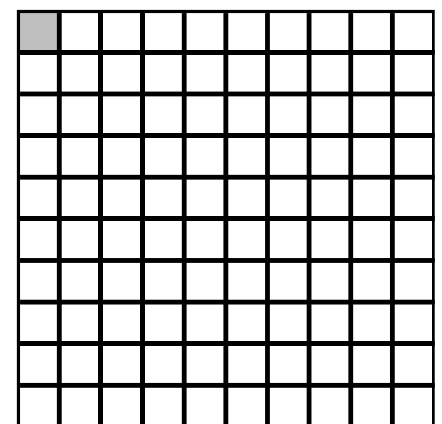
Longueurs

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
					1	0



Aires

km ²		hm ²		dam ²		m ²		dm ²		cm ²		mm ²	
			ha		a		ca						
						1	0	0					
				3	5	0,							
	7	0											

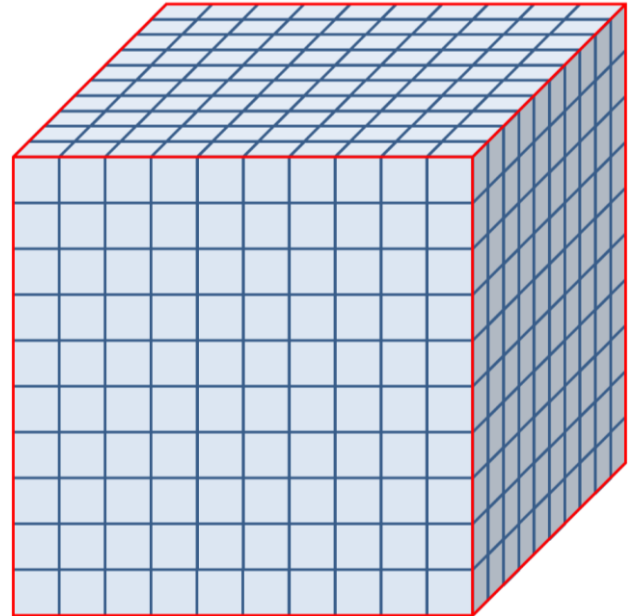


- 1 ha se lit « un hectare »
- 1 a se lit « un are »
- 1 ca se lit « un centiare »

Volumes

		km ³			hm ³			dam ³			m ³			dm ³			cm ³			mm ³
												hL	daL	L	dL	cL	mL			
										1	0	0	0							
												1	5,	3	4					
													2,	4	5	4				

1 dm³ = 1L



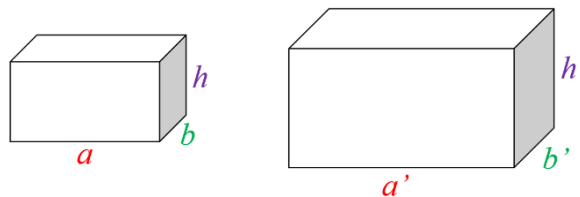
V – Agrandissements / réductions

Propriété admise

Si une figure est un agrandissement (ou une réduction) d'une autre figure de rapport k :

- les distances sont multipliées par k ,
- les aires sont multipliées par k^2 ,
- les volumes sont multipliés par k^3 .

Démonstration dans le cas des pavés droits.



Si le pavé de droite est un agrandissement du pavé gauche de coefficient k , alors on a :

$$a' = k \times a, b' = k \times b, \text{ et } h' = k \times h.$$

Le volume du pavé de gauche est $V = a \times b \times h$

Le volume du pavé de droite est $V' = a' \times b' \times h'$

$$V' = a' \times b' \times h' = k \times a \times k \times b \times k \times h = k^3 \times a \times b \times h = k^3 \times V$$

Comment calculer le coefficient d'agrandissement-réduction ?

1. On repère une distance connue sur les 2 solides.
2. On calcule le coefficient par la formule :

$$k = \frac{\text{distance sur le solide d'arrivée}}{\text{distance correspondante sur le solide de départ}}$$

Pour trouver le coefficient d'agrandissement-réduction, on repère une longueur connue sur le solide de départ et sur le solide d'arrivée.

Exemple 1

On donne une pyramide régulière de base ABCD et de sommet S.

On donne $AB = 12 \text{ cm}$ et $OS = 21 \text{ cm}$.

1°) Calculer le volume de SABCD.

2°) On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base ABCD.

On obtient une réduction $SA'B'C'D'$.

On donne $A'B' = 9 \text{ cm}$.

Calculer le rapport de réduction.

En déduire le volume de $SA'B'C'D'$.

1°) Soit V le volume de SABCD.

$$V = \frac{AB \times BC \times SO}{3} = \frac{12 \times 12 \times 21}{3} = 1008$$

Le volume de la pyramide SABCD est 1008 cm^3 .

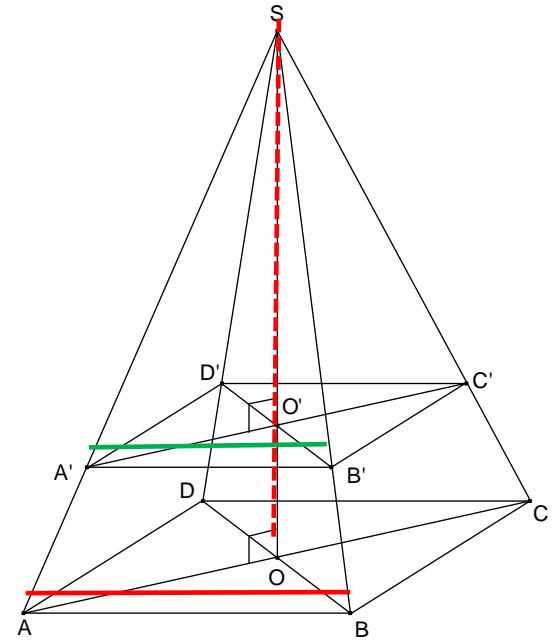
2°) Soit k le coefficient de réduction de SABCD vers $SA'B'C'D'$.

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Soit V' le volume de $SA'B'C'D'$.

$$V' = k^3 \times V = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 1008 = 425,25$$

Le volume de $SA'B'C'D'$ est $425,25 \text{ cm}^3$.



Exemple 2

Sur la figure suivante, on donne les informations suivantes :

- $SO = 6 \text{ cm}$
- $AO = 5 \text{ cm}$
- $SO' = 15 \text{ cm}$.

Calculer le volume du grand cône.

On donnera le volume en litre, arrondi au millilitre près.

Soit V le volume du petit cône.

$$V = \frac{p \times R^2 \times h}{3} = \frac{p \times OA^2 \times OS}{3} = \frac{p \times 5^2 \times 6}{3} = 50p \text{ cm}^3$$

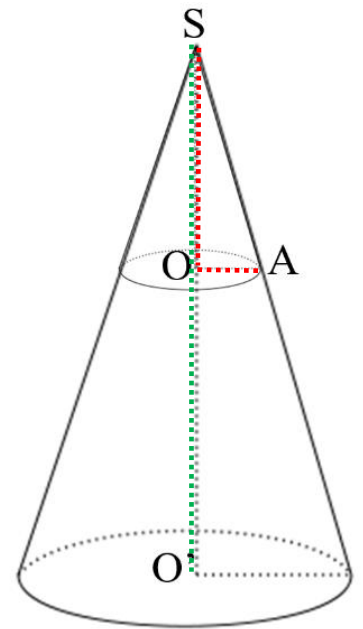
Soit k le coefficient d'agrandissement du petit vers le grand cône.

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{15}{6} = 2,5$$

Soit V' le volume du grand cône.

$$V' = k^3 \times V = 2,5^3 \times 50p = 781,25p$$

Le volume du grand cône est $781,25p \gg 2454 \text{ cm}^3 = 2,454 \text{ L}$.



VI – Repérage

Avec 1 dimension

Pour se repérer, on a besoin de 2 points :

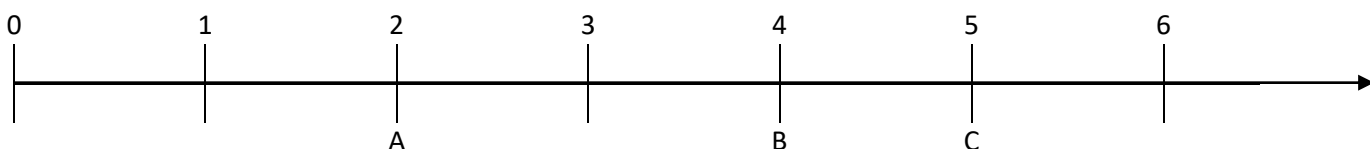
- l'origine (souvent le point O)
- l'unité (souvent le point I, ou le nombre 1).

On appelle *droite graduée*, une droite sur laquelle on a placé une origine et une unité.



Penser à placer une flèche du côté "croissant"

Pour graduer la droite, il faut reporter l'unité.



Au lieu de parler de droite graduée, on pourra aussi parler d'axe gradué.

Lorsque l'on place un point sur une droite graduée, le nombre correspondant à ce point est appelé l'abscisse de ce nombre.

Certaines fois on emploiera le mot abscisse.

L'abscisse de A est 2 ; on notera A(2).

L'abscisse de B est 4.

Le nombre 4 est l'abscisse du point B.

Le point C a pour abscisse 5.

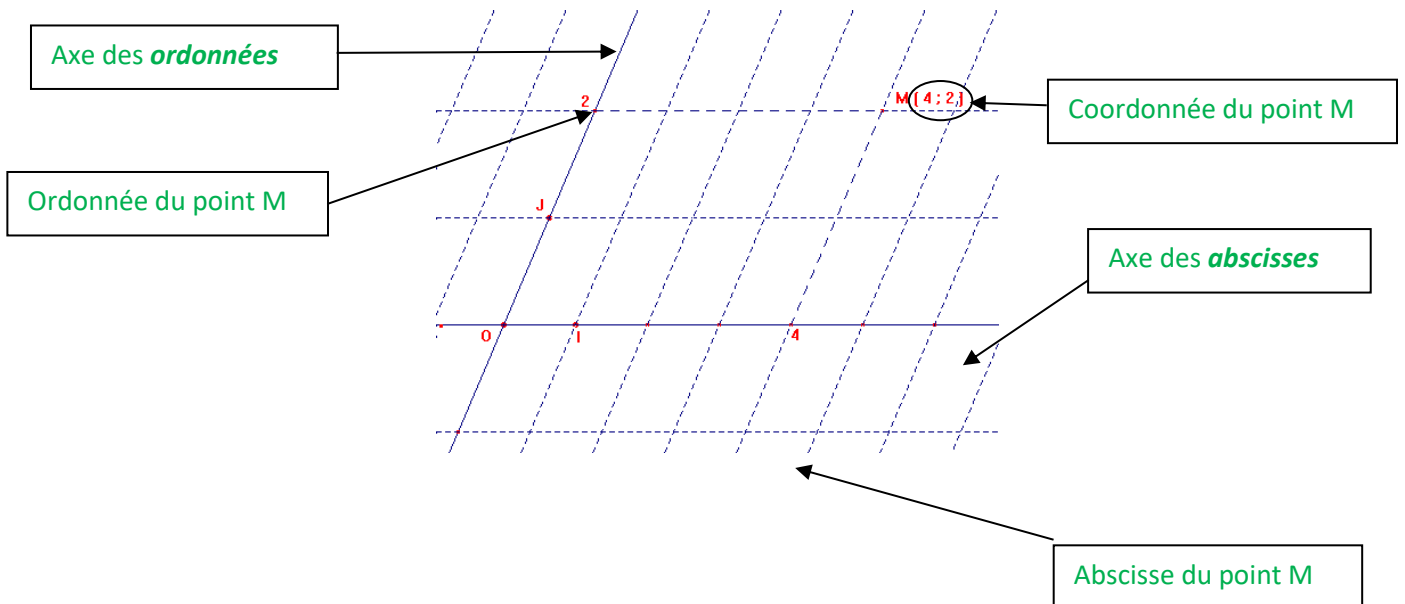
Avec 2 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 3 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.

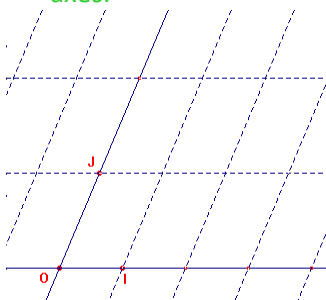
Le repère (O ; I ; J) est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées.



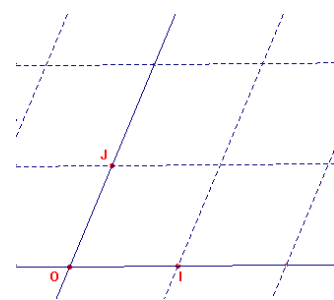
Le repère (O ; I ; J) est dit *quelconque* si

- ses axes ne sont pas perpendiculaires
- les unités ne sont pas les mêmes sur les deux axes.



Le repère (O ; I ; J) est dit *normé* ou *normal* si :

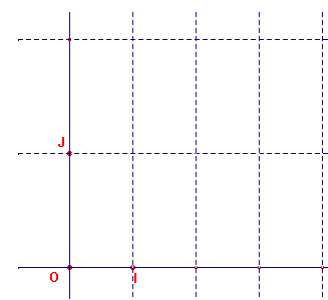
- $OI = OJ$



Même unité sur les deux axes.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthogonal* si :

- $(OI) \wedge (OJ)$

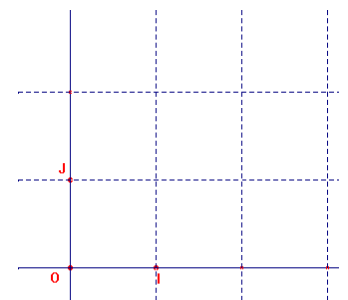


Axes perpendiculaires.

Abscisse du point M

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthonormé* ou *orthonormal* si :

- $OI = OJ$
- $(OI) \wedge (OJ)$



Axes perpendiculaires
Même unité sur les deux axes.

Avec 3 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 4 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.
- un point sur l'axe des hauteurs.

Le repère (O ; I ; J ; K) est un repère pour lequel :

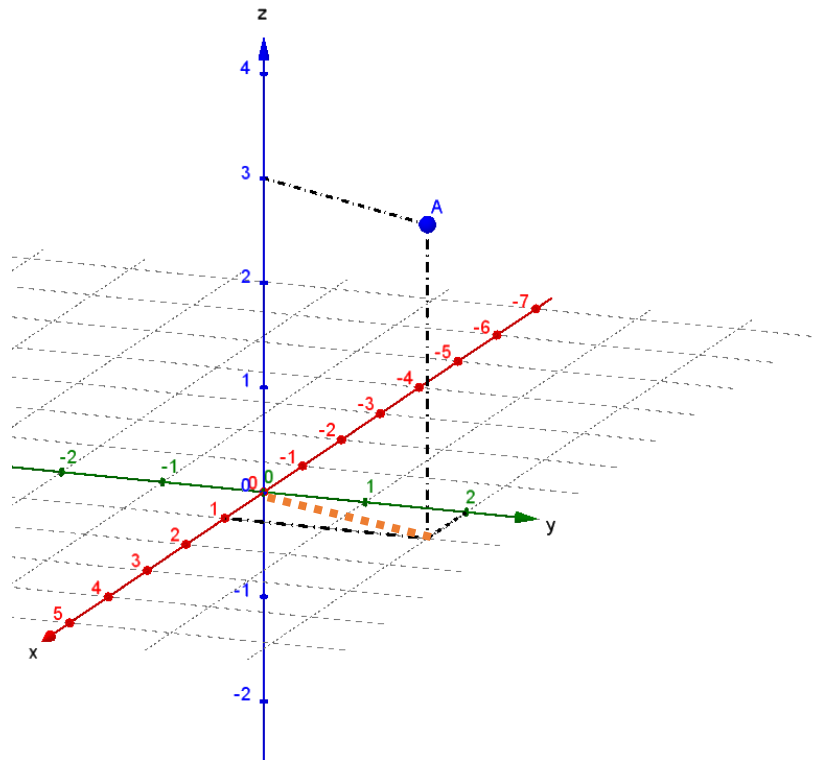
- est l'origine du repère
- **I** donne l'unité sur l'axe des abscisses
- **J** donne l'unité sur l'axe des ordonnées
- **K** donne l'unité sur l'axe des hauteurs.

Pour se repérer dans l'espace, on « projette » le point sur le plan « horizontal ».

On commence par donner les coordonnées de ce point sur le plan en traçant les parallèles aux axes du plan de base ; ici on obtient 1 et 2 ; les coordonnées de ce point sont (1 ; 2).

On relie de point à l'origine du repère puis on trace la parallèle qui passe par A ; cette parallèle coupe l'axe des hauteurs qui indique alors la hauteur du point ; ici c'est 3.

Le point A a pour coordonnées : A(1 ; 2 ; 3).



Exemple de la balle

On a lancé une balle en l'air.

Sur l'axe des abscisses se trouve le temps en secondes et sur l'axe des ordonnées se trouve la hauteur de la balle en mètres.

La hauteur de la balle dépend du temps ; on dit qu'on peut donner la hauteur de la balle en fonction du temps. On appelle x le temps et f la hauteur de la balle en fonction du temps. On dit qu'on peut exprimer f en fonction de x .

Après 0 seconde (au départ), la hauteur de la balle est de 15 m. On dit que 15 est l'image de 0 par f et on note $f(0) = 15$, qui se lit *f de 0 égal 15*.

Après 1 seconde, la hauteur de la balle est à son maximum ; elle est de 20 m.

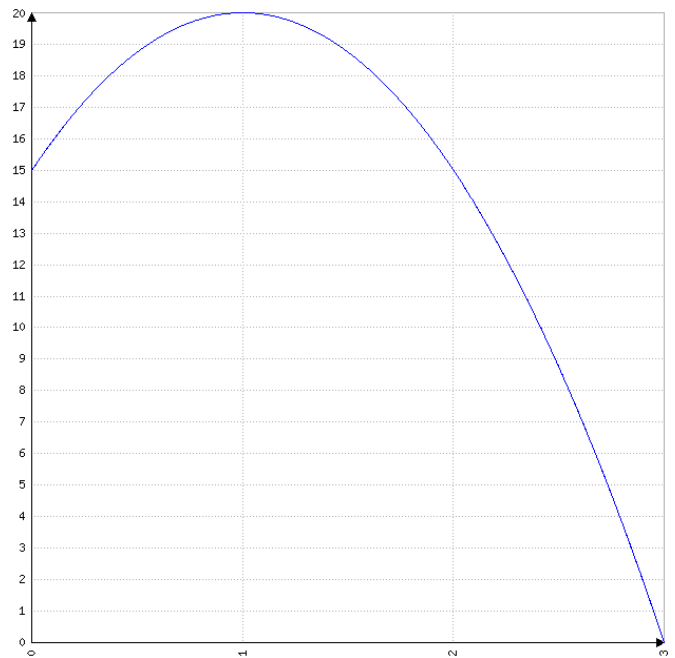
On dit que 20 est l'image de 1 par f et on note $f(1) = 20$.

Après 2 secondes, la hauteur de la balle est de 15 m.

On dit que 15 est l'image de 2 par f et on note $f(2) = 15$.

Après 3 secondes, la hauteur de la balle est de 0 m.

On dit que 0 est l'image de 3 par f et on note $f(3) = 0$.



On a déterminé (par un calcul de physique) que la hauteur en fonction du temps était donnée par la formule : $-5x^2 + 10x + 15$.

On notera :

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

ou

$$f : x \rightarrow -5x^2 + 10x + 15$$

On a vu qu'on pouvait lire l'image d'un nombre sur le graphique. Il est aisé de calculer cette image en utilisant la forme algébrique de la fonction.

Par exemple, on cherche la hauteur de la balle après 1,5 s. On va calculer $f(1,5)$:

$$f(1,5) = -5 \times 1,5^2 + 10 \times 1,5 + 15 = 18,75.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la hauteur de la balle après 1,5 s est de 18,75 m.

On a vu que la hauteur de la balle après 0 ou 2 secondes était la même (15 m). On dira que 0 et 2 secondes sont **des antécédents** de 15 m.

Le nombre 20 a un seul **antécédent** 1 s.

Le nombre 22 n'a pas **d'antécédent** car la balle n'est jamais montée jusqu'à 22 m.

Remarque

Un nombre a toujours une et une seule image par une fonction.

Un nombre peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents par une fonction.

Comment déterminer l'image d'un nombre par une fonction ?

Par exemple, on cherche l'image de 0,5 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

1^{er} cas : méthode graphique

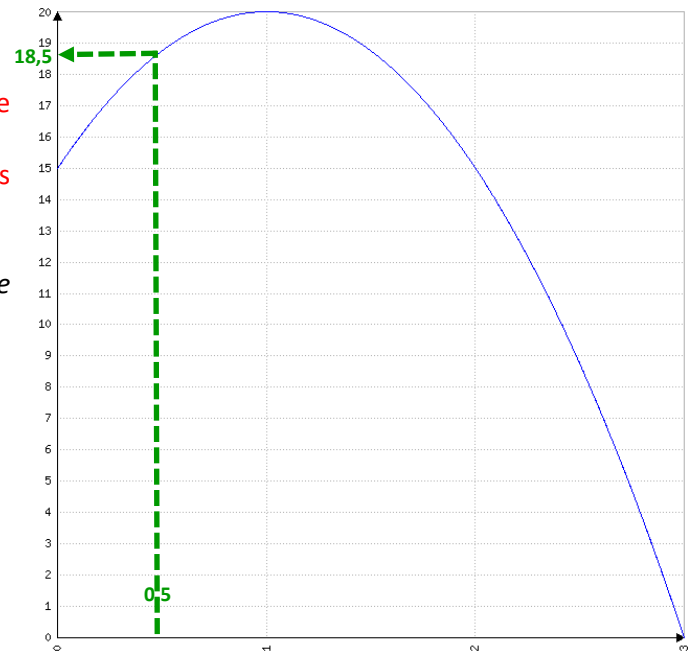
On se positionne à 0,5 sur l'axe des abscisses.

On « monte » (ou « descend ») jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « part horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées et on lit la valeur.

On trouve ici que $f(0,5) \approx 18,5$.

Par lecture graphique, on trouve une valeur dont on ne sait pas si elle est exacte.



2^{ème} cas : par le calcul

Il suffit de remplacer x par 0,5 dans la formule

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15.$$

$$f(0,5) = -5 \times 0,5^2 + 10 \times 0,5 + 15 = 18,75.$$

On trouve une valeur exacte.

Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction ?

Méthode graphique

Par exemple, on cherche les antécédents de 17 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

On se positionne à 17 sur l'axe des ordonnées.

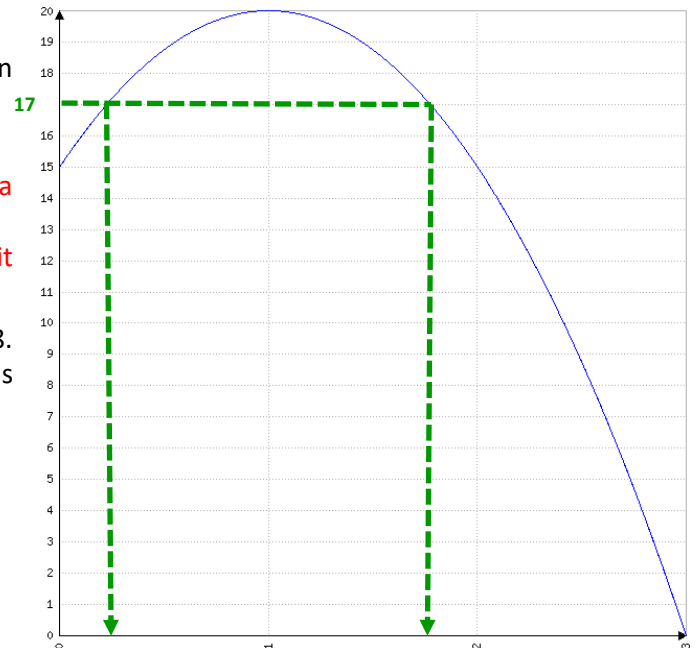
On « part horizontalement » jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « monte » (ou descend) jusqu'à l'axe des abscisses et on lit les valeurs.

On trouve ici que les antécédents de 17 sont environ 0,2 et 1,8.

Par lecture graphique, on trouve des valeurs dont on ne sait pas si elles sont exactes.

Bien penser à chercher tous les antécédents.



Comment construire la représentation graphique d'une fonction ?

1. On construit un « tableau de valeurs ».
2. On construit un repère et on place les points dans le repère.
3. On relie les points.

Attention, les points ne sont pas obligatoirement alignés ; il faut donc les relier en formant une courbe et non pas nécessairement une droite.

Exemple

On veut construire la représentation graphique de la fonction f définie par la formule $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$ pour x appartenant à l'intervalle $[-4 ; 4]$

On prend n'importe quels nombres.

En général, on prend les bornes de l'intervalle (ici, -4 et 4) et on place des valeurs régulièrement. Ici, le pas (l'écart entre deux nombres) est 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	28	12	0	-8	-12	-12	-8	0	12

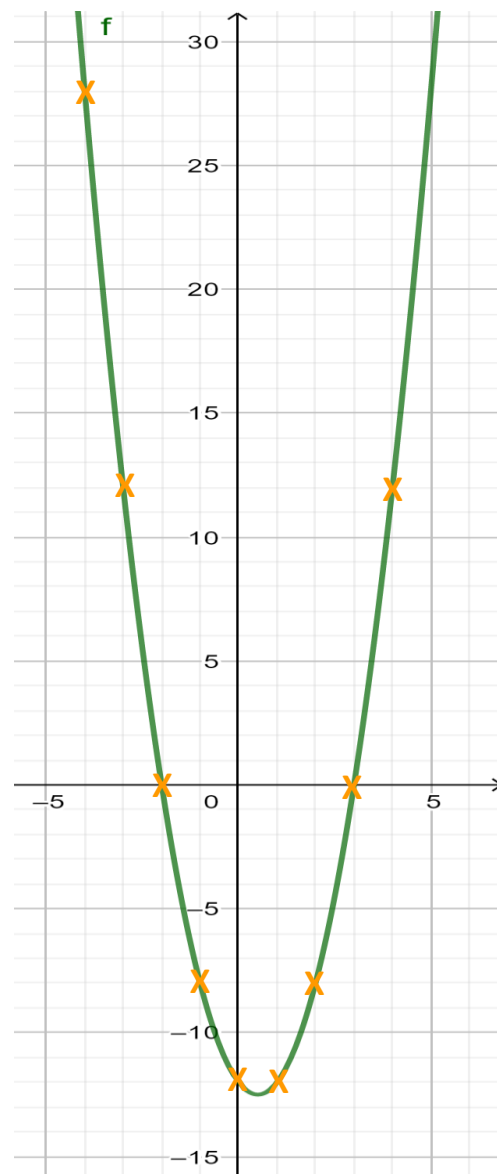
On calcule les images de la première ligne avec la formule

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 12$$

Ce tableau de valeur peut être calculé avec la machine.

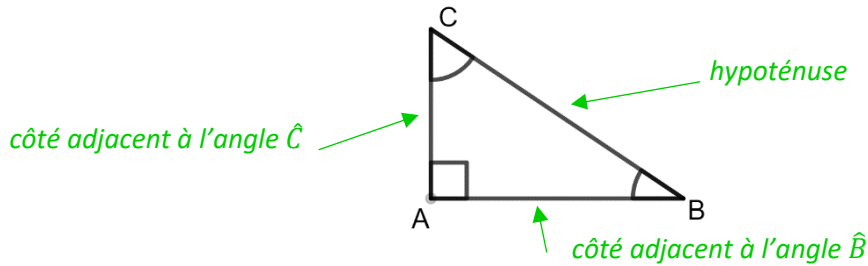
Sur la CASIO, taper

MODE 4 :table	Place la calculatrice en mode tableau de valeur
$f(X) = 2X^2 - 2X - 12$ EXE	On rentre la fonction en utilisant la touche X de la calculatrice.
Début ? -4 EXE	On rentre le point de départ du tableau de valeur.
Fin ? 4 EXE	On rentre le point d'arrivée du tableau de valeur.
Pas ? 1 EXE	On rentre le pas du tableau de valeur (l'écart entre deux nombres).
MODE 1 :comp	On obtient le tableau de valeur Pour revenir au mode « normal »



Triangles rectangles : COSINUS

Définitions



Propriété

Dans un triangle rectangle, le rapport du côté adjacent à un angle par l'hypoténuse ne dépend que de la mesure de l'angle et pas de taille d'un triangle ; on l'appelle le **cosinus** de l'angle.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC)//(A'C').

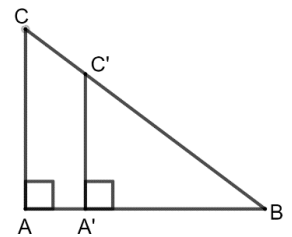
Comme (AC)//(A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$BA' \times BC = BC' \times BA$$

$$\div BC' \quad \div BC \quad \div BC' \quad \div BC$$

donc $\frac{BA'}{BC'} = \frac{BA}{BC} = \text{cosinus de l'angle } \hat{B}$



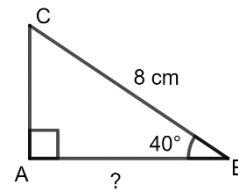
Astuce pour se rappeler de la formule

♥ **COS**inus = **ADJ**acent / **HYP**oténuse

Exemple 1 : calcul d'un petit côté

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 8 \text{ cm}$ et $\widehat{ABC} = 40^\circ$

Calcule AB.



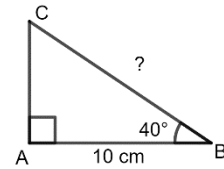
Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connait : <ul style="list-style-type: none"> \hat{B} BC : hypoténuse 	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
On cherche : <ul style="list-style-type: none"> AB : adjacent 	
$\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\cos(40^\circ) = \frac{AB}{8}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\cos(40^\circ)}{1} = \frac{AB}{8}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$AB = \frac{8 \times \cos(40^\circ)}{1} \approx 6,13 \text{ cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

On tape 8Ok40)P1B

Exemple 2 : calcul de l'hypoténuse

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 10 \text{ cm}$ et $\widehat{ABC} = 40^\circ$

Calcule BC.

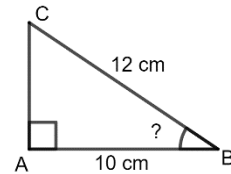


Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connaît : <ul style="list-style-type: none"> \widehat{B} AB : adjacent On cherche : <ul style="list-style-type: none"> BC : hypoténuse 	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\cos(40^\circ) = \frac{10}{BC}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\cos(40^\circ)}{1} = \frac{10}{BC}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$BC = \frac{10 \times 1}{\cos(40^\circ)} \approx 13,05 \text{ cm}$ On tape 801Pk40) B	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

Exemple 3 : calcul d'un angle

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 10 \text{ cm}$ et $BC = 12 \text{ cm}$

Calcule \widehat{ABC} .



Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On cherche : <ul style="list-style-type: none"> \widehat{B} On connaît : <ul style="list-style-type: none"> AB : adjacent BC : hypoténuse 	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\cos(\widehat{B}) = \frac{10}{12}$	On remplace les valeurs connues
$\widehat{B} = \arccos\left(\frac{10}{12}\right) \approx 34^\circ$ On tape qk10P12)B	On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

PROBABILITES

Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.

Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

Nombre de piles	Nombre de faces	Total
4 374	4 626	9 000

Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est $\frac{4\,374}{9\,000} \gg \mathbf{0,486}$ et la fréquence de « Face » est $\frac{4\,626}{9\,000} \gg \mathbf{0,514}$.

Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3						
$0,486 = \frac{48,6}{100}$	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>Pile</td> <td>4 374</td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>9 000</td> <td>100</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"> $?$ = $\frac{4\,374 \times 100}{9\,000}$ $?$ = $\frac{4\,374 \times 100}{9\,000} \gg \mathbf{48,6}$ </p>	Pile	4 374	?	Total	9 000	100	<p>Fréquence de A en % = $\frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$</p> <p>Fréquence de "pile" en % = $\frac{4\,374}{9\,000} \times 100 \gg \mathbf{48,6}$</p>
Pile	4 374	?						
Total	9 000	100						

La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%.

Définitions

Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{2}$ et que la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{2}$.

On notera $p(\text{Pile}) = \frac{1}{2}$ et $p(\text{Face}) = \frac{1}{2}$.

p comme probabilité

Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

Nombre de tirages	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	1000000
Nombre de "Pile"	2	23	46	240	494	2470	4908	24853	49914	500 557
Fréquence de "Pile" en %	20	46	46	48	49,4	49,4	49,08	49,706	49,914	50,0557
Ecart avec la probabilité	30	4	4	2	0,6	0,6	0,92	0,294	0,086	0,0557