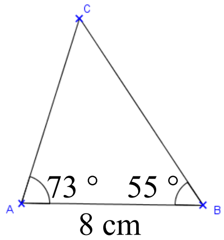
Trigonométrie et Pythagore dans des triangles non rectangles

Partie 1 : Triangulation

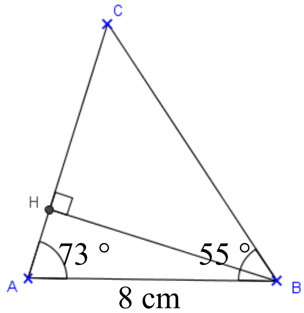


La trigonométrie que l'on a étudiée ne s'étudie que dans les triangles rectangles.

Dans cette partie, on va partir d'un triangle qui n'est pas rectangle pour lequel on connaitra un côté et deux angles et on cherchera un côté.

1 – Recherche de la longueur AC.

On trace la hauteur issue de B ; le pied de la hauteur est appelé H.



a. Dans le triangle ABH, calcule AH et BH.

b. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BCH}$.

c. Calcule, dans le triangle BCH, la longueur de CH.

d. Déduis-en AC.

2 – Recherche de la longueur BC.

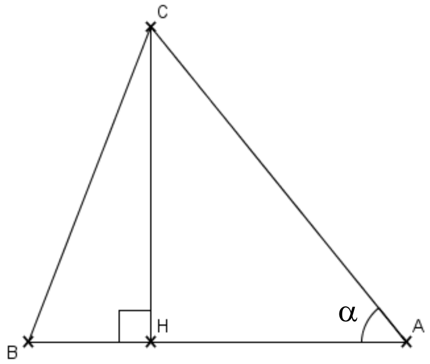
De la même manière, calcule BC.

http://www.geoportail.gouv.fr

C'est avec cette méthode qu'ont été bâties les cartes de Cassini au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle.

Partie 2 : Théorème de Pythagore « étendu » ou théorème d'Al-Kashi

1 – Démonstration.



a. Dans le triangle ACH, écris le cosinus de l’angle $\widehat{CAH}$.
Déduis-en que $AH = AC \times \cos(\alpha)$.

b. Calcule BH.

c. Dans le triangle ACH, écris le sinus de l’angle $\widehat{CAH}$.
Déduis-en que $CH = AC \times \sin(\alpha)$.

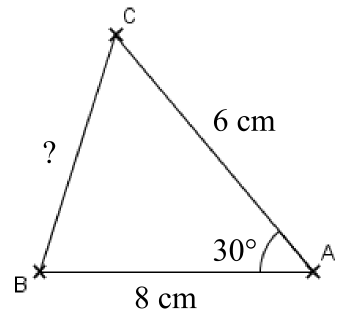
d. Ecris le théorème de Pythagore dans le triangle BCH.
Déduis-en que $BC^2 = AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha) + AC^2 \times \cos^2(\alpha) + AC^2 \times \sin^2(\alpha)$

e. En utilisant la propriété $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, déduis-en le théorème d'Al-Kashi :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha)}$$

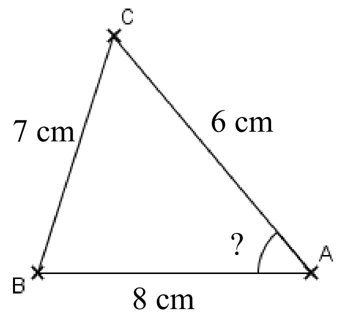
2 – Applications.

a. Calcul d’un côté.



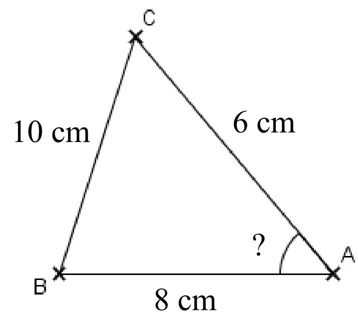
En prenant les informations sur la figure ci-contre, calcule BC.

b. Calcul d’un angle.



En prenant les informations sur la figure ci-contre, calcule $\widehat{BAC}$.

c. Prouver qu’un triangle est rectangle.



En prenant les informations sur la figure ci-contre, calcule $\widehat{BAC}$.

Quelle est la nature de ABC ?

CORRIGE

Triangulation.

a. Dans ABH rectangle en H, on a :

$$cos(\hat{A}) = \frac{AH}{AB}$$

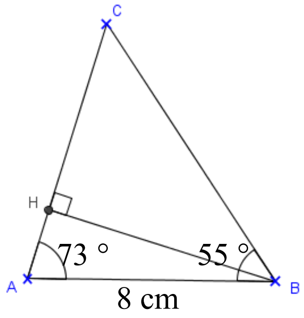
$$cos(73°) = \frac{AH}{8}$$

AH = $\boxed{8 \cos(73°) \approx 2{,}33 \text{ cm}}$

$$sin(\hat{A}) = \frac{BH}{AB}$$

$$sin(73°) = \frac{BH}{8}$$

BH = $\boxed{8 \sin(73°) \approx 7{,}65 \text{ cm}}$



b. Dans le triangle ABC, on a $\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (73 + 55) = \boxed{52°}$

c. Dans le triangle BCH, on a :

$$tan(\hat{C}) = \frac{BH}{CH}$$

$$tan(52°) = \frac{8 \times \sin(73°)}{CH}$$

$$CH = \boxed{\frac{8 \times \sin(73°)}{tan(52°)} \approx 5{,}98\text{cm}}$$

$$sin(\hat{C}) = \frac{BH}{BC}$$

$$sin(52°) = \frac{8 \sin(73°)}{BC}$$

$$BC = \boxed{\frac{8 \times \sin(73°)}{sin(52°)} \approx 9{,}71\text{cm}}$$

Al-Kashi.

1.

Dans ACH rectangle en H :

$$cos(\hat{A}) = \frac{AH}{AC}$$

$$cos(\alpha) = \frac{AH}{AC}$$

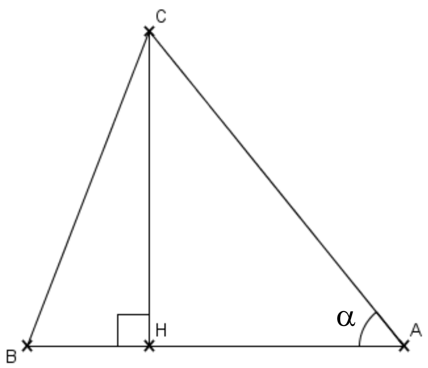
$\boxed{AH = AC \cos(\alpha)}$

BH = AB – AH = $\boxed{AB - AC \cos(\alpha)}$

$$sin(\hat{A}) = \frac{CH}{AC}$$

$$sin(\alpha) = \frac{CH}{AC}$$

$\boxed{CH = AC \sin(\alpha)}$



Dans BCH rectangle en H, d'après la théorème de Pythagore :

$BC^2 = BH^2 + CH^2$

$BC^2 = (AB - AC \cos(\alpha))^2 + (AC \sin(\alpha))^2$

$BC^2 = AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha) + AC^2 \times \cos^2(\alpha) + AC^2 \times \sin^2(\alpha)$

$BC^2 = AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha) + AC^2 \times (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))$

$\boxed{BC^2 = AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha) + AC^2}$

2 – Applications.

a. Calcul d'un côté.

Dans ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha)$

$BC^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos(30) \approx 16{,}86$

$$BC = \boxed{\sqrt{16{,}86} \approx 4{,}11\text{cm}}$$

b. Calcul d'un angle.

Dans ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha)$

$7^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos(\alpha)$

$49 = 100 - 96 \times \cos(\alpha)$

$-51 = -96 \times \cos(\alpha)$

$$\cos(\alpha) = \frac{-51}{-63}$$

$$\alpha = \boxed{arccos\left(\frac{-51}{-96}\right) \approx 58°}$$

c. Calcul d'un angle.

Dans ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha)$

$10^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos(\alpha)$

$100 = 100 - 96 \times \cos(\alpha)$

$0 = -96 \times \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha) = 0$

$\alpha = \boxed{\arccos(0) = 90°}$

Donc $\boxed{\text{ABC est rectangle en A}}$.