

ANGLES, TRIANGLES SEMBLABLES, DROITES DU TRIANGLE et PARALLELOGRAMMES

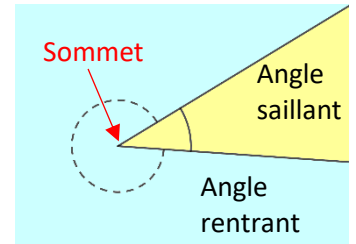
I - Angles

Définition

Un angle est une portion de droite délimité par deux demi-droites de même origine.

Le point d'intersection des demi-droites est appelé le *sommet* de l'angle.

On définit, alors, même deux angles : un *angle rentrant* et un *angle saillant*.

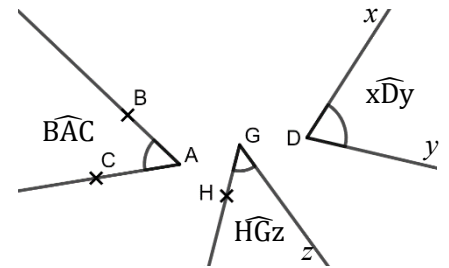


Notation

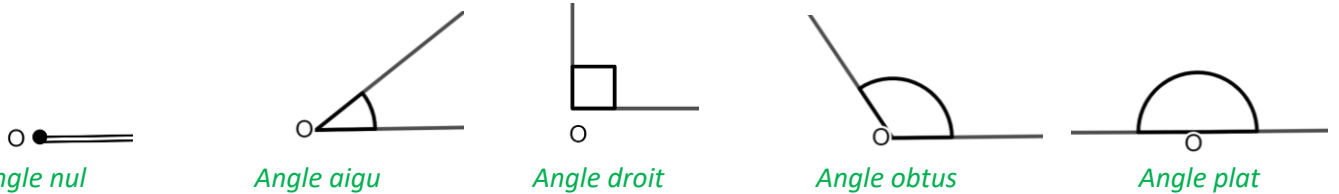
Pour nommer un angle, on prend une lettre sur chacune des demi-droites que l'on écrit de chaque côté de la lettre représentant le sommet de l'angle. On ajoute un chapeau pour signifier que c'est un angle *et non un triangle*.

On peut aussi prendre la lettre en minuscule qui représente la demi-droite.

Dans le cas où il n'y a pas plusieurs angles, on peut juste noter le sommet : \hat{A} , \hat{G} ou \hat{D} .

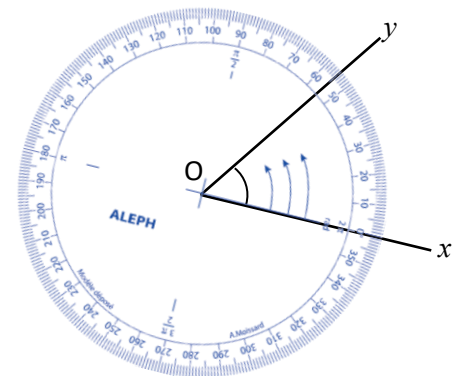


Définitions



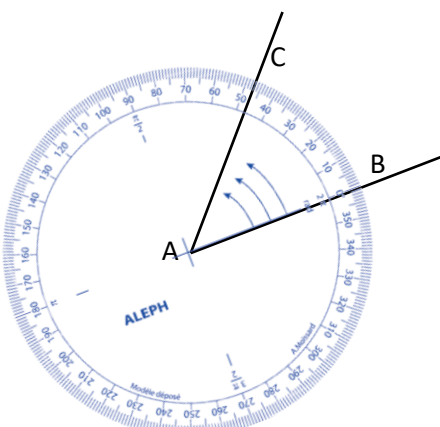
Comment mesurer un angle ?

1. On positionne le centre du rapporteur (*la croix*) sur le sommet de l'angle (*ici le point O*).
2. On tourne le rapporteur de telle sorte que le 0 de la graduation du rapporteur passe sur une des demi-droites formant l'angle, *en veillant à ce que l'angle soit bien du côté des 3 flèches du rapporteur*.
3. On lit sur quelle graduation du rapporteur passe la seconde demi-droites (*ici 55*).
4. On obtient $\widehat{xOy} = 55^\circ$

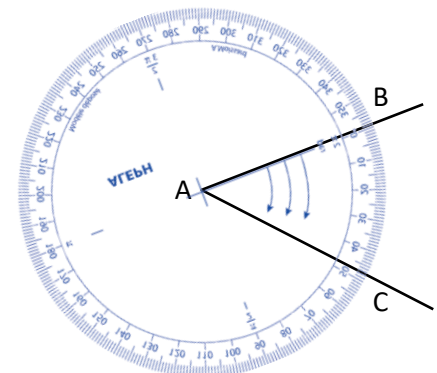


Comment construire un angle de mesure donnée ?

Par exemple, construire l'angle $\widehat{BAC} = 48^\circ$



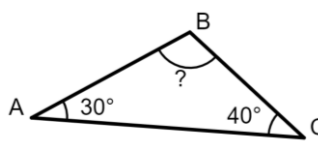
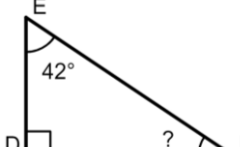
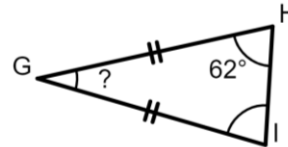
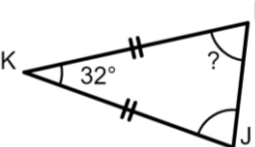
1. Le sommet de l'angle est A ; construire la demi-droite [AB]
2. Placer le centre du rapporteur sur A et le 0 de la graduation sur la demi-droite [AB]. *On peut placer le rapporteur à l'endroit ou à l'envers selon le « côté » où on veut construire l'angle.*
3. Placer le petit C sur la graduation 48 puis tracer la demi-droite [AC]



Propriété admise

Dans un triangle, la somme des mesures des angles vaut 180° .

Exemples d'exercices résolus

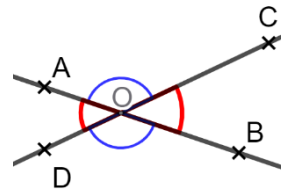
			
<p>Dans ABC, on a :</p> $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C})$ $\hat{B} = 180 - (30 + 40)$ $\hat{B} = 110^\circ$	<p>Dans DEF, on a :</p> $\hat{F} = 180 - (\hat{D} + \hat{E})$ $\hat{F} = 180 - (90 + 42)$ $\hat{F} = 48^\circ$	<p>Comme GHI est isocèle en G, alors $\hat{H} = \hat{I} = 62^\circ$</p> <p>Dans GHI, on a :</p> $\hat{G} = 180 - (\hat{H} + \hat{I})$ $\hat{G} = 180 - (62 + 62)$ $\hat{G} = 56^\circ$	<p>Comme JKL est isocèle en K, alors $\hat{J} = \hat{L}$</p> <p>Dans JKL, on a :</p> $\hat{J} + \hat{K} + \hat{L} = 180$ $\hat{J} + 32 + \hat{J} = 180$ $2\hat{J} = 148$ $\hat{J} = 74^\circ$

Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites sécantes en O.
Les angles \widehat{AOD} et \widehat{BOC} sont dits *opposés par le sommet*.

Propriété admise

Des angles opposés par le sommet sont égaux.



Exemple

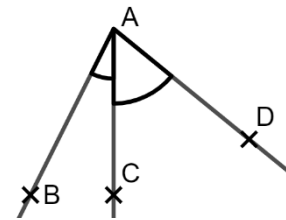
$$\widehat{AOD} = \widehat{BOC} \text{ et } \widehat{AOC} = \widehat{BOD}$$

Définition

Deux angles ayant une demi-droite en commun sont dit *adjacents*.

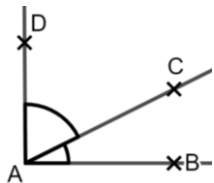
Exemple

\widehat{BAC} et \widehat{CAD} sont adjacents et $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$



Définitions

Deux angles adjacents dont la somme des mesures vaut 90° sont dits *complémentaires*



Deux angles adjacents dont la somme des mesures vaut 180° sont dits *supplémentaires*



Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites ; ces deux droites forment une "bande".
Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).
Les angles \widehat{EGB} et \widehat{EHD} sont dits *correspondants*

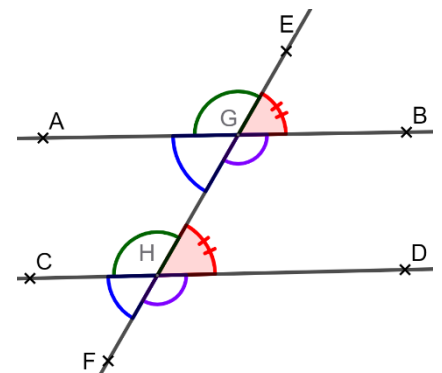
Propriétés admises

Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$

Si $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$ alors $(AB) \parallel (CD)$

Exemple ci-contre

Si $(AB) \parallel (CD)$ on a : $\widehat{EGB} = \widehat{EHD}$ et $\widehat{EGA} = \widehat{EHA}$ et $\widehat{FHC} = \widehat{FGA}$ et $\widehat{FGB} = \widehat{FHD}$



Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites ; ces deux droites forment une "bande".
Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).
Les angles \widehat{EGB} et \widehat{CHF} sont dits *alternes externes*

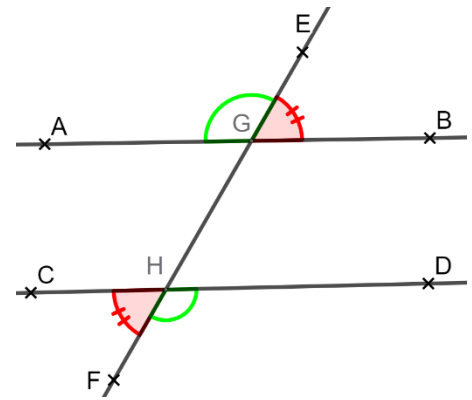
Propriétés admises

Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$

Si $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$ alors $(AB) \parallel (CD)$

Exemple ci-contre

Si $(AB) \parallel (CD)$ on a : $\widehat{EGB} = \widehat{CHF}$ et $\widehat{EGA} = \widehat{FHD}$



Définition

Soient (AB) et (CD) deux droites ; ces deux droites forment une "bande".
Soit (EF) une droite sécante à (AB) et (CD).
Les angles \widehat{AGF} et \widehat{EHD} sont dits *alternes internes*

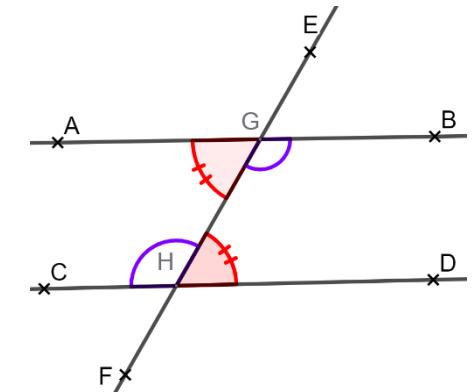
Propriétés admises

Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $\widehat{AGF} = \widehat{EHD}$

Si $\widehat{AGF} = \widehat{EHD}$ alors $(AB) \parallel (CD)$

Exemple ci-contre

Si $(AB) \parallel (CD)$ on a : $\widehat{AGF} = \widehat{EHD}$ et $\widehat{FGB} = \widehat{EHC}$



II – Triangles semblables

Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels
- ou
- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles

Dans le triangle ABC, on a

$$\widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180 - (102 + 49) = 29^\circ.$$

Dans le triangle A'B'C', on a

$$\widehat{B}' = 180 - (\widehat{A}' + \widehat{C}') = 180 - (49 + 29) = 102^\circ.$$

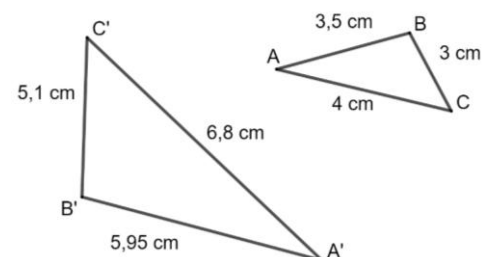
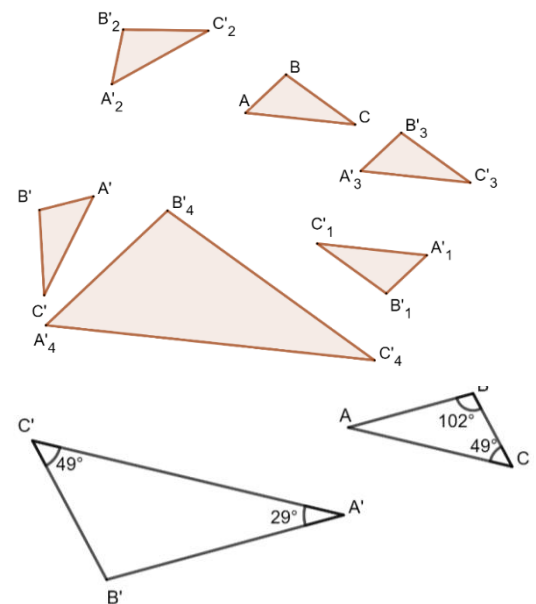
On a donc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Exemple 2 : avec des côtés proportionnels

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{5,95}{3,5} = 1,7 \quad \left| \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{6,8}{4} = 1,7 \quad \left| \quad \frac{C'B'}{CB} = \frac{5,1}{3} = 1,7 \right.$$

$$\text{Donc } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}$$

donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.



III – Droites du triangle

A. Hauteurs

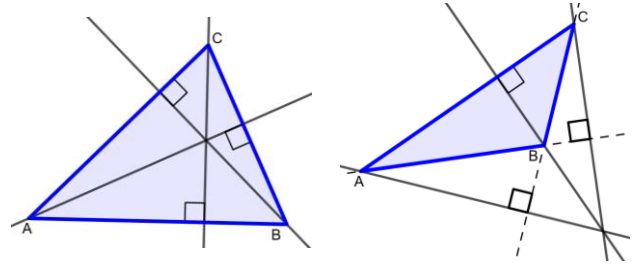
Définition

La *hauteur* d'un triangle est la droite issue d'un sommet qui est perpendiculaire au support du côté opposé.

Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à (BC).

Propriété admise

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé *orthocentre du triangle*.



B. Médianes

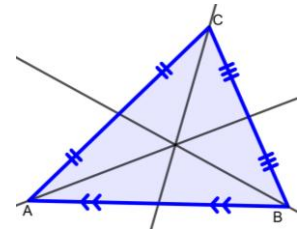
Définition

La *médiane* d'un triangle est la droite issue d'un sommet qui passe par le milieu du côté opposé.

Dans le triangle ABC, la médiane issue de A est la droite qui passe par A et par le milieu de [BC].

Propriété admise

Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre de gravité du triangle*.

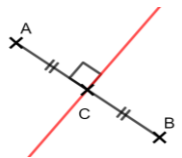


C. Médiatrices

Définition

La *médiatrice* d'un segment est la droite qui passe par le milieu d'un segment ET qui est perpendiculaire au support de ce segment.

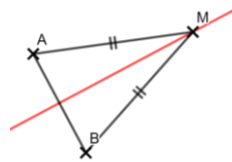
La médiatrice du segment [AB] est la droite qui passe par le milieu de [AB] et qui est perpendiculaire à (AB).



Propriétés admises

Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant (même distance) des extrémités de ce segment.

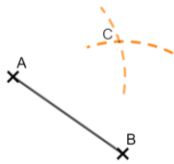
Si M est sur la médiatrice de [AB] alors $MA = MB$.



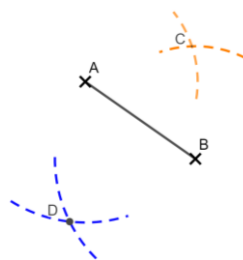
Si un point est équidistant (même distance) des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Si $MA = MB$ alors M est sur la médiatrice de [AB].

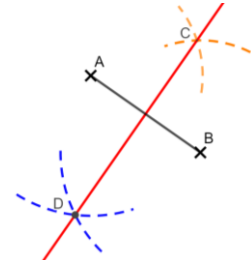
Construction de la médiatrice du segment [AB]



Tracer deux arcs de cercle de même rayon et de centres A et B. Ils se coupent en C.



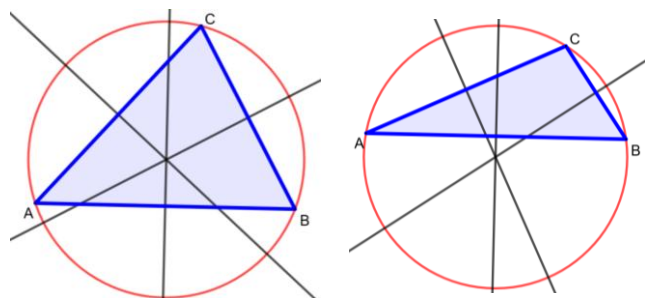
Tracer deux autres arcs de cercle de même rayon et de centres A et B. Ils se coupent en D.



La médiatrice de [AB] est la droite (CD).

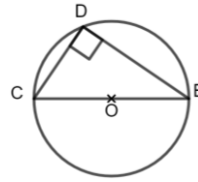
Propriété admise

Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle circonscrit au triangle*.



Propriétés admises

Si un triangle a ses 3 sommets sur un cercle et a un côté qui est un diamètre du cercle alors ce triangle est rectangle.



Si un triangle est rectangle alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

D. Bissectrices

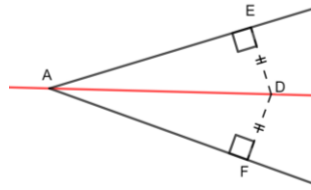
Définition

La bissectrice d'un angle est une droite qui partage l'angle en 2 angles de même mesure.

Propriétés admises

Si un point est sur la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des demi-droites formant cet angle.

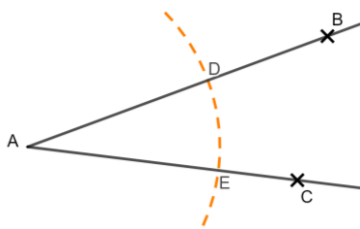
Si D est sur la bissectrice de \widehat{EAD} alors $DE = DF$.



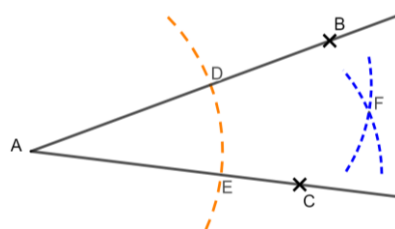
Si un point est équidistant des demi-droites formant un angle il est sur la bissectrice de cet angle.

Si $DE = DF$ alors D est sur la bissectrice de \widehat{EAD} .

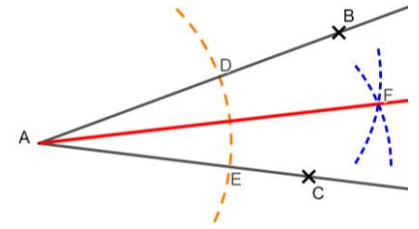
Construction de la bissectrice de l'angle \widehat{BAC}



Trace un cercle de centre A ; il coupe [AB) et [AC) en D et E.



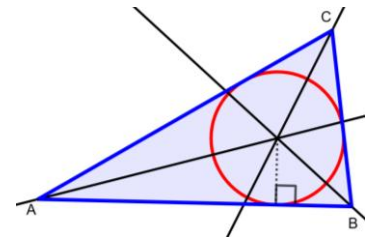
Trace 2 cercles de même rayon et de centres D et E ; ils se coupent en F.



La bissectrice de \widehat{BAC} est la droite (AF)

Propriété admise

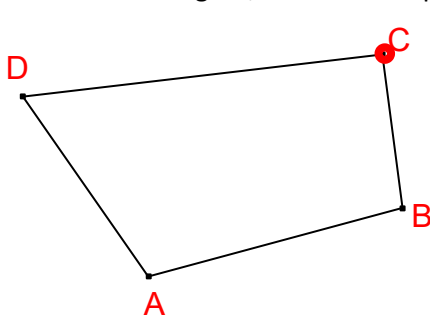
Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle inscrit*.



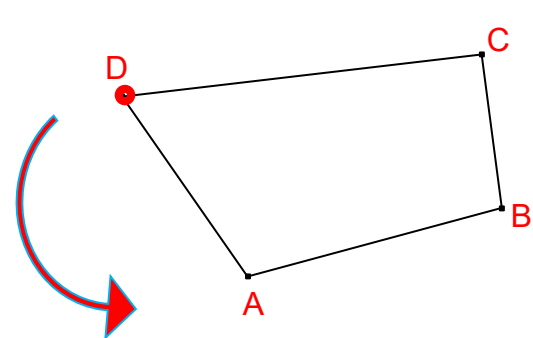
IV – Quadrilatères

Rappel

Pour nommer une figure, on choisit un point de départ et un sens de rotation.



Le quadrilatère est CBAD.



Le quadrilatère est DABC.

Propriété admise

Dans un quadrilatère, la somme des mesures des angles vaut 360° .

Définitions et propriétés

