EQUATIONS du premier degré à une inconnue – DEVELOPPER - INEQUATIONS

I – Développer

Rappels sur la réduction des produits

On peut toujours réduire les produits.

$2x \times 3x = 6x^2$ $\qquad$ $-5 \times 3x = -15x$ $\qquad$ $3x^2 \times 7x = 21x^3$

Rappels sur la réduction de sommes

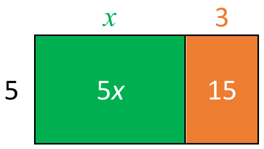
$3x + 2x = 5x$ $\qquad$ $15x - 8x = 7x$ $\qquad$ $4x - 12x = -8x$ $\qquad$ $15x^2 - 8x^2 = 7x^2$ $\qquad$ $33x - 5x^2 + 7x + 11x^2 = 40x + 6x^2$

$5x^2 + 3x$ ne peut pas se réduire

Remarque

Dans tous les exercices, il faudra réduire les expressions (*même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé*).

Remarque calcul de $5 \times (x + 3)$

Géométrique	" Répétitif "	Avec la simple distributivité
 $5 \times (x + 3) = 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $= 5 \times x + 5 \times 3$ $= 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5x + 15$

Rappel simple distributivité - admise

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

Exemples

$5 \times (2x + 7) = 10x + 35$ $\qquad$ $8 \times (x - 3) = 8x - 24$ $\qquad$ $-6 \times (x + 7) = -6x - 42$ $\qquad$ $-4 \times (x - 7) = -4x + 28$

Remarque gestion du signe « - »

$-(2x + 7) = -2x - 7$ $\qquad$ $-(x - 3) = -x + 3$ $\qquad$ $-(-3x + 7) = +3x - 7$ $\qquad$ $-(-6x - 7) = +6x + 7$

Exemples complexes

$3(x + 5) + 7(x + 4) = 3x + 15 + 7x + 28 = 10x + 43$

$5(x + 7) + 8(x - 3) = 5x + 35 + 8x - 24 = 13x + 11$

$6(x - 4) - 9(x + 2) = 6x - 24 - 9x - 18 = -3x - 42$

$6(x - 7) + 9x(3x - 2) = 6x - 42 + 27x^2 - 18x = 27x^2 - 12x - 42$

II – Equations

Rappel

$$\overbrace{\underbrace{5x + 5}_{\text{Membre de gauche}} = \underbrace{3x - 17}_{\text{Membre de droite}}}^{\text{Une équation}}$$

Remarque

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

Définition

On dit qu'un nombre est une solution d'une équation l'égalité entre les deux membres est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples

Pour l'équation $5x + 5 = 3x - 17$, tester si 2 et -11 sont des solutions.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = 2$ alors • le membre de gauche devient $5 \times 2 + 5 = 15$ • et le membre de droite devient $3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15$ et $3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $5x + 5$ | $3x - 17$ $= 5 \times 2 + 5$ | $= 3 \times 2 - 17$ $= 15$ | $= -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = -11$ alors • le membre de gauche devient $5 \times (-11) + 5 = -50$ • et le membre de droite devient $3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50$ et $3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $5x + 5$ | $3x - 17$ $= 5 \times (-11) + 5$ | $= 3 \times (-11) - 17$ $= -50$ | $= -50$ Donc **-11 est une solution**.

Définition

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

Exemples

Equation n'ayant pas de solution	Equation ayant une seule solution	Equation ayant une infinité de solution
$2x + 3 = 2x + 5$	$5x + 5 = 3x - 17$	$2(x + 5) - 2 = 2x + 8$
On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution.	La solution de cette équation est –11.	On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie. Quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace x, l'égalité sera vraie.

Remarque

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

Propriété - admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

1. On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
2. On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

Exemple de résolution d'une équation

Résoudre l'équation $2(x + 5) = 6x + 7$.

$2(x + 5) = 6x + 7$	On réécrit l'équation
$2x + 10 = 6x + 7$	On simplifie l'écriture de chacun des membres en développant et réduisant
$-6x \quad -10 \qquad -6x \quad -10$ $-4x = -3$	On isole les inconnues dans un membre et les nombres dans l'autre en utilisant le point 1 de la propriété ci-dessus.
$\div(-4) \qquad \div(-4)$ $x = 0{,}75$	Pour trouver x, on divise par le nombre devant x en utilisant le point 2 de la propriété ci-dessus.
Si $x = 0{,}75$ alors $2(x + 5)$ | $6x + 7$ $= 2 \times (0{,}75 + 5)$ | $= 6 \times 0{,}75 + 7$ $= 11{,}5$ | $= 11{,}5$	On teste si le nombre trouvé est bien une solution de l'équation en remplaçant dans l'équation du départ.
La solution de l'équation est $\boxed{0{,}75}$. On peut aussi noter : $\boxed{S = \{0{,}75\}}$	On conclue par une phrase.

En contrôle, il faut écrire tout ce qui est en noir ci-dessus.

III – Problèmes

Exemple 1

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des poules et des lapins. J'ai compté 174 têtes et 400 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

Soit L le nombre de lapins.

Expliciter l'inconnue.
C'est souvent la question qui nous indique quelle inconnue choisir.

	Lapins	Poules	Total
Têtes	L	174 - L	174
Pattes	4 × L	2 × (174 – L)	400

4 × L + 2 × (174 – L) = 400

Ecrire l'équation

4L + 258 – 2L = 400
2L + 348 = 400
- 348 - 348
2L = 52
÷ 2 ÷ 2
L = 26

Résoudre l'équation

Il y a **26 lapins** et 174-26 = **148 poules**.

Interpréter le résultat

Vérification :
Têtes : 26 + 148 = 174
Pattes : 4×26 + 2×148 = 400
C'est bon

Vérifier sur les données du problème

Exemple 2

Jules à 8 ans et son père a 42 ans.
Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

Soit x le nombre d'années à attendre.

Expliciter l'inconnue. Ici on choisit toujours le temps à attendre.

	Jules	Père
Aujourd'hui	8	42
Dans x années	$8 + x$	$42 + x$

Père = 3 × Jules
$42 + x = 3 \times (8 + x)$

Ecrire l'équation

$42 + x = 24 + 3x$
$-24 \quad -x \quad -24 \quad -x$
$18 = 2x$
$\div 2 \quad \div 2$
$9 = x$

Résoudre l'équation

Il faut attendre **9 ans**.

Interpréter le résultat

Vérification : dans 9 ans
Jules : 8 + 9 = 17 ans
Père : 42 + 9 = 51 ans
3 × 17 = 51
C'est bon

Vérifier sur les données du problème

Exemple 3

Un kilogramme de poire coûte un euro de plus qu'un kilogramme de pommes.
Marion a acheté trois kilos de pommes et cinq kilos de poires. Elle a payé vingt-cinq euros.
Quel est le prix d'un kilo de pommes ? de poires ?

Soit x le prix d'un kilogramme de pommes.

	Pommes	Poires	Total
Quantité en kg	3	5	
Prix au kg	x	$x + 1$	
Prix à payer	$3 \times x$	$5 \times (x + 1)$	25

$3 \times x + 5 \times (x + 1) = 25$
$3x + 5x + 5 = 25$
$8x + 5 = 25$
$\quad -5 \quad -5$
$8x = 20$
$\div 8 \quad \div 8$
$x = 2,5$

Les pommes coûtent **2,5 €** au kilo
et les poires coûtent 2,5 + 1 = **3,5 €** au kilo.

Vérification :
Pommes : 3 × 2,5 = 7,5
Poires : 5 × 3,5 = 17,5
Total : 7,5 + 17,5 = 25

C'est bon

Exemple 4

Marina et Karima pensent au même nombre.
Marina ajoute 8 et multiplie le résultat par 3.
Karima multiplie le résultat par 5 et ajoute 6.
Curieusement, elles trouvent le même résultat.
A quel nombre ont-elles pensé au départ ?

Soit x le nombre pensé au départ.

	Marina	Karima
Départ	x	x
Après calcul	$3 \times (x + 8)$	$5 \times x + 6$

$3 \times (x + 8) = 5 \times x + 6$

$3x + 24 = 5x + 6$
$-3x \quad -6 \quad -3x \quad -6$
$18 = 2x$
$\div 2 \quad \div 2$
$9 = x$

Elles ont pensé au nombre **9**.

Vérification :
Marina : 9 → 9 + 8 = 17 → 17 × 3 = 51
Karima : 9 → 9 × 5 = 45 → 45 + 6 = 51

C'est bon

Exemple 5

Kassandra et Arthur ont le même nombre de billes.
Si Arthur donne 10 billes à Kassandra, elle en aura alors deux fois plus que lui.
Combien ont-ils de billes au départ ?

Soit x le nombre de billes au départ.

	Kassandra	Arthur
Départ	x	x
Après calcul	$x + 10$	$x - 10$

Kassandra = 2 × Arthur
$x + 10 = 2 \times (x - 10)$

$x + 10 = 2x - 20$
$30 = x$

Ils avaient chacun **30 billes**.

Vérification :
Kassandra : 30 → 30 + 10 = 40
Arthur : 30 → 30 – 10 = 20
2 × 20 = 40

C'est bon

Exemple 6

Nathan a déjà eu 4 notes en français : 16, 9, 12 et 5.
Quelle doit être sa prochaine note s'il veut avoir 10 de moyenne ?

Soit x la prochaine note.

$$\frac{16 + 9 + 12 + 5 + x}{5} = 10$$

$$\frac{42 + x}{5} = 10$$
$$42 + x = 50$$
$$x = 8$$

Il doit avoir **8** à son prochain devoir.

Vérification :
$$\frac{16+9+12+5+8}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

C'est bon

IV – Inéquations

Définition

Une ***inéquation*** est une relation liant deux expressions algébriques séparées par un signe d'inéquation : <, >, ≤, ou ≥.

Exemples

$2x + 5 > 3\,(x - 7)$ $\quad$ $5x - 2 < 2x + 7$ $\quad$ $2x - 3 \leq x + 4$ $\quad$ $x + 4 \geq 3x - 5$

Définition

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnue pour que l'inégalité soit vraie.

Remarque

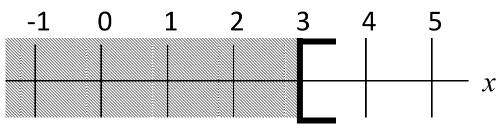
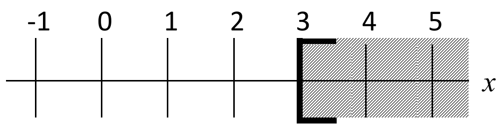
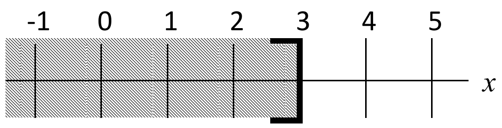
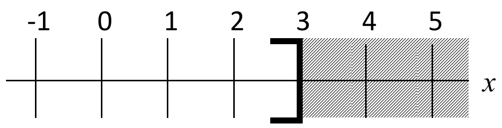
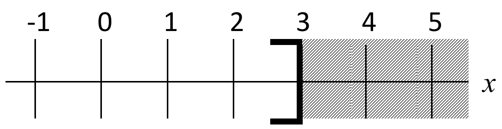
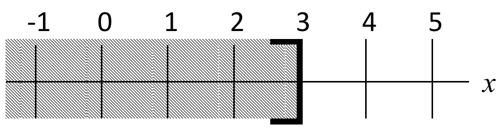
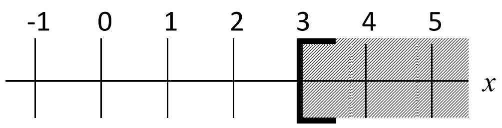
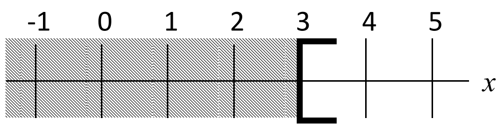
Lorsque l'on parle d'inégalité stricte (< ou >) on précise "strictement", mais lorsque l'on parle d'inégalités larges (≤ ou ≥), on peut oublier le "ou égal".
On dit "strictement inférieur". Lorsque l'on dit "inférieur", il faut comprendre "inférieur ou égal".

Exemple

L'inéquation $x < 5$ admet pour solutions tous les nombres strictement inférieurs à 5.

Représentation graphique des solutions d'une inéquation

Selon les exercices, on demandera d'hachurer l'ensemble des solutions ou d'hachurer l'ensemble des points qui ne sont pas solutions. Si rien n'est précisé dans l'énoncé à ce sujet, il faudra préciser si l'on a hachuré les solutions ou les points qui ne sont pas solutions.

	Les solutions sont hachurées	*Les points hachurés ne sont pas solutions*
$x < 3$		
$x \leq 3$		
$x > 3$		
$x \geq 3$		

Pour préciser si le point limite (ici 3) est solution, on place un crochet, tourné vers :

- les solutions si l'inégalité est large (≤ ou ≥)
- les points qui ne sont pas solutions si l'inégalité est stricte (< ou >).

Propriété admise

Les nombres relatifs ***ab*** et ***ac*** sont dans le même ordre que ***b*** et ***c*** si ***a*** est strictement positif, dans l'ordre inverse si ***a*** est strictement négatif.

Exemples

$2 < 5$ et $2 \times \mathbf{7} < 5 \times \mathbf{7}$	***7*** *est strictement positif, on ne change pas l'ordre*
$78 \geq 25$ et $78 \times \mathbf{13} \geq 25 \times \mathbf{13}$	***13*** *est strictement positif, on ne change pas l'ordre*
$5 < 12$ et $5 \times (\mathbf{-4}) > 12 \times (\mathbf{-4})$	***- 4*** *est strictement négatif, on change l'ordre*

Propriété admise

Pour résoudre une inéquation, on peut (cela ne change pas les solutions) :

1. Additionner (ou soustraire) à chaque membre de l'inéquation une même expression.
2. Multiplier (ou diviser) chaque membre de l'inéquation par une même expression non nulle.

MAIS, si on multiplie (ou divise) par une expression négative, il faut INVERSER le sens de l'inéquation.

Pour résoudre une équation , on peut :

1. Additionner (ou soustraire) à chaque membre de l'équation une même expression.
2. Multiplier (ou diviser) chaque membre de l'équation par une même expression non nulle.

Exemples

$x + 5 < 3$ donc $x + 5 - 5 < 3 - 5$ donc $x < -2$ Les solutions sont les nombres strictement inférieures à -2.

$x - 4 > 7$ donc $x - 4 + 4 > 7 + 4$ donc $x > 11$ Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à 11.

$2x \leq 12$ donc $2x \div 2 \leq 12 \div 2$ donc $x \leq 6$ Les solutions sont les nombres inférieurs à 6.

$-2x \leq 12$ donc $-2x \div (-2) \geq 12 \div (-2)$ donc $x \geq -6$ Les solutions sont les nombres supérieurs à -6.

On a divisé par un nombre négatif (-2), donc on inverse le sens de l'inéquation.

Remarque

Pour résoudre une inéquation, on commence par simplifier l'écriture algébrique de chacun des membres, puis on isole les inconnues dans un membre.

Astuce

Afin de ne pas avoir à multiplier (ou diviser) par une quantité négative, il peut être intéressant de "passer" les inconnues du côté où il y en a le plus.

En faisant ainsi, on n'a pas à se soucier du changement éventuel de sens de l'inégalité.

Exemples

✎ $2x + 5 > 3(x - 7)$ donc $2x + 5 > 3x - 21$ donc $5 + 21 > 3x - 2x$ donc $26 > x$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres strictement inférieurs à 26.

✎ $x + 4 \geq 3x - 5$ donc $x - 3x \geq -5 - 4$ donc $-2x \geq -9$ donc $x \leq -9 \div (-2)$ donc $x \leq 9/2$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres inférieurs à 9/2.

Exemple de problème n° 1

Paul a déjà eu 4 notes de français : 10, 12, 7 et 9.

Quel doit être sa prochaine note, s'il veut avoir plus de 10 de moyenne ?

Soit x la prochaine note.

$\frac{10+12+7+9+x}{5} \geq 10$ donc $\frac{38+x}{5} \geq 10$ donc $38 + x \geq 10 \times 5$ donc $38 + x \geq 50$ donc $x \geq 50 - 38$ donc $x \geq 12$

Paul doit avoir plus de 12 à son prochain contrôle pour avoir plus de 10 de moyenne.

Exemple de problème n° 2

Patrick veut louer une voiture pour ses vacances.

L'entreprise A propose un tarif de 0,5 € par kilomètre.

L'entreprise B propose un tarif de 0,3 € par kilomètre, mais avec une prise en charge de 10 €.

Quel est le nombre de kilomètres parcourus pour lequel le tarif A est plus avantageux que le tarif B ?

Soit x le nombre de kilomètres parcourus.

Facultatif
Le prix avec le tarif A est 0,5 x
Le prix avec le tarif B est 10 + 0,3 x

$0{,}5x < 10 + 0{,}3x$ donc $0{,}5x - 0{,}3x < 10$ donc $0{,}2x < 10$ donc $x < 10 \div 0{,}2$ donc $x < 50$

Le tarif A est le plus avantageux si l'on parcourt moins de 50 kilomètres.