## I - Fonctions affines et linéaires

**Définition**

Soit $p$ et $q$ deux nombres.

Une fonction est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x$

Une fonction est dite affine si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x + q$

Exemples

| Fonction | Linéaire ? | Affine ? |
|---|---|---|
| $f(x) = 3x$ | Oui | Oui car $3x = 3x + 0$ |
| $g(x) = -6x$ | Oui | Oui car $-6x = -6x + 0$ |
| $h(x) = 5x + 3$ | Non | Oui |
| $i(x) = 7$ | Non | Oui car $7 = 0x + 7$ |
| $j(x) = \cos(x)$ | Non | Non |
| $k(x) = x^2$ | Non | Non |

**Propriété** admise

Une situation de proportionnalité de coefficient p

- a une représentation graphique qui est une droite qui passe par l'origine du repère,
- correspond à la fonction linéaire $f(x) = p\,x$.

Soit $f(x) = p\,x + q$ une fonction affine.

Sa représentation graphique est une droite.

**Exemple**

Gabriel souhaite acheter des fraises pour faire de la confiture. Sur le marché, il a trouvé des fraises de France à 2,5€ le kilogramme.

Le prix des fraises est proportionnel à la masse de fraises.

Le coefficient de proportionnalité est 2,5.

On appelle $x$ la masse de fraises en kilogrammes.

Cela correspond à la fonction linéaire $f(x) = 2{,}5\,x$.

Marine est plus courageuse. Elle a trouvé un producteur qui lui offre de ramasser ses fraises pour 1,5€ le kilogramme après paiement d'une redevance forfaitaire de 20€.

Le prix des fraises chez ce producteur est donné par la fonction affine $g(x) = 1{,}5\,x + 20$.

**Comment** tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine ?

Comme leurs représentations graphiques sont des droites, il suffit de placer 2 points.

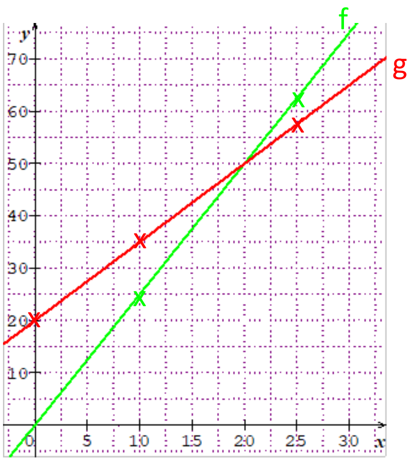
Afin de vérifier, il est intéressant d'en placer 3.

On construit donc un tableau de valeur avec 3 points.

**Exemple des fraises**

$f(x) = 2{,}5\,x$ $\qquad$ $g(x) = 1{,}5\,x + 20$

| $x$ | 0 | 10 | 25 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 25 | 62,5 |
| $g(x)$ | 20 | 35 | 57,5 |




**Comment** déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction affine ?

On cherche les antécédents de $a$ par la fonction affine $f(x) = p\,x + q$

Il suffit de résoudre l'équation $p\,x + q = a$

**Exemple** des fraises

On cherche combien Marine peut acheter de fraises avec 38€.

On cherche les antécédents de 38 donc les nombres $x$ tels que g($x$) = 38 donc 1,5 $x$ + 20 = 38

1,5 $x$ + 20 = 38

1,5 $x$ = 18

$x$ = 12

L'antécédent de 38 est 12.

On interprète ce résultat en disant que Marie peut donc acheter 12kg de fraises.

Propriété

Soit f($x$) = $p\,x + q$ une fonction affine.

La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées (0 ; $q$).
Le nombre $q$ est appelé *ordonnée à l'origine*.

Si $x$ augmente de 1 alors f($x$) augmente de $p$.
Le nombre $p$ est appelé *coefficient directeur*

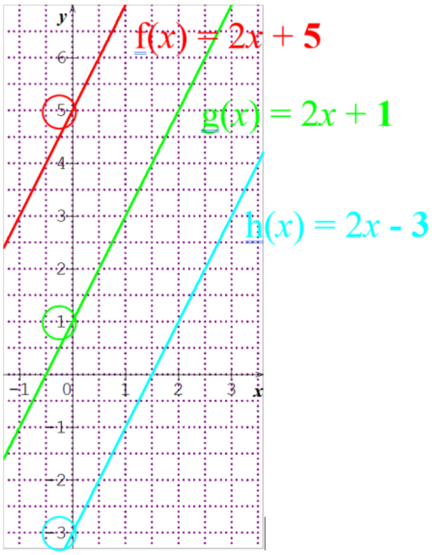
**Démonstration**

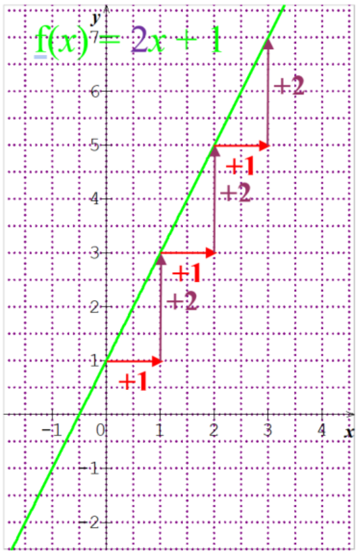
Si $x = 0$ alors f($x$) = f(0) = $p \times 0 + q = q$, donc si $x = 0$ alors la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées (0 ; $q$).

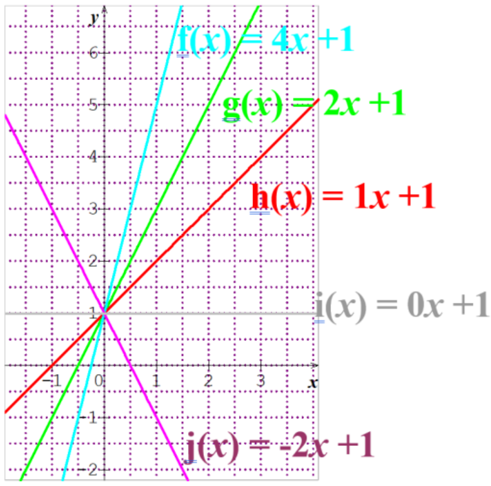
f($x$ + 1) = $p\,(x + 1) + q = p\,x + p + q = p\,x + q + p$ = f($x$) + $p$

Donc si $x$ augmente de 1 alors f($x$) augmente de $p$.

**Exemples**




**Remarque**

Deux fonctions qui ont le même coefficient directeur ont des représentations graphiques qui sont parallèles.

Propriété

Soit f($x$) = $p\,x + q$ une fonction affine.

Soient $x_1$ et $x_2$ deux nombres et f($x_1$) et f($x_2$) leurs images.

$$p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Démonstration

f($x_1$) = p $x_1$ + q　　　f($x_2$) = p $x_2$ + q

f($x_2$) - f($x_1$) = p $x_2$ + q – (p $x_1$ + q)

f($x_2$) - f($x_1$) = p $x_2$ + q – p $x_1$ – q

f($x_2$) - f($x_1$) = p $x_2$ – p $x_1$

f($x_2$) - f($x_1$) = p ($x_2$ – $x_1$)

$$\frac{\mathrm{f}(x_2) - \mathrm{f}(x_1)}{x_2 - x_1} = p$$

**Exemple** 1

Soit f($x$) = $p\,x + q$ une fonction affine tel que f(2) = 5 et f(6) = 21 leurs images.
Trouver l'expression algébrique de f.

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ avec $x_1$ = 2 , f($x_1$) = 5 , $x_2$ = 6 et f($x_2$) = 21.

On a $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{21-5}{6-2} = \frac{16}{4} = 4$
Donc f($x$) = 4$x$ + $q$.

Dans l'énoncé ↓ On remplace $x$ par 2 dans la formule f($x$) = 4$x$ + q ↓

On a f(2) = 5 et f(2) = 4 × 2 + $q$
donc 5 = 4 × 2 + $q$
donc 5 = 8 + $q$
donc -3 = $q$
donc $\boxed{f(x) = 4x - 3}$

**Exemple** 2
Soit A(4 ; 7) et B(6 ; 11) deux points.
Trouver l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B.
Soit C(5 ; 9) et D (8 ; 17)
Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

Soit f($x$) = p$x$ + q la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A et B.
On a f(4) = 7 et f(6) = 11
On a $x_1$ = 4 et f($x_1$) = 7 et $x_2$ = 6 et f($x_2$) = 11
Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Donc $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{11-7}{6-4} = \frac{4}{2} = 2$
Donc f($x$) = 2$x$ + $q$.
On a f(4) = 7 et f(4) = 2 × 4 + $q$
donc 7 = 2 × 4 + $q$
donc 7 = 8 + $q$
donc -1 = $q$
donc $\boxed{f(x) = 2x - 1}$
f(5) = 2 × 5 – 1 = 9 donc $\boxed{C \in (AB)}$. f(8) = 2 × 8 – 1 = 15 ≠ 17 donc $\boxed{D \notin (AB)}$.
Soit M ($x$ ; y) un point sur cette droite.
Les coordonnées de ce point vérifient l'équation y = 2$x$ - 1 ; on dit que y = 2$x$ - 1 est *l'équation de la droite* (AB).

## II - Pourcentages

**Rappel**

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.
Le mot français « de » se traduit en mathématiques par une multiplication.

**Exemple**

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120€, c'est prendre $\frac{3}{5} \times 120 = 72$€.

Prendre 12% de 45€, c'est prendre $\frac{12}{100}$ de 45€, ce qui revient à prendre $\frac{12}{100} \times 45 = 5{,}40$€.

**Comment** calculer le produit d'une fraction par une quantité ?

$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$ $\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$ $\frac{a}{b} \times c = (c \div b) \times a$

**Exemples**

$\frac{10}{5} \times 7 = (10 \div 5) \times 7 = 2 \times 7 = 14$

$\frac{5}{3} \times 6 = (5 \times 6) \div 3 = 30 \div 3 = 10$

$\frac{7}{5} \times 15 = (15 \div 5) \times 7 = 3 \times 7 = 21$

**Propriété**

Ajouter $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Soustraire $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

**Démonstration**

Soit $Q$ la quantité.

$p\%$ de $Q$ c'est $\frac{p}{100}\times Q$

Si on ajoute $p\%$ à $Q$, on trouve $Q+\frac{p}{100}\times Q=\left(1+\frac{p}{100}\right)\times Q$.

Si on soustrait $p\%$ à $Q$ on trouve $Q-\frac{p}{100}\times Q=\left(1-\frac{p}{100}\right)\times Q$.

**Exemple** 1

*Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15%.*
*Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?*

Calculons le prix soldé.

$$74\times\left(1-\frac{15}{100}\right)=74\times 0{,}85=62{,}90$$

Le prix soldé est 62,90€.

**Exemple** 2

*Le taux de TVA est de 33,3%.*

*a.* *Le prix HT est de 126 €. Quel est le prix TTC ?*

*b.* *Le prix TTC est de 150 €. Quel est le prix HT ?*

Pour passer du prix HT au prix TTC, on multiplie par $1+\frac{33{,}3}{100}=1{,}333$ donc pour passer du prix TTC au prix HT, on divise par 1,333

a. Calculons le prix TTC.

$126\times 1{,}333\approx 167{,}96$

Le prix TTC est d'environ $\boxed{167{,}96\text{ €}}$.

b. Calculons le prix HT.

$150\div 1{,}333\approx 112{,}53$

Le prix HT est d'environ $\boxed{112{,}53\text{ €}}$.

**Résumé**

$$\textbf{Départ}\quad \underset{\div\left(1+\frac{p}{100}\right)}{\overset{\times\left(1+\frac{p}{100}\right)}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{+\,p\,\%}}}}\quad \textbf{Arrivée}$$

$$\textbf{Départ}\quad \underset{\div\left(1-\frac{p}{100}\right)}{\overset{\times\left(1-\frac{p}{100}\right)}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{-\,p\,\%}}}}\quad \textbf{Arrivée}$$