

# FONCTIONS AFFINES et LINEAIRES, pourcentages

## I - Fonctions affines et linéaires

### Définition

Soit  $p$  et  $q$  deux nombres.

Une fonction est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme  $f(x) = p \times x$

Une fonction est dite affine si elle peut se mettre sous la forme  $f(x) = p \times x + q$

### Exemples

Fonction	Linéaire ?	Affine ?
$f(x) = 3x$	Oui	Oui car $3x = 3x + 0$
$g(x) = -6x$	Oui	Oui car $-6x = -6x + 0$
$h(x) = 5x + 3$	Non	Oui
$i(x) = 7$	Non	Oui car $7 = 0x + 7$
$j(x) = \cos(x)$	Non	Non
$k(x) = x^2$	Non	Non

### Propriété admise

Une situation de proportionnalité de coefficient  $p$

- a une représentation graphique qui est une droite qui passe par l'origine du repère,
- correspond à la fonction linéaire  $f(x) = p \cdot x$ .

Soit  $f(x) = p \cdot x + q$  une fonction affine.

Sa représentation graphique est une droite.

### Exemple

Gabriel souhaite acheter des fraises pour faire de la confiture. Sur le marché, il a trouvé des fraises de France à 2,5€ le kilogramme.

Le prix des fraises est proportionnel à la masse de fraises.

Le coefficient de proportionnalité est 2,5.

On appelle  $x$  la masse de fraises en kilogrammes.

Cela correspond à la fonction linéaire  $f(x) = 2,5 \cdot x$ .

Marine est plus courageuse. Elle a trouvé un producteur qui lui offre de ramasser ses fraises pour 1,5€ le kilogramme après paiement d'une redevance forfaitaire de 20€.

Le prix des fraises chez ce producteur est donné par la fonction affine  $g(x) = 1,5 \cdot x + 20$ .

### Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine ?

Comme leurs représentations graphiques sont des droites, il suffit de placer 2 points.

Afin de vérifier, il est intéressant d'en placer 3.

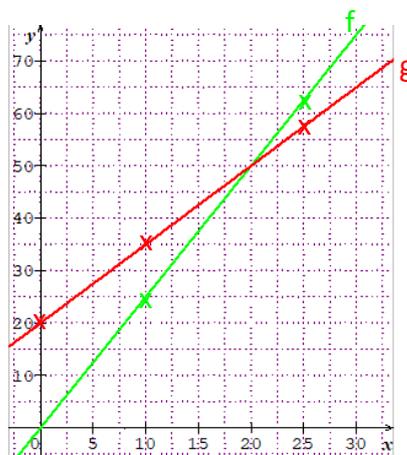
On construit donc un tableau de valeur avec 3 points.

### Exemple des fraises

$$f(x) = 2,5 \cdot x$$

$$g(x) = 1,5 \cdot x + 20$$

$x$	0	10	25
$f(x)$	0	25	62,5
$g(x)$	20	35	57,5



### Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction affine ?

On cherche les antécédents de  $a$  par la fonction affine  $f(x) = p \cdot x + q$

Il suffit de résoudre l'équation  $p \cdot x + q = a$

### Exemple des fraises

On cherche combien Marine peut acheter de fraises avec 38€.

On cherche les antécédents de 38 donc les nombres  $x$  tels que  $g(x) = 38$  donc  $1,5x + 20 = 38$

$$1,5x + 20 = 38$$

$$1,5x = 18$$

$$x = 12$$

L'antécédent de 38 est 12.

On interprète ce résultat en disant que Marie peut donc acheter 12kg de fraises.

### Propriété

Soit  $f(x) = px + q$  une fonction affine.

La représentation graphique de  $f$  passe par le point de coordonnées  $(0 ; q)$ .

Le nombre  $q$  est appelé *ordonnée à l'origine*.

Si  $x$  augmente de 1 alors  $f(x)$  augmente de  $p$ .

Le nombre  $p$  est appelé *coefficient directeur*

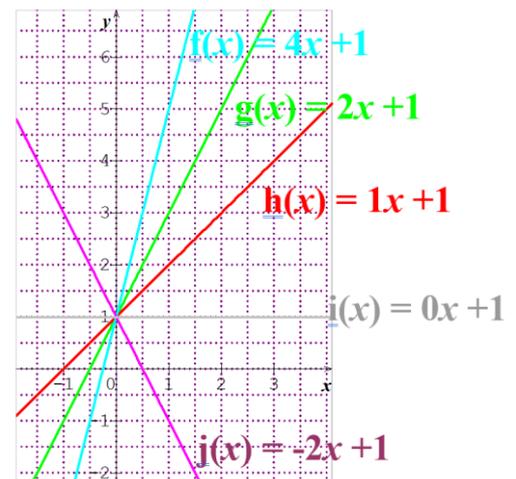
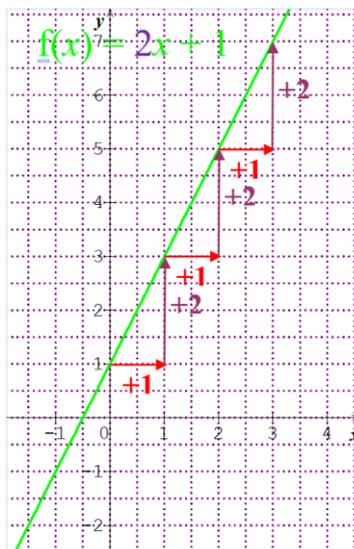
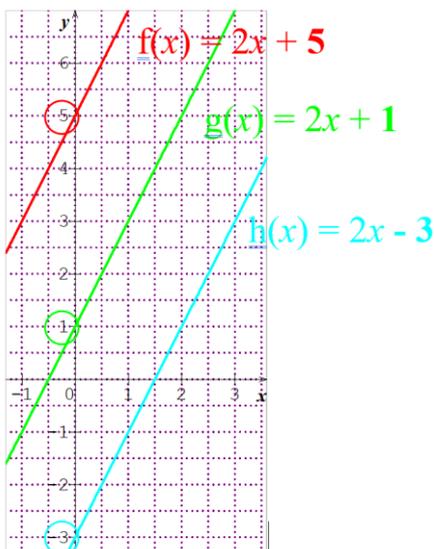
### Démonstration

Si  $x = 0$  alors  $f(x) = f(0) = p \times 0 + q = q$ , donc si  $x = 0$  alors la représentation graphique de  $f$  passe par le point de coordonnées  $(0 ; q)$ .

$$f(x + 1) = p(x + 1) + q = px + p + q = px + q + p = f(x) + p$$

Donc si  $x$  augmente de 1 alors  $f(x)$  augmente de  $p$ .

### Exemples



### Remarque

Deux fonctions qui ont le même coefficient directeur ont des représentations graphiques qui sont parallèles.

### Propriété

Soit  $f(x) = px + q$  une fonction affine.

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux nombres et  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  leurs images.

$$p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

### Démonstration

$$f(x_1) = px_1 + q \quad f(x_2) = px_2 + q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 + q - (px_1 + q)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 + q - px_1 - q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 - px_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = p(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = p$$

### Exemple 1

Soit  $f(x) = p x + q$  une fonction affine tel que  $f(2) = 5$  et  $f(6) = 21$  leurs images.  
 Trouver l'expression algébrique de  $f$ .

Comme  $f$  est une fonction affine, on peut utiliser la formule  $p = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$  avec  $x_1 = 2$ ,  $f(x_1) = 5$ ,  $x_2 = 6$  et  $f(x_2) = 21$ .

$$\text{On a } p = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{21-5}{6-2} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\text{Donc } f(x) = 4x + q.$$

Dans l'énoncé On remplace  $x$  par 2 dans la formule  $f(x) = 4x + q$



$$\text{On a } f(2) = 5 \text{ et } f(2) = 4 \times 2 + q$$

$$\text{donc } 5 = 4 \times 2 + q$$

$$\text{donc } 5 = 8 + q$$

$$\text{donc } -3 = q$$

$$\text{donc } \boxed{f(x) = 4x - 3}$$

### Exemple 2

Soit  $A(4 ; 7)$  et  $B(6 ; 11)$  deux points.

Trouver l'expression algébrique de la fonction affine  $f$  dont la représentation graphique passe par les points  $A$  et  $B$ .

Soit  $C(5 ; 9)$  et  $D(8 ; 17)$

Les points  $C$  et  $D$  appartiennent-ils à la droite  $(AB)$  ?

Soit  $f(x) = px + q$  la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points  $A$  et  $B$ .

$$\text{On a } f(4) = 7 \text{ et } f(6) = 11$$

$$\text{On a } x_1 = 4 \text{ et } f(x_1) = 7 \text{ et } x_2 = 6 \text{ et } f(x_2) = 11$$

Comme  $f$  est une fonction affine, on peut utiliser la formule  $p = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ .

$$\text{Donc } p = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{11-7}{6-4} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Donc } f(x) = 2x + q.$$

$$\text{On a } f(4) = 7 \text{ et } f(4) = 2 \times 4 + q$$

$$\text{donc } 7 = 2 \times 4 + q$$

$$\text{donc } 7 = 8 + q$$

$$\text{donc } -1 = q$$

$$\text{donc } \boxed{f(x) = 2x - 1}$$

$$f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9 \text{ donc } \boxed{C \in (AB)}.$$

$$f(8) = 2 \times 8 - 1 = 15 \neq 17 \text{ donc } \boxed{D \notin (AB)}.$$

Soit  $M(x ; y)$  un point sur cette droite.

Les coordonnées de ce point vérifient l'équation  $y = 2x - 1$  ; on dit que  $y = 2x - 1$  est l'équation de la droite  $(AB)$ .

## II - Pourcentages

### Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.

Le mot français « de » se traduit en mathématiques par une multiplication.

### Exemple

Prendre  $\frac{3}{5}$  de 120€, c'est prendre  $\frac{3}{5} \times 120 = 72$ €.

Prendre 12% de 45€, c'est prendre  $\frac{12}{100}$  de 45€, ce qui revient à prendre  $\frac{12}{100} \times 45 = 5,40$ €.

**Comment** calculer le produit d'une fraction par une quantité ?

$$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$$

$$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$$

$$\frac{a}{b} \times c = (c \div b) \times a$$

### Exemples

$$\begin{aligned} \frac{10}{5} \times 7 &= (10 \div 5) \times 7 \\ &= 2 \times 7 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \times 6 &= (5 \times 6) \div 3 \\ &= 30 \div 3 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{5} \times 15 &= (15 \div 5) \times 7 \\ &= 3 \times 7 = 21 \end{aligned}$$

## Propriété

Ajouter  $p\%$  à une quantité revient à la multiplier par  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ .

Soustraire  $p\%$  à une quantité revient à la multiplier par  $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ .

## Démonstration

Soit  $Q$  la quantité.

$p\%$  de  $Q$  c'est  $\frac{p}{100} \times Q$

Si on ajoute  $p\%$  à  $Q$ , on trouve  $Q + \frac{p}{100} \times Q = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times Q$ .

Si on soustrait  $p\%$  à  $Q$  on trouve  $Q - \frac{p}{100} \times Q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \times Q$ .

## Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à  $-15\%$ .

Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est  $74\text{€}$  ?

Calculons le prix soldé.

$$74 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 74 \times 0,85 = 62,90$$

Le prix soldé est  $62,90\text{€}$ .

## Exemple 2

Le taux de TVA est de  $33,3\%$ .

a. Le prix HT est de  $126\text{€}$ . Quel est le prix TTC ?

b. Le prix TTC est de  $150\text{€}$ . Quel est le prix HT ?

Pour passer du prix HT au prix TTC, on multiplie par  $1 + \frac{33,3}{100} = 1,333$  donc pour passer du prix TTC au prix HT, on divise par  $1,333$

a. Calculons le prix TTC.

$$126 \times 1,333 \approx 167,96$$

Le prix TTC est d'environ  $167,96\text{€}$ .

b. Calculons le prix HT.

$$150 \div 1,333 \approx 112,53$$

Le prix HT est d'environ  $112,53\text{€}$ .

## Résumé

