

# PROBABILITES

## Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.  
Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

| Nombre de piles | Nombre de faces | Total |
|-----------------|-----------------|-------|
| 4 374           | 4 626           | 9 000 |

## Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est  $\frac{4\,374}{9\,000} \approx 0,486$  et la fréquence de « Face » est  $\frac{4\,626}{9\,000} \approx 0,514$ .

## Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

| Méthode 1                  | Méthode 2  | Méthode 3 |       |   |       |       |     |  |
|----------------------------|--|-----------|-------|---|-------|-------|-----|--|
| $0,486 = \frac{48,6}{100}$ | <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>Pile</td> <td>4 374</td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>9 000</td> <td>100</td> </tr> </table> $? = \frac{4\,374 \times}{9\,000}$ $? = \frac{4\,374 \times 100}{9\,000} \approx 48,6$ | Pile      | 4 374 | ? | Total | 9 000 | 100 | $\text{Fréquence de A en \%} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$ $\text{Fréquence de "pile" en \%} = \frac{4\,374}{9\,000} \times 100 \approx 48,6$ |
| Pile                       | 4 374  | ?         |       |   |       |       |     |  |
| Total                      | 9 000  | 100       |       |   |       |       |     |  |
|                            | La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%.  |           |       |   |       |       |     |  |

## Définitions

Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

## Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est  $\frac{1}{2}$  et que la probabilité d'obtenir "face" est  $\frac{1}{2}$ .

On notera  $p(\text{Pile}) = \frac{1}{2}$  et  $p(\text{Face}) = \frac{1}{2}$ .

p comme probabilité

## Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

## Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

| Nombre de tirages         | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10000 | 50000  | 100000 | 1000000 |
|---------------------------|----|----|-----|-----|------|------|-------|--------|--------|---------|
| Nombre de "Pile"          | 2  | 23 | 46  | 240 | 494  | 2470 | 4908  | 24853  | 49914  | 500 557 |
| Fréquence de "Pile" en %  | 20 | 46 | 46  | 48  | 49,4 | 49,4 | 49,08 | 49,706 | 49,914 | 50,0557 |
| Ecart avec la probabilité | 30 | 4  | 4   | 2   | 0,6  | 0,6  | 0,92  | 0,294  | 0,086  | 0,0557  |

### Exemple des dés

On tire deux dés et on effectue leur somme.

Les issues possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

On a répété de nombreuses fois l'expérience en 3<sup>ème</sup>.

Voici les résultats de l'expérience :

| Somme          | 2      | 3      | 4      | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10     | 11     | 12     | Total |
|----------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|-------|
| Effectif       | 73     | 156    | 223    | 335     | 410     | 445     | 367     | 288     | 208    | 182    | 101    | 2788  |
| Fréquence en % | 2,62 % | 5,60 % | 8,00 % | 12,02 % | 14,71 % | 15,96 % | 13,16 % | 10,33 % | 7,46 % | 6,53 % | 3,62 % | 100 % |

Les issues n'apparaissent pas avec la même fréquence.

Le premier dé a 6 issues possibles et le second aussi. Au total, il y a 6x6 issues possibles pour la somme ... mais certaines sont identiques :

$$p(2) = p(12) = 1/36 \approx 2,8\%$$

$$p(4) = p(10) = 3/36 \approx 8,3\%$$

$$p(6) = p(8) = 5/36 \approx 13,9\%$$

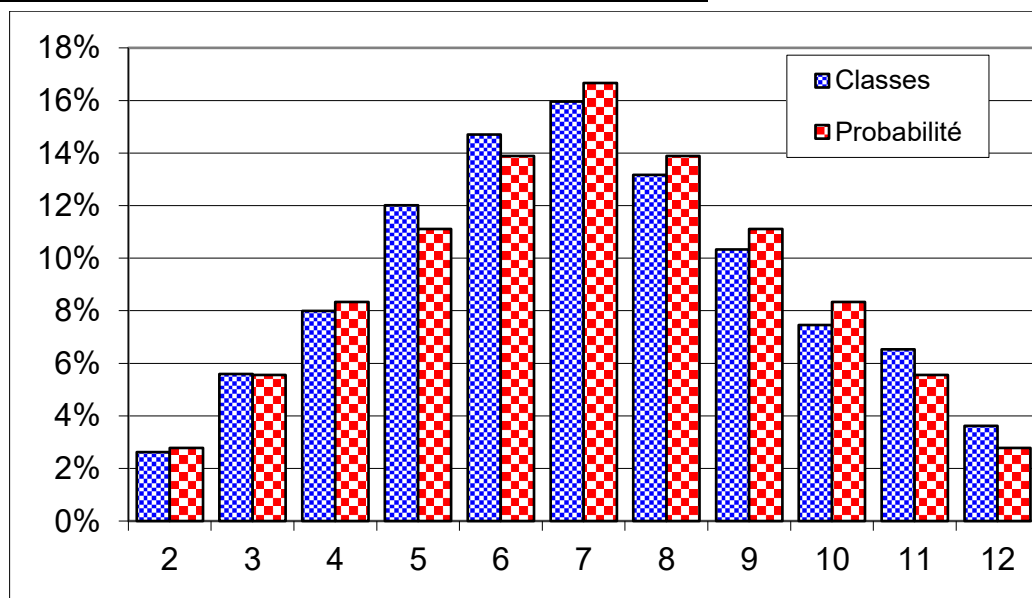
$$p(3) = p(11) = 2/36 \approx 5,6\%$$

$$p(5) = p(9) = 4/36 \approx 11,1\%$$

$$p(7) = 6/36 \approx 16,7\%$$

| + | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| Somme | Issues possibles<br>dé rouge + dé vert | Nombre<br>d'issues<br>possibles | Probabilité  |
|-------|--|---------------------------------|--------------|
| 2     | 1+1                                    | 1                               | 1/36 ≈ 2,8%  |
| 3     | 1+2=2+1                                | 2                               | 2/36 ≈ 5,6%  |
| 4     | 1+3=2+2=3+1                            | 3                               | 3/36 ≈ 8,3 % |
| 5     | 1+4=2+3=3+2=4+1                        | 4                               | 4/36 ≈ 11,1% |
| 6     | 1+5=2+4=3+3=4+2=5+1                    | 5                               | 5/36 ≈ 13,9% |
| 7     | 1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1                | 6                               | 6/36 ≈ 16,7% |
| 8     | 2+6=3+5=4+4=5+3=6+2                    | 5                               | 5/36 ≈ 13,9% |
| 9     | 3+6=4+5=5+4=6+3                        | 4                               | 4/36 ≈ 11,1% |
| 10    | 4+6=5+5=6+4                            | 3                               | 3/36 ≈ 8,3%  |
| 11    | 5+6=6+5                                | 2                               | 2/36 ≈ 5,6%  |
| 12    | 6+6                                    | 1                               | 1/36 ≈ 2,8%  |
| Total |  | 36                              | 1            |



### Propriété admise

La somme des probabilités de toutes les issues possibles est toujours 1.

### Définitions

Un événement est constitué d'une (ou plusieurs) issue(s) d'une expérience aléatoire ; on dit qu'une de ces issues réalise l'évènement.

Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

### Exemple des dés

- ▶ Soit A l'évènement "on obtient un résultat strictement inférieur à 5".

Les issues qui réalisent cet évènement sont 2, 3 et 4.

$$p(A) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{On ajoute les probabilités car les issues sont incompatibles.}$$

- ▶ Soit B l'évènement "on obtient un nombre pair".

Les issues qui réalisent cet évènement sont 2, 4, 6, 8, 10 et 12.

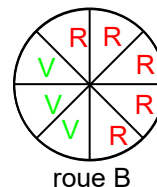
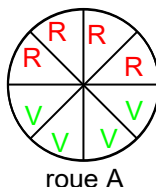
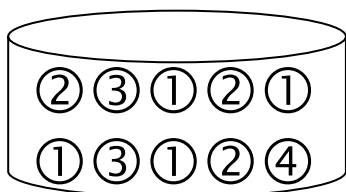
$$p(B) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

- ▶ Soit C l'évènement "on obtient un nombre impair".

Les issues qui réalisent cet évènement sont 3, 5, 7, 9 et 11

$$p(C) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

### Exemple d'expérience à deux épreuves



Une urne contient des boules numérotées de 1 à 4.

On tire une boule au hasard et on lit la valeur de la boule.

Si la boule est paire, on tourne la roue A ; si la boule est impaire, on tourne la roue B. Les roues sont colorées en rouge et vert.

Dans l'urne, les issues possibles sont 1, 2, 3 ou 4.

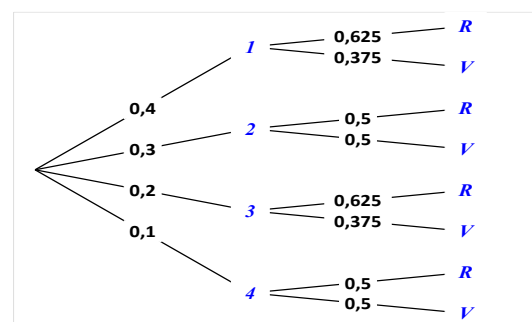
| Valeur de la boule | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|--------------------|---|---|---|---|-------|
| Effectif           | 4 | 3 | 2 | 1 | 10    |

On a  $p(1) = \frac{4}{10} = 0,4$  et  $p(2) = \frac{3}{10} = 0,3$  et  $p(3) = \frac{2}{10} = 0,2$  et  $p(4) = \frac{1}{10} = 0,1$ .

Sur la roue A, on a  $p(R) = \frac{4}{8} = 0,5$  et  $p(V) = \frac{4}{8} = 0,5$ .

Sur la roue B, on a  $p(R) = \frac{3}{8} = 0,375$  et  $p(V) = \frac{5}{8} = 0,625$ .

On peut représenter l'ensemble de ces résultats par un arbre :



### Définitions

Deux événements sont dits *contraires* si la somme de leur probabilité vaut 1.

Le contraire de l'évènement A est noté  $\bar{A}$ .

L'évènement contraire de « il pleut » est « il ne pleut pas »

Un événement est dit *certain* si sa probabilité vaut 1.

### Exemple de l'expérience à deux épreuves

Soit A l'évènement "obtenir 1 et rouge".

$$p(A) = 0,4 \times 0,625 = 0,25$$

Soit B l'évènement "obtenir 2 et rouge".

$$p(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

Soit C l'évènement "obtenir 3 et rouge".

$$p(C) = 0,2 \times 0,625 = 0,125$$

Soit D l'évènement "obtenir 4 et rouge".

$$p(D) = 0,1 \times 0,5 = 0,05$$

Comme A, B, C et D sont incompatibles (voir plus bas), alors  $p(R) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D)$ , donc  $p(R) = 0,25 + 0,15 + 0,125 + 0,05 = 0,575$ .

Soit V l'événement "obtenir vert".

V et R sont contraires donc  $V = \bar{R}$

donc  $p(V) = p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - 0,575 = 0,425$

### Exemple du jeu de cartes

▶ On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ? un roi

▶ Soit C l'événement "tirer un cœur".

$$p(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Soit R l'événement "tirer un roi".

$$p(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

### Définitions

L'événement "A et B", noté  $A \cap B$  et qui se lit « A inter B », est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.

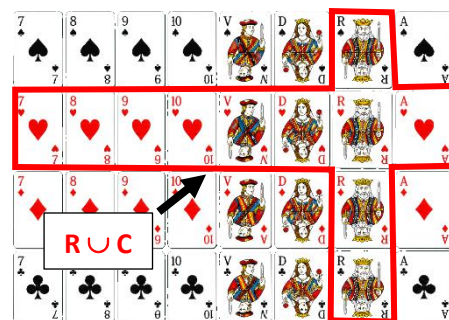
L'événement "A ou B", noté  $A \cup B$  et qui se lit « A union B », est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.

### Exemple du jeu de cartes

L'événement  $R \cap C$  signifie « Tirer un roi et un cœur » ; il est vérifié pour une issue : le roi de cœur.

L'événement  $R \cup C$  signifie « Tirer un roi ou un cœur » ; il est vérifié pour plusieurs issues : le roi de cœur mais aussi tous les cœurs et aussi tous les rois.

En comptant les cartes, on trouve  $p(R \cap C) = \frac{1}{32}$  et  $p(R \cup C) = \frac{11}{32}$



### Propriété admise

Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :  $p(A \cup B) = p(B) + p(A) - p(A \cap B)$

### Définition

On dit que deux événements A et B sont incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ , ou  $\emptyset$  signifie « ensemble vide » ce qui veut dire qu'aucune issue vérifie l'appartenance à A et à B en même temps.

### Propriété admise

Si deux événements A et B sont incompatibles alors  $p(A \cup B) = p(B) + p(A)$

### Exemple du jeu de cartes

$$p(C \cup R) = p(C) + p(R) - p(C \cap R) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

Soit T : « tirer un trèfle »

On ne peut pas tirer une carte qui soit un cœur et un trèfle en même temps donc  $C \cap T = \emptyset$  donc cœur et trèfle sont incompatibles.

$$p(C \cup T) = p(C) + p(T) = \frac{8}{32} + \frac{8}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$