PROPORTIONNALITE et HOMOTHETIES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

$\downarrow \times 1{,}52$

Propriété admise

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad \text{départ} \xrightarrow{\times \frac{arrivée}{départ}} \text{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow[\text{ou}\ \times 129]{\times \frac{645}{5}} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.

2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5{,}1}{3} = 1{,}7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11{,}9}{7} = 1{,}7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$\frac{4{,}80}{3} = 1{,}6$ $\qquad \frac{8{,}00}{5} = 1{,}6$ $\qquad \frac{11{,}00}{7} \approx 1{,}57$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ $\qquad \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ $\qquad \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix :

$65\times161 = 10\,465$

et $91\times115 = 10\,465$

donc $65\times161 = 91\times115$ donc $\frac{65}{91}=\frac{115}{161}$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix :

$7\times17 = 119$

et $13\times9 = 117$

donc $7\times17 \neq 13\times9$ donc $\frac{7}{13}\neq\frac{9}{17}$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\frac{5}{4}=\frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$5 \times ? = 4 \times 7$ *On effectue les produits en croix*

$5 \times ? = 28$ *On simplifie chaque membre*

$? = 5{,}6$ *On divise par 5*

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$\frac{5}{4}=\frac{7}{a}$ $a=\frac{4\times7}{5}=5{,}6$

$\frac{5}{4}=\frac{b}{3}$ $b=\frac{3\times5}{4}=3{,}75$

$\frac{c}{4}=\frac{7}{2}$ $c=\frac{4\times7}{2}=14$

$\frac{5}{d}=\frac{7}{3}$ $d=\frac{5\times3}{7}=\frac{15}{7}$

Exemple 5

Trouve le nombre manquant $\frac{6}{4}=\frac{5+a}{a}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$6 \times a = 4 \times (5 + a)$ *On effectue les produits en croix*

$6a = 20 + 4a$ *On simplifie chaque membre*

$-4a$ $-4a$

$2a = 20$ *On isole les inconnues dans un membre*

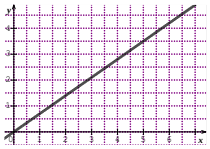
$a = 10$ *On divise les deux membres par 2*

Propriété – admise

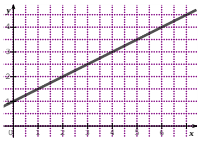
La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

- une droite
- qui passe par l'origine du repère

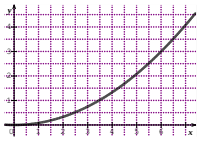
Exemples



Une droite qui passe par l'origine
Situation de proportionnalité



Une droite qui ne passe pas par l'origine
Pas une situation de proportionnalité



Pas une droite

II – Vitesse, distance et temps

3,4h ≠ 3h 40 min
3,4 h = 3h + 0,40h = 3h 24min
× 60

3h 18min ≠ 3,18h
3h 18 min = 3h + 0,30h = 3,3h
÷ 60

Conversions avec la calculatrice

Pour convertir 3,15h, je tape

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	Texas Instruments
3,15 EXE °'''	3,15 EXE Format Sexagésimal	3,15 2nde π →DMS entrer

3,15 h = 3h 9min

Pour convertir 3h 12min, je tape

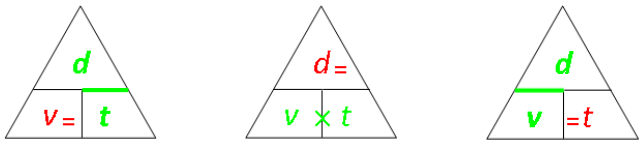
CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	Texas Instruments
3 °''' 12 °''' EXE °'''	3 ↑ + 12 ↑ + EXE Format Décimal	3 2nde π ° 12 2nde π ' entrer

3h 12min = 3,2h

Propriétés admises

Si *d* est la distance, *t* le temps et *v* la vitesse moyenne on a alors

$v = \frac{d}{t}$ $\quad d = v \times t$ $\quad t = \frac{d}{v}$



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$v = \frac{d}{t} = \frac{183}{3} = 61$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

↓ ÷3

$? = \frac{183 \times 1}{3} = 61$

Sa vitesse moyenne est de 61 km/h.

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

↓ ×3

$? = \frac{43 \times 3}{1} = 129$

La distance parcourue est 129 km.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4{,}5} = \frac{8}{3}$$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

$\rightarrow \div 4{,}5$

$$? = 12 \div 4{,}5 = \frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$h = 2h 40min.

Exemple 4 : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km = 135 000 m	1 h = 3 600 s
?	1 s

$\downarrow \div 3\,600$

? = 135 000 ÷ 3 600 = 37,5

135 km/h = 37,5 m/s

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
? m = ? km	3 600 s = 1h

$\downarrow \times 3600$

? = 15 × 3600 = 54 000 m = 54 km

15 m/s = 54 km/h

III – Ratios

Définitions

Deux nombres a et b sont dans le *ratio* 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$

Trois nombres a, b, c sont dans le *ratio* 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$

Exemple d'application 1

Les ingrédients de la pâte brisée sont dans le ratio 1 : 1 : 2

Cela signifie qu'il faut 1 part de beurre pour 1 part de sucre et 2 parts de farine.

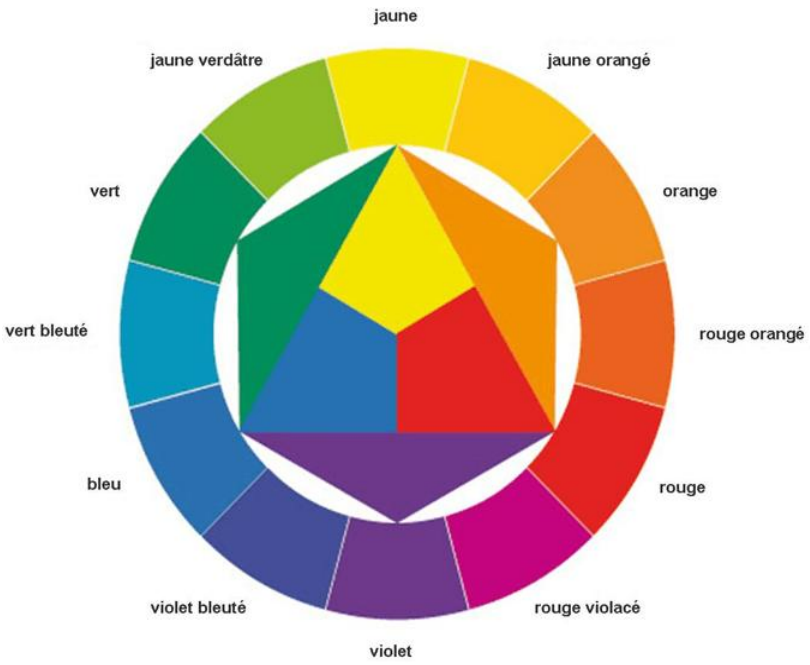
	Beurre	Sucre	Farine
	1 part	1 part	2 parts
Pour une pâte à tarte	125 g	125 g	250 g

Exemple d'application 2

Les couleurs secondaires (vert, orange et violet) sont dans le ratio 1:1. Par exemple, pour obtenir du vert, on prend 1 part de jaune et 1 part de bleu.

Pour obtenir le jaune verdâtre, on prend 1 part de vert et une part de jaune. On dit qu'il est dans le ratio 1:1 avec le vert et le jaune.

Pour obtenir le jaune verdâtre, on peut aussi pendre 1 part de bleu et 3 parts de jaune. On dit alors qu'il est dans la ration 1:3 avec le bleu et le jaune.



https://www.cours-de-peinture.net/technique-de-melange-en-peinture-acrylique/

Exemple d'application 3

Julien a rangé ses jouets dans des petites boites en carton.

Il a 3 boites de voitures et 4 boites de poupées.

On peut dire que ses jouets sont dans le ration 3:4 pour les voitures et les poupées.

Il y a $\frac{3}{7}$ de boites de voitures et $\frac{4}{7}$ de boites de poupées.

Voitures	Poupées	Total
3	4	7

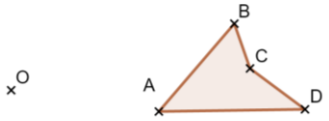
IV – Agrandissement/réduction - Homothéties

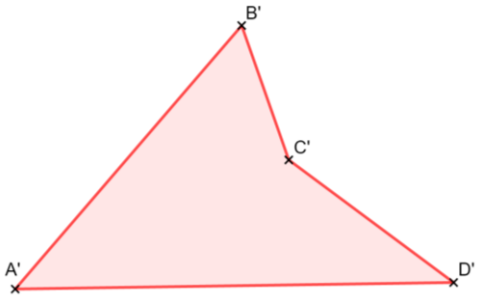
Définition

Le point A' est l'image du point A par l'*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

- A' ∈ (OA)
- OA' = k × OA

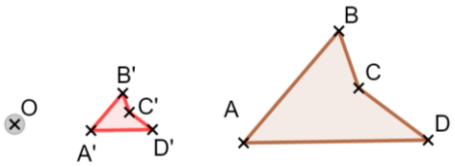
Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'*agrandissement*.





Le quadrilatère A'B'C'D' est agrandissement de ABCD de centre O et de coefficient 3.

Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.

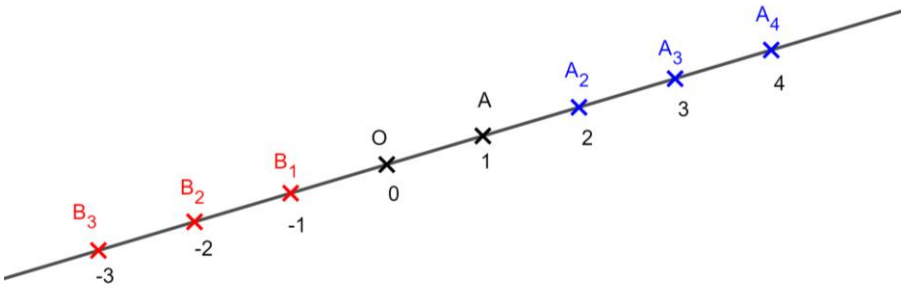


Le quadrilatère A'B'C'D' est la réduction de ABCD de centre O et de coefficient $\frac{1}{3}$.

Construction

Pour construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si k>0, tracer [OA] puis mesurer [OA] et placer A' sur [OA) tel que OA' = k × OA
- Si k<0, tracer [AO] puis mesurer [OA] et placer A' sur [AO) tel que OA' = (*distance à zéro de* k) × OA



- A_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d'agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l'année).

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu E'.
6. Tracer le segment [B'E'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

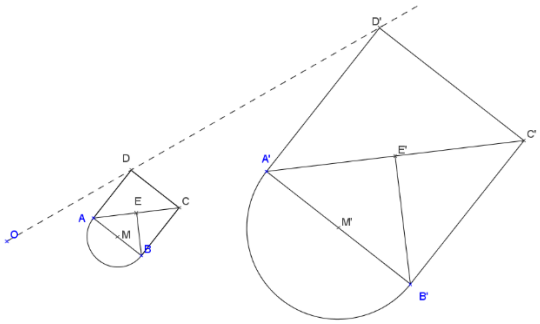


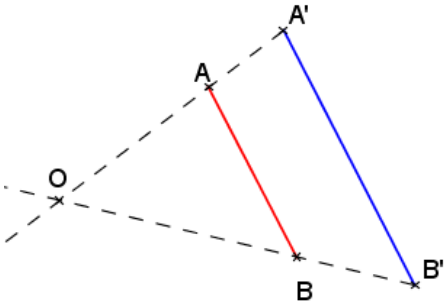
Image par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Caractériser

Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites [A'A) et [B'B) ; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer [OA] et [OA'].

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.