

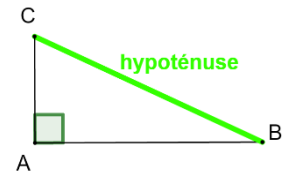
Triangles rectangles : PYTHAGORE

I – PYTHAGORE

Définition

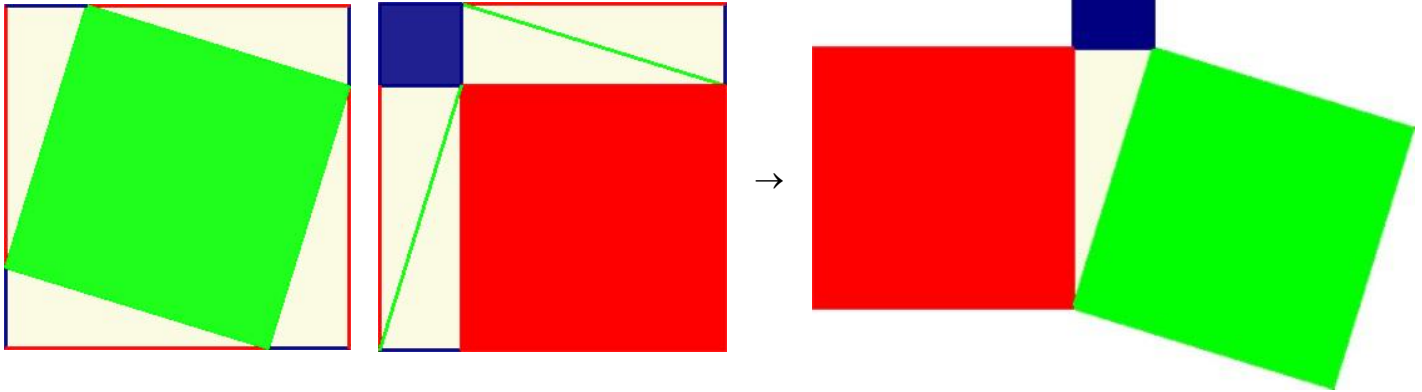
Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.

Hypoténuse vient du latin *hypotenusa* qui vient lui-même du grec *hupoteinousa* qui signifie « celle qui sous-tend ». Ce terme désigne le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit. Les côtés adjacents à l'angle droit étaient appelés cathètes.



Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

⚠ Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.

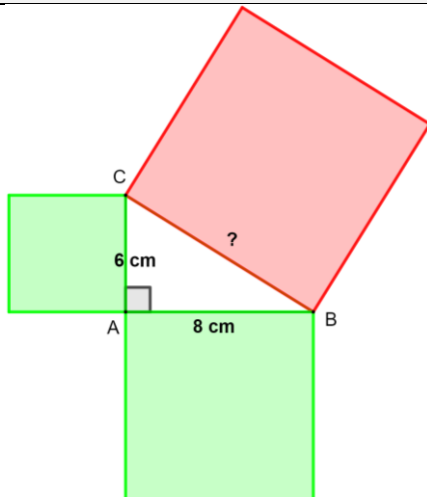
Le théorème d'Al Kashi est une extension de ce théorème de Pythagore dans les triangles quelconques.

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 8 \text{ cm}$
- $AC = 6 \text{ cm}$

Calcule BC.



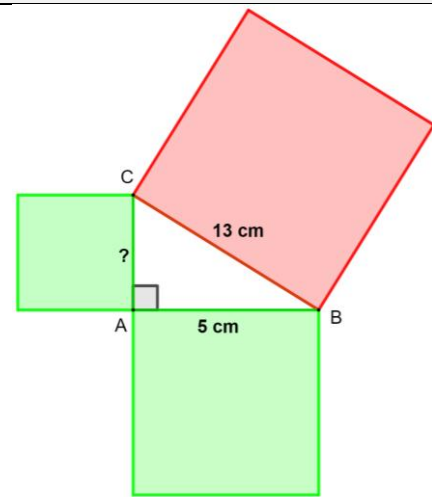
Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 \\ BC^2 &= 6^2 + 8^2 \\ BC^2 &= 36 + 64 \\ BC^2 &= 100 \\ BC &= \sqrt{100} = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 5 \text{ cm}$
- $BC = 13 \text{ cm}$

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ 13^2 &= 5^2 + AC^2 \\ 169 &= 25 + AC^2 \\ -25 \quad -25 \\ 144 &= AC^2 \\ AC &= \sqrt{144} = 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$.

Calcule BC.

Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

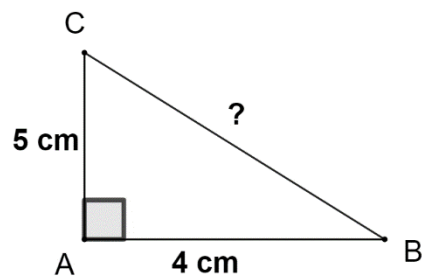
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 4^2 + 5^2$$

$$BC^2 = 16 + 25$$

$$BC^2 = 41$$

$$BC = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ cm}$$



Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	TI collègue
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape		
6 \square \square^2 + 8 \square \square^2 EXE	6 \square \square^2 + 8 \square \square^2 EXE	6 \square \square^2 + 8 \square \square^2 =
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape		
SECONDE \square \square^2 100 EXE	$\sqrt{\square}$ 100 EXE	SECONDE \square \square^2 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$.	Soit ABC un triangle tel que $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$ et $AC = 6 \text{ cm}$.
Quelle est la nature de ABC ?	Quelle est la nature de ABC ?
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté.
$\begin{array}{l l} AC^2 & AB^2 + BC^2 \\ = 5^2 & = 3^2 + 4^2 \\ = 25 & = 9 + 16 \\ & = 25 \end{array}$	$\begin{array}{l l} BC^2 & AB^2 + AC^2 \\ = 7^2 & = 5^2 + 6^2 \\ = 49 & = 25 + 36 \\ & = 61 \end{array}$
Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B (car [AC] est l'hypoténuse).	Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors ABC n'est pas rectangle .

II – RACINES CARREES (et racines cubiques hors programme en France mais nécessaire pour la poursuite en Suisse)

Remarque ♥

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$
$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$
$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	
$6^3 = 216$	$7^3 = 343$	$8^3 = 512$	$9^3 = 729$	$10^3 = 1000$	

Définitions

La racine carrée de a est le nombre positif noté \sqrt{a}
tel que $\sqrt{a^2} = a$

La racine cubique de a est le nombre noté $\sqrt[3]{a}$
tel que $\sqrt[3]{a^3} = a$

Remarques sur la racine carrée

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow \blacksquare^2 \rightarrow & \\ 5 & & 25 \\ & \leftarrow \sqrt{\blacksquare} \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt{4} = 2 & \sqrt{9} = 3 & \sqrt{16} = 4 & \sqrt{25} = 5 & \sqrt{36} = 6 & \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{64} = 8 & \sqrt{81} = 9 & \sqrt{100} = 10 & \sqrt{121} = 11 & \sqrt{144} = 12 & \sqrt{169} = 13 \end{array}$$



La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\sqrt{-1}$ n'existe pas
 $\sqrt{-4}$ n'existe pas

Au lycée, une solution sera proposée pour ces racines carrées : les nombres complexes.

Remarques sur la racine cubique

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow \blacksquare^3 \rightarrow & \\ 5 & & 125 \\ & \leftarrow \sqrt[3]{\blacksquare} \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[3]{1} = 1 & \sqrt[3]{8} = 2 & \sqrt[3]{27} = 3 & \sqrt[3]{64} = 4 & \sqrt[3]{125} = 5 \\ \sqrt[3]{216} = 6 & \sqrt[3]{343} = 7 & \sqrt[3]{512} = 8 & \sqrt[3]{729} = 9 & \sqrt[3]{1000} = 10 \\ \sqrt[3]{-1} = -1 & \sqrt[3]{-8} = -2 & \sqrt[3]{-27} = -3 & \sqrt[3]{-64} = -4 & \sqrt[3]{-125} = -5 \\ \sqrt[3]{-216} = -6 & \sqrt[3]{-343} = -7 & \sqrt[3]{-512} = -8 & \sqrt[3]{-729} = -9 & \sqrt[3]{-1000} = -10 \end{array}$$

Propriétés admises

Soient a et b deux nombres positifs
avec b non nul.

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a \times b} &= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Pour tous les nombres a et b avec b
non nul.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^3} &= a \\ \sqrt[3]{a^3} &= a \\ \sqrt[3]{a \times b} &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \end{aligned}$$

Exemples de calculs

$$\begin{array}{ll} \sqrt{5^2} = 5 & \sqrt{1,2^2} = 1,2 \\ \sqrt{3^2} = 3 & \sqrt{5,2^2} = 5,2 \\ \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} & \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{7^3} = 7 & \sqrt[3]{-8^3} = -8 \\ \sqrt{11^3} = 11 & \sqrt{(-4)^3} = -4 \\ \sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \times 20} = \sqrt[3]{1000} = 10 & \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3} & \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3 \end{array}$$

Définition

Simplifier une racine s'est transformer une racine en produit d'un entier par une racine d'un nombre dont la valeur absolue est plus petite.

Astuce

Pour simplifier la racine d'un entier, il faut écrire l'entier sous la forme du produit d'un carré (ou cube) par un entier

Exemples de simplification de racines carrées

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} & \sqrt{24} &= \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6} \\ \sqrt{147} &= \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3} & \sqrt{20} &= \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ 7\sqrt{50} - 4\sqrt{18} &= 7 \times \sqrt{25 \times 2} - 4 \times \sqrt{9 \times 2} = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 23\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exemples de simplification de racines cubiques

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{32} &= \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4} & \sqrt[3]{250} &= \sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} \\ 11\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{-375} &= 11\sqrt[3]{8 \times 3} + 7\sqrt[3]{-125 \times 3} = 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + 7 \times \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{3} \\ &= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} + 7 \times (-5) \times \sqrt[3]{3} = 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3} = -13\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

Remarques

Les racines doivent être simplifiées.

Les calculatrices simplifient automatiquement les racines carrées.

Exemple avec décomposition en produit de facteurs premiers

$$31104 = 2^7 \times 3^5$$

$$\begin{aligned}\sqrt{31104} &= \sqrt{2^7 \times 3^5} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= 72\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{31104} &= \sqrt[3]{2^7 \times 3^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times 3 \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= 12\sqrt[3]{18}\end{aligned}$$