

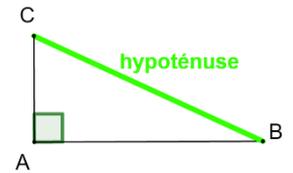
# Triangles rectangles : PYTHAGORE

## I – PYTHAGORE

### Définition

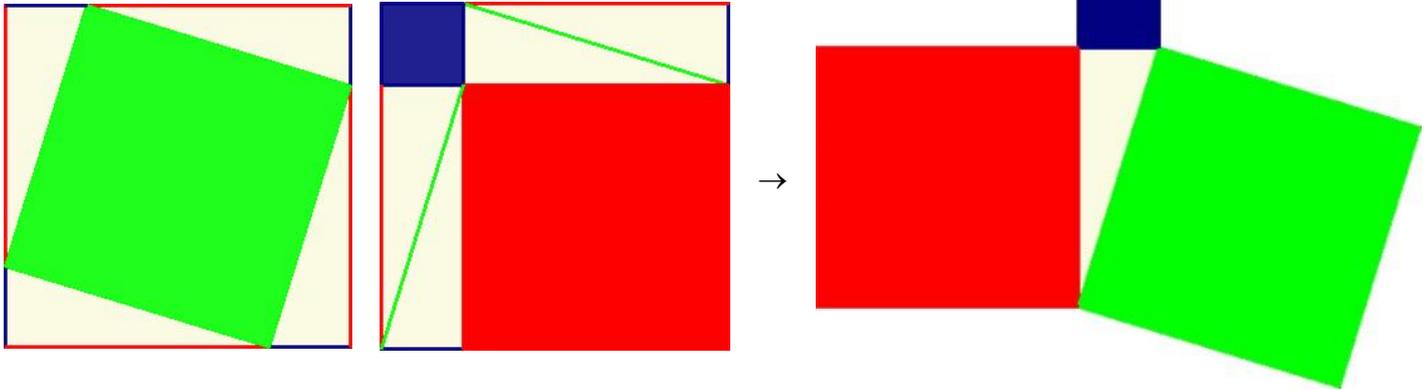
Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.

Hypoténuse vient du latin *hypotenusa* qui vient lui-même du grec *hupoteinousa* qui signifie « celle qui sous-tend ». Ce terme désigne le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit. Les côtés adjacents à l'angle droit étaient appelés cathètes.



### Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



### Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

**⚠ Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.**

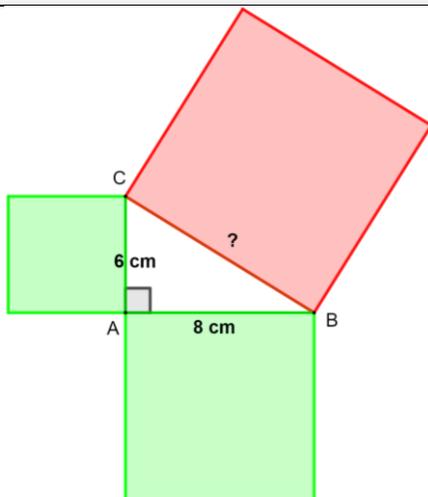
*Le théorème d'Al Kashi est une extension de ce théorème de Pythagore dans les triangles quelconques.*

### Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 8 \text{ cm}$
- $AC = 6 \text{ cm}$

Calcule BC.



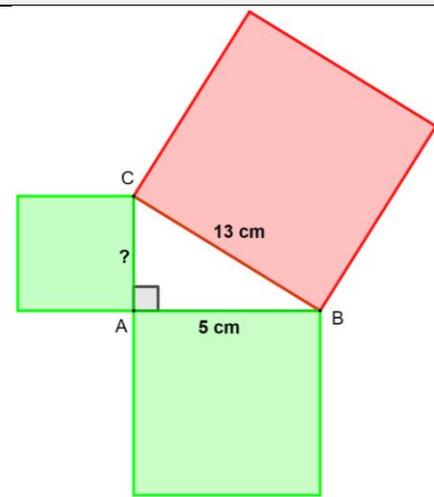
Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 \\ BC^2 &= 6^2 + 8^2 \\ BC^2 &= 36 + 64 \\ BC^2 &= 100 \\ BC &= \sqrt{100} = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 5 \text{ cm}$
- $BC = 13 \text{ cm}$

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ 13^2 &= 5^2 + AC^2 \\ 169 &= 25 + AC^2 \\ -25 \quad -25 & \\ 144 &= AC^2 \\ AC &= \sqrt{144} = 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Exemple** avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que  $AB = 4 \text{ cm}$  et  $AC = 5 \text{ cm}$ .

Calcule BC.

Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore

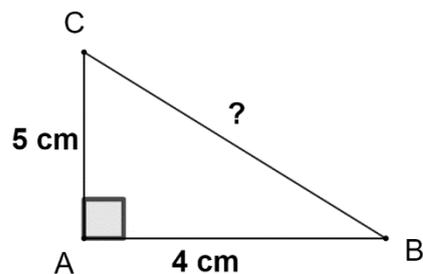
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 4^2 + 5^2$$

$$BC^2 = 16 + 25$$

$$BC^2 = 41$$

$$BC = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ cm}$$



**Utilisation** de la calculatrice

CASIO FX92	CASIO FX92 classwiz	TI collègue
Pour calculer $6^2 + 8^2$ , je tape		
6 $\square$ $\square^2$ + 8 $\square$ $\square^2$ EXE	6 $\blacksquare$ $\blacksquare^2$ + 8 $\blacksquare$ $\blacksquare^2$ EXE	6 $\square$ $\square^2$ + 8 $\square$ $\square^2$ =
Pour calculer $\sqrt{100}$ , je tape		
SECONDE $\square$ $\square^2$ 100 EXE	$\sqrt{\blacksquare}$ 100 EXE	SECONDE $\square$ $\square^2$ 100 =

**Propriété réciproque de Pythagore** admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.  
Si  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

**Propriété contraposée de Pythagore** admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.  
Si [BC] est le plus grand côté et  $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$  alors le triangle n'est pas rectangle.

**Exemples**

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que $AB = 3 \text{ cm}$ , $BC = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$ .	Soit ABC un triangle tel que $AB = 5 \text{ cm}$ , $BC = 7 \text{ cm}$ et $AC = 6 \text{ cm}$ .
Quelle est la nature de ABC ?	Quelle est la nature de ABC ?
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté.
$AC^2 \quad   \quad AB^2 + BC^2$ $= 5^2 \quad   \quad = 3^2 + 4^2$ $= 25 \quad   \quad = 9 + 16$ $\quad \quad   \quad = 25$	$BC^2 \quad   \quad AB^2 + AC^2$ $= 7^2 \quad   \quad = 5^2 + 6^2$ $= 49 \quad   \quad = 25 + 36$ $\quad \quad   \quad = 61$
Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, <b>ABC est rectangle en B</b> (car [AC] est l'hypoténuse).	Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors <b>ABC n'est pas rectangle</b> .

**II – RACINES CARREES et RACINES CUBIQUES** hors programme en France mais nécessaire pour le collège en Suisse

**Remarque** ♥

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$
$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$
$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	
$6^3 = 216$	$7^3 = 343$	$8^3 = 512$	$9^3 = 729$	$10^3 = 1000$	

## Définitions

La racine carrée de  $a$  est le nombre positif noté  $\sqrt{a}$   
tel que  $\sqrt{a^2} = a$

La racine cubique de  $a$  est le nombre noté  $\sqrt[3]{a}$   
tel que  $\sqrt[3]{a^3} = a$

## Remarques sur la racine carrée

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow \blacksquare^2 \rightarrow & \\ 5 & & 25 \\ & \leftarrow \sqrt{\blacksquare} \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt{4} = 2 & \sqrt{9} = 3 & \sqrt{16} = 4 & \sqrt{25} = 5 & \sqrt{36} = 6 & \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{64} = 8 & \sqrt{81} = 9 & \sqrt{100} = 10 & \sqrt{121} = 11 & \sqrt{144} = 12 & \sqrt{169} = 13 \end{array}$$



La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\sqrt{-1}$  n'existe pas  
 $\sqrt{-4}$  n'existe pas

Au lycée, une solution sera proposée pour ces racines carrées : les nombres complexes.

## Remarques sur la racine cubique

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow \blacksquare^3 \rightarrow & \\ 5 & & 125 \\ & \leftarrow \sqrt[3]{\blacksquare} \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[3]{1} = 1 & \sqrt[3]{8} = 2 & \sqrt[3]{27} = 3 & \sqrt[3]{64} = 4 & \sqrt[3]{125} = 5 \\ \sqrt[3]{216} = 6 & \sqrt[3]{343} = 7 & \sqrt[3]{512} = 8 & \sqrt[3]{729} = 9 & \sqrt[3]{1000} = 10 \\ \sqrt[3]{-1} = -1 & \sqrt[3]{-8} = -2 & \sqrt[3]{-27} = -3 & \sqrt[3]{-64} = -4 & \sqrt[3]{-125} = -5 \\ \sqrt[3]{-216} = -6 & \sqrt[3]{-343} = -7 & \sqrt[3]{-512} = -8 & \sqrt[3]{-729} = -9 & \sqrt[3]{-1000} = -10 \end{array}$$

## Propriétés admises

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres positifs  
avec  $b$  non nul.

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a \times b} &= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Pour tous les nombres  $a$  et  $b$  avec  $b$   
non nul.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^3} &= a \\ \sqrt[3]{a^3} &= a \\ \sqrt[3]{a \times b} &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \end{aligned}$$

## Exemples de calculs

$$\begin{array}{ll} \sqrt{5^2} = 5 & \sqrt{1,2^2} = 1,2 \\ \sqrt{3^2} = 3 & \sqrt{5,2^2} = 5,2 \\ \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} & \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{7^3} = 7 & \sqrt[3]{-8^3} = -8 \\ \sqrt{11^3} = 11 & \sqrt{(-4)^3} = -4 \\ \sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \times 20} = \sqrt[3]{1000} = 10 & \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3} & \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3 \end{array}$$

## Définition

Simplifier une racine s'est transformer une racine en produit d'un entier par une racine d'un nombre dont la distance à zéro est plus petite.

### Astuce

Pour simplifier la racine d'un entier, il faut écrire l'entier sous la forme du produit d'un carré (ou cube) par un entier

**Exemples** de simplification de racines carrées

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} & \sqrt{24} &= \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6} \\ \sqrt{147} &= \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3} & \sqrt{20} &= \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ 7\sqrt{50} - 4\sqrt{18} &= 7 \times \sqrt{25 \times 2} - 4 \times \sqrt{9 \times 2} = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 23\sqrt{2}\end{aligned}$$

**Exemples** de simplification de racines cubiques

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{32} &= \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4} & \sqrt[3]{250} &= \sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} \\ 11\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{-375} &= 11\sqrt[3]{8 \times 3} + 7\sqrt[3]{-125 \times 3} = 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + 7 \times \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{3} \\ &= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} + 7 \times (-5) \times \sqrt[3]{3} = 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3} = -13\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

### Remarques

Les racines doivent être simplifiées.

Les calculatrices simplifient automatiquement les racines carrées.

**Exemple** avec décomposition en produit de facteurs premiers

$$31104 = 2^7 \times 3^5$$

$$\begin{aligned}\sqrt{31104} &= \sqrt{2^7 \times 3^5} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= 72\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{31104} &= \sqrt[3]{2^7 \times 3^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times 3 \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= 12\sqrt[3]{18}\end{aligned}$$