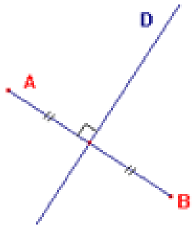
I – Symétrie axiale

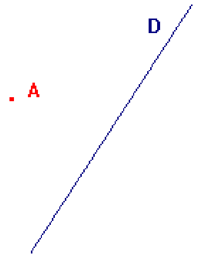


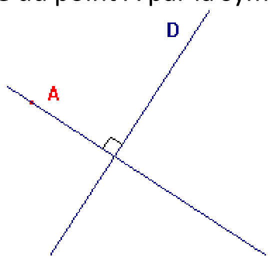
Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport à la droite D si D est la médiatrice de [AB].

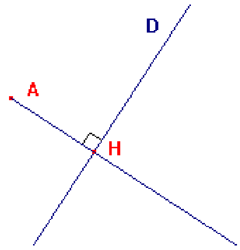
Construction avec la réquerre

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :

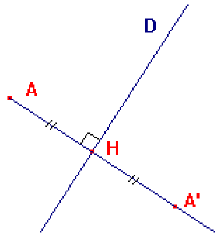




Tracer la droite perpendiculaire à D qui passe par A.



Elle coupe D en H.

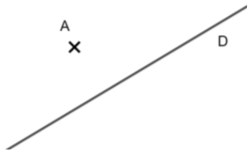


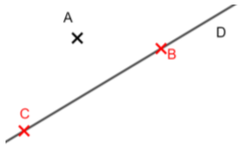
Placer le point A' tel que H soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie d'axe D.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie d'axe D.

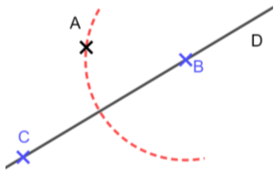
Construction avec le compas et la règle non graduée

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :

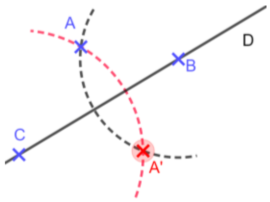




Placer deux points (B et C) sur D.



Tracer le cercle de centre B qui passe par A.



Tracer le cercle de centre C qui passe par B ; il coupe le cercle précédent en A'.

Propriété admise

La symétrie axiale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

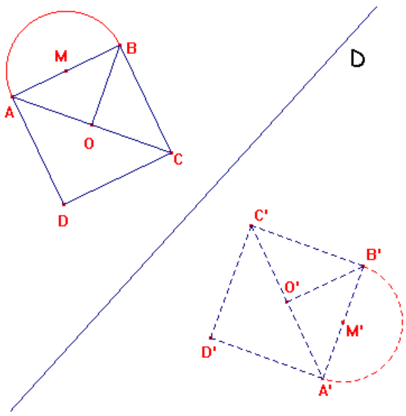


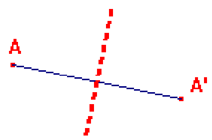
Image par la symétrie d'axe D.

Pour mémoire

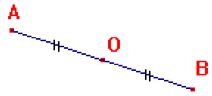
La symétrie axiale « correspond » à un miroir.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie axiale, il faut donner son axe.
Pour retrouver son axe, il suffit de connaître un point et son image.
L'axe de symétrie est la médiatrice du segment formé par ces 2 points.



II – Symétrie centrale

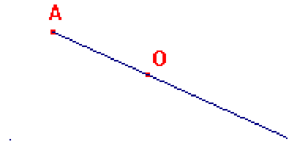


Définition

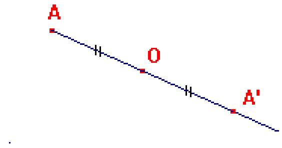
Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O si O est le milieu de [AB].

Construction

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport au point O il faut :



Tracer la demi-droite [AO).



Placer le point A' sur [AO) tel que O soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie de centre O.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie de centre O.

Propriété admise

La symétrie centrale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

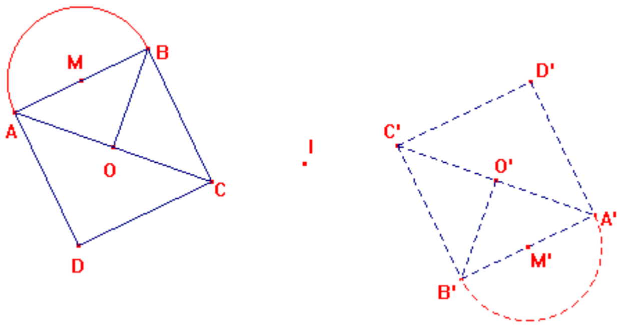


Image par la symétrie de centre I.

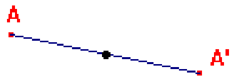
Pour mémoire

La symétrie centrale « correspond » à un demi-tour autour du centre de symétrie.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie centrale, il faut donner son centre.

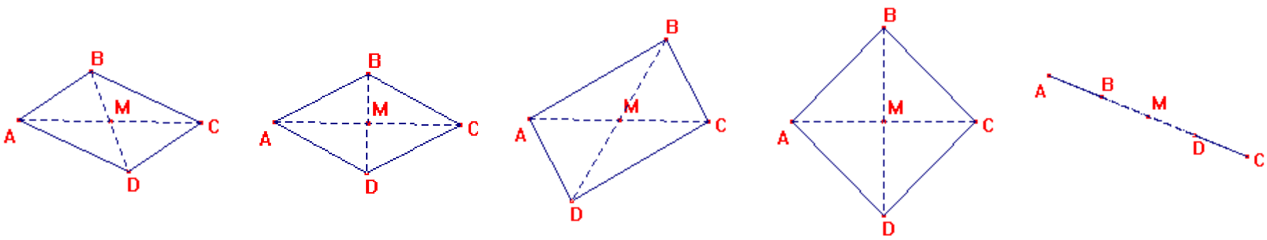
Pour retrouver son centre, il suffit de connaître un point et son image. Le centre de symétrie est le milieu du segment formé par ces 2 points.



III – Translation

Définition

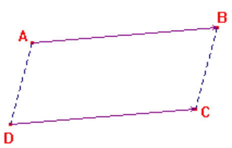
ABCD est un *parallélogramme* si ces diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.



Dans tous les cas ci-dessus, ABCD est un parallélogramme car M est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

Définition

On dit que l'image du point D est le point C par la *translation* qui envoie A sur B si ABCD est un parallélogramme.

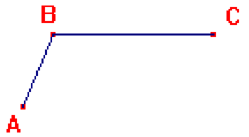
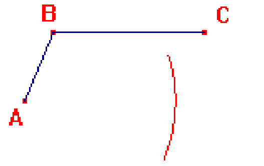
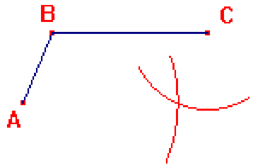
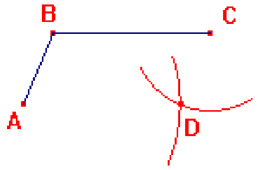
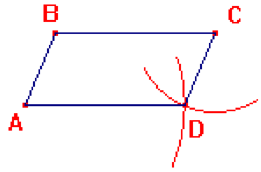


Construction

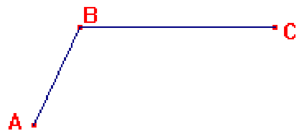
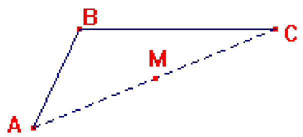
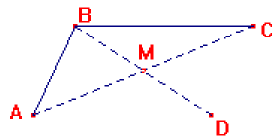
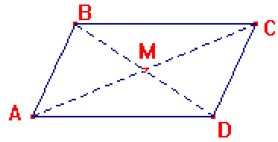
Pour construire l'image du point C dans la translation qui envoie A sur B il faut construire le parallélogramme ABC'C.

C' est le *translaté* de C par la translation qui envoie A sur B.
On dit aussi que C' est l'*image* de C par la translation qui envoie A sur B.

Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle et compas

				
	Tracer un arc de cercle de centre A et de rayon BC.	Tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB.	Les deux demi-cercles se coupent en D.	Tracer les segments [CD] et [AD]

Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle graduée

			
Tracer le segment [AC]	Construire le point M, milieu de [AC]	Tracer le point D, symétrique de B par rapport au point M.	Tracer les segments [CD] et [AD].

Propriété admise

La translation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

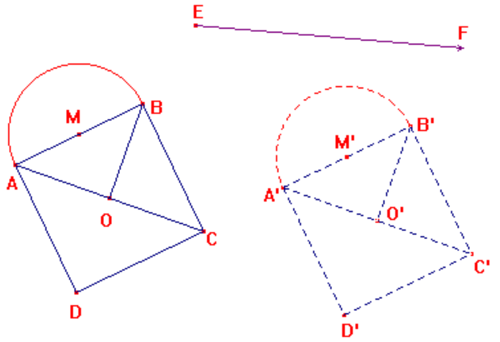


Image par la translation qui envoie E sur F.

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour mémoire

La translation « correspond » à un glissement sans tourner.

Caractériser

Pour caractériser une translation, il faut donner un point et son image ou le vecteur dont les extrémités sont ces points.

Dans l'exemple, on peut parler de la translation qui envoie A sur B ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut aussi parler de la translation qui envoie C sur C' ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{CC'}$.

IV – Vecteurs

Définition

La translation qui envoie le point A sur le point B est associé à $\overrightarrow{AB}$, qui se lit "*vecteur* A B".

Remarque

La translation qui envoie B sur A est associé au vecteur $\overrightarrow{BA}$. ***On ne note pas*** $\overleftarrow{AB}$**.**

Définition (rappel)

On dit que l'image du point D est le point C par la ***translation qui envoie A sur B*** si ABCD est un parallélogramme.

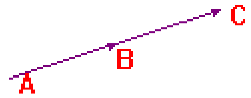
Propriétés admises

- Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme.

Remarque

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme.

Propriétés



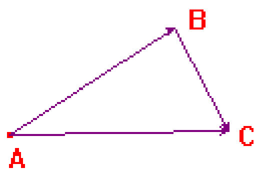
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors B est le milieu de [AC]
- Si B est le milieu de [AC] alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

Démonstration

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors ABCB est un parallélogramme donc B est le milieu de [AC].

Si B est le milieu de [AC] alors ABCB est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Relation *de CHASLES* admise



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Remarque

Effectuer la translation qui envoie A sur B puis la translation qui envoie B sur C revient à effectuer la translation qui envoie A sur C.

Remarque

La translation qui envoie A sur A laisse la figure inchangée.

Définition

On définit le vecteur nul (noté $\overrightarrow{\mathbf{0}}$) par : $\overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{AA}} = \overrightarrow{\mathbf{BB}} = \overrightarrow{\mathbf{CC}} = \overrightarrow{\mathbf{DD}}$ ….

Remarque

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ d'après la relation de Chasles donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$.

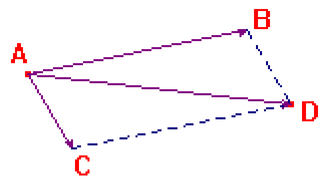
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont pour somme le vecteur nul. On dit qu'ils sont ***opposés*** l'un de l'autre et on note :

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Comment construire la somme de deux vecteurs ?

1[er] cas : A, B et C étant trois points quelconques, construire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles.



2[ème] cas : A, B et C étant trois points quelconques, construire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

On construit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Comme ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

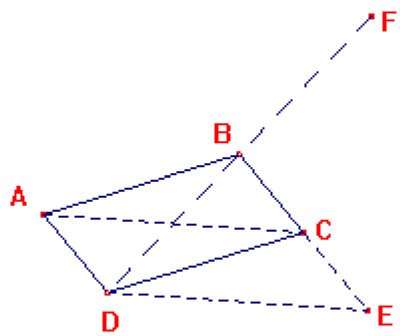
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles.

Exemple d'exercice

ABCD est un parallélogramme.

a- Construire le point E tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b- Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$



a- Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles.

Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$ donc ACED est un parallélogramme.

b- Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$ d'après la relation de Chasles.

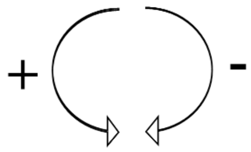
Donc $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DB}$ (ou $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BF}$) donc B est le milieu de [DF].

V – Rotations

Définition

Un angle est dit :

- positif s'il tourne dans le sens trigonométrique (l'inverse de la montre / antihoraire)
- négatif s'il tourne dans le sens chronométrique (la montre / horaire).



Remarque

Pour définir une rotation, il faut donner un angle. Pour définir le sens de rotation, on donne un signe à l'angle.

Si l'on dit rotation d'angle –50°, il faut comprendre qu'il faut tourner dans le sens chronométrique (montre).

Si l'on dit rotation d'angle +50° (ou 50°), il faut comprendre qu'il faut tourner dans le sens trigonométrique (inverse de la montre).

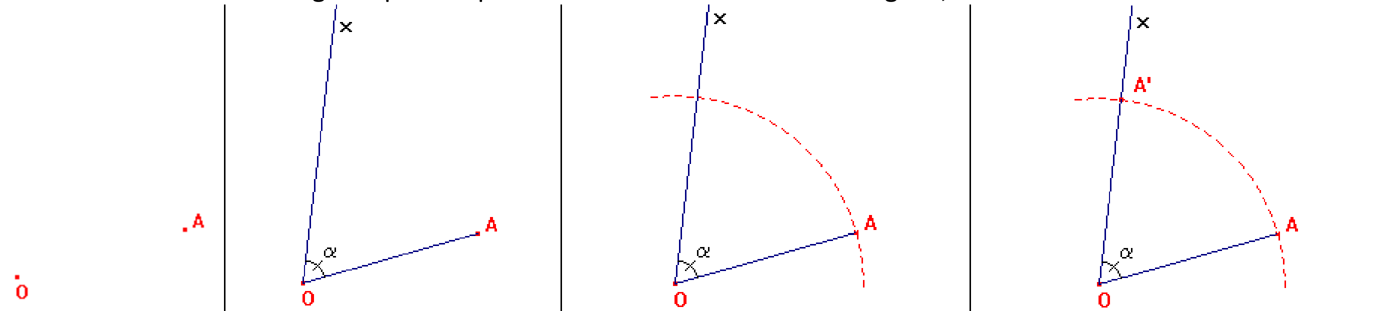
Définition

Le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle α si :

- OA = OA'
- $\widehat{AOA'} = \alpha$

Construction avec le rapporteur et le compas

Pour construire l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle α, il faut :

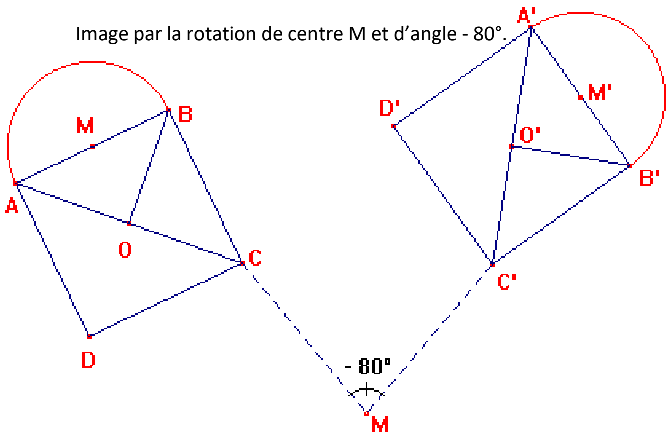


	Tracer un angle tel que $\widehat{AOx} = \alpha$	Tracer un cercle de centre O et de rayon OA.	Le cercle et la demi-droite [Ox) se coupent en A'.

A' est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle α.

Propriété admise

La rotation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …



Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour mémoire

Pour une rotation, on tourne autour d'un point

Caractériser

Pour caractériser une rotation, il faut trouver son centre et son angle.

Pour retrouver le centre O, on trace la médiatrice de deux segments formés par deux points et leurs images (médiatrices de [AA'] et [BB']). Le point d'intersection de ces médiatrices est le centre de rotation O.

Si les segments [AA'] et [BB'] sont à supports parallèles, les médiatrices ne seront pas concourantes. Il faut choisir un autre segment [CC'] tel que (AA') et (CC') ne soient pas parallèles.

L'angle de la rotation est l'angle $\widehat{\mathrm{AOA}'}$ ou $\widehat{\mathrm{BOB}'}$.