

FRACTIONS : additions et soustractions

Définitions

Un nombre en *écriture fractionnaire* s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{b} \leftarrow \begin{array}{l} \text{le numérateur} \\ \text{le dénominateur} \end{array}$$

On parle de *fraction* lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

On parle de *fraction décimale* lorsque l'on a une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, 10000 ...

Propriété d'égalité de fractions - admise

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et le dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

Exemples

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35} \quad \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \quad \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

Définitions

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la distance à zéro de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

Exemples

$$\frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4} \quad \frac{45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

Remarque

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

Propriétés admises : Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

- 186 se divise par 2 car il est pair (il se termine par 6).
- 187 ne se divise pas par 2 car il est impair.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 237 est divisible par 3 car $2+3+7=12$ et 12 est divisible par 3.
- 238 n'est pas divisible par 3 car $2+3+8=13$ et 13 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

- 25 292 est divisible par 4 car 92 est divisible par 4, car $92=40+40+12$ et 12 est divisible par 4.
- 45 267 n'est pas divisible par 4 car 67 n'est pas divisible par $67=40+27$ et 27 n'est pas divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

- 185 se divise par 5 car il se termine par 5.
- 190 se divise par 5 car il se termine par 0.
- 187 ne se divise pas par 5.

Un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 ET par 3, donc s'il est pair ET si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 894 se divise par 6 car
 - il se divise par 2 (il est pair),
 - ET il se divise par 3 car $8+9+4=21$ qui se divise par 3.
- 165 ne se divise pas par 6 car
 - il ne se divise pas par 2 (il est impair),
 - même si il se divise par 3 car $1+6+5 = 12$ qui se divise par 3.
- 898 ne se divise pas par 6 car
 - il se divise par 2 (il est pair),
 - mais il ne se divise pas par 3 car $8+9+8=25$ qui ne se pas divise par 3.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

- 567 est divisible par 9 car $5+6+7=18$ et 18 est divisible par 9.
- 123 456 789 est divisible par 9 car $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ et 45 est divisible par 9 car $4+5=9$ qui est divisible par 9.
- 238 n'est pas divisible par 9 car $2+3+8=13$ et 13 n'est pas divisible par 9.

Remarque

Un nombre divisible par 9 est obligatoirement divisible par 3.

Définition

Un nombre est dit premier s'il n'a que 1 et lui-même comme diviseur (un nombre premier a exactement 2 diviseurs).

Exemples

Le nombre 3 est premier car ses diviseurs sont 1 et 3.

Le nombre 6 n'est pas premier car il se divise par 1, 2, 3 et 6.

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Astuce pour trouver tous les nombres premiers en partant de 2 : **crible d'Ératosthène** (c'est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec : -276 à -194).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On écrit tous les nombres de 1 à 100.

1 n'est pas premier donc on le barre

Le premier nombre non barré est 2 donc c'est un nombre premier On barre tous les multiples de 2 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 2 est 3 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 3 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 3 est 5 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 5 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 5 est 7 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 7 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 7 est 11 ; c'est un nombre premier.

On s'arrête ici car $11^2 = 11 \times 11 > 100$.

Tous les nombres non barrés sont premiers.

Les nombres premiers jusqu'à 100 sont : ♥ **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23**, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Comment décomposer un nombre en produits de facteurs premiers.

On veut décomposer 450.

450		On réécrit le nombre à gauche de la ligne verticale
225	2	2 est le plus petit nombre premier qui divise 450 $450 = 2 \times 225$ On écrit 225 à gauche et 2 à droite
75	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 225 $225 = 3 \times 75$ On écrit 75 à gauche et 3 à droite
25	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 75 $75 = 3 \times 25$
5	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 25 $25 = 5 \times 5$
1	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 5 $5 = 1 \times 5$ On s'arrête lorsqu'il y a 1 dans la colonne de gauche.

$$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

Exemples de décomposition en facteurs premiers

Décomposons 180	Décomposons 380
180	380
90 2	190 2
45 2	95 2
15 3	19 5
5 3	1 19
1 5	
180 = 2 ² × 3 ² × 5	380 = 2 ² × 5 × 19

Utilisation de la calculatrice

Décomposons 180

CASIO FX92					TI COLLEGE PLUS			
1	8	0	EXE	SECONDE	F	180	SECONDE	▶ SIMP

On obtient : 2² × 3² × 5

Exemple de simplification de fraction

Simplifier la fraction $\frac{21000}{29700}$

Décomposons 21000	Décomposons 29700
21000	29700
10500 2	14850 2
5250 2	7425 2
2625 2	2475 3
875 3	825 3
175 5	275 3
35 5	55 5
7 5	11 5
1 7	1 11
21000 = 2 ³ × 3 × 5 ³ × 7	29700 = 2 ² × 3 ³ × 5 ² × 11

$$\frac{21000}{29700} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 11} = \frac{70}{99}$$

Comment transformer une écriture fractionnaire en fraction ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateur entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, ...).

Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

Exemples

$$\frac{5,2}{2} = \frac{5,2 \times 10}{2 \times 10} = \frac{52 \div 2}{20 \div 2} = \frac{26 \div 2}{10 \div 2} = \frac{13}{5} \qquad \frac{4,51}{3,7} = \frac{4,51 \times 100}{3,7 \times 100} = \frac{451}{370}$$

Propriété d'addition de fractions de même dénominateur - admise

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

Exemples

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{3+6}{4} = \frac{9}{4} \qquad \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1-8}{3} = \frac{-7}{3} \qquad \frac{-1}{5} - \frac{8}{5} = \frac{-9}{5} \qquad \frac{-15}{6} - \frac{-8}{6} = \frac{-15 - (-8)}{6} = \frac{-15 + 8}{6} = \frac{-7}{6}$$

Définition

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

Remarque

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

Comment additionner deux fractions de dénominateurs différents ?

On se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

Exemples

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{3} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{21}{6} + \frac{10}{6} = \frac{31}{6} \qquad \frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 51}{34 \times 51} + \frac{8 \times 34}{51 \times 34} = \frac{255}{1734} + \frac{272}{1734} = \frac{527}{1734}$$

Remarque

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici, $\frac{527}{1734} = \frac{31}{102}$.

Astuce

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs. Pour cela, on décompose les deux nombres.

Décomposons 34		Décomposons 51
34		51
17		17
2		3
1		1
17		17
34 = 2 × 17		51 = 3 × 17

On cherche un nombre qui contient tous les facteurs ci-dessus :

$$2 \times 3 \times 17 = 102.$$

$$\frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 3}{34 \times 3} + \frac{8 \times 2}{51 \times 2} = \frac{15}{102} + \frac{16}{102} = \frac{31}{102}$$

Propriété admise

Prendre une quantité d'une fraction c'est multiplier le nombre par la fraction.

Exemples

Prendre $\frac{3}{4}$ de 126 € c'est prendre $\frac{3}{4} \times 126$ €.

Rouler $\frac{2}{5}$ de 800 km c'est rouler $\frac{2}{5} \times 800$ km.

Remarque

Le mot « de » en français se traduit par « × » en mathématiques.

Comment multiplier un nombre par une fraction ?

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$	$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$	$\frac{a}{b} \times c = a \times (c \div b)$
$\frac{12}{6} \times 7 = (12 \div 6) \times 7 = 2 \times 7 = 14$	$\frac{2}{3} \times 9 = (2 \times 9) \div 3 = 18 \div 3 = 6$	$\frac{5}{7} \times 21 = 5 \times (21 \div 7) = 5 \times 3 = 15$

Notation

La fraction $\frac{p}{100}$ est notée $p\%$

La fraction $\frac{15}{100}$ est notée 15%

Exemple de problème

Sébastien achète un pull. Le prix affiché est de 65€, mais il bénéficie d'une remise de 15%.
Combien va-t-il payer ?

Calculons le montant de la remise

$$\begin{aligned} 15\% \text{ de } 65 \text{ €} &= \frac{15}{100} \text{ de } 65 \\ &= \frac{15}{100} \times 65 = (15 \times 65) \div 100 = 975 \div 100 = 9,75 \end{aligned}$$

La remise est de 9,75 €.

Je calcule le prix réduit.

$$65 - 9,75 = 55,25$$

Le prix réduit est de **55,25 €**.