PROPORTIONNALITE, VITESSES et ECHELLES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

$\downarrow \times 1{,}52$

Propriété admise

$a \times \frac{b}{a} = b$ Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b$ $\quad$ $\textit{départ} \xrightarrow{\times \frac{\textit{arrivée}}{\textit{départ}}} \textit{arrivée}$

Exemples

$5 \xrightarrow{\times 3} 15$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\times 13} 65$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\times \frac{645}{5} \text{ ou } \times 129} 645$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7$ $\quad$ $7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.

2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5{,}1}{3} = 1{,}7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11{,}9}{7} = 1{,}7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$\frac{4{,}80}{3} = 1{,}6$ $\quad$ $\frac{8{,}00}{5} = 1{,}6$ $\quad$ $\frac{11{,}00}{7} » 1{,}57$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ $\qquad$ Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix : 65×161 = 10 465 et 91×115 = 10 465

donc $65 \times 161 = 91 \times 115$ donc $\frac{65}{91} = \frac{115}{161}$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix : 7×17 = 119 et 13×9 = 117

donc 7×17 ≠ 13×9 donc $\frac{7}{13} \neq \frac{9}{17}$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\frac{5}{4} = \frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

5 × ? = 4 × 7 *On effectue les produits en croix*

5 × ? = 28 *On simplifie chaque membre*

? = 5,6 *On divise par 5*

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$\frac{5}{4} = \frac{7}{a}$ $\quad a = \frac{4 \times 7}{5} = 5{,}6$

$\frac{5}{4} = \frac{b}{3}$ $\quad b = \frac{3 \times 5}{4} = 3{,}75$

$\frac{c}{4} = \frac{7}{2}$ $\quad c = \frac{4 \times 7}{2} = 14$

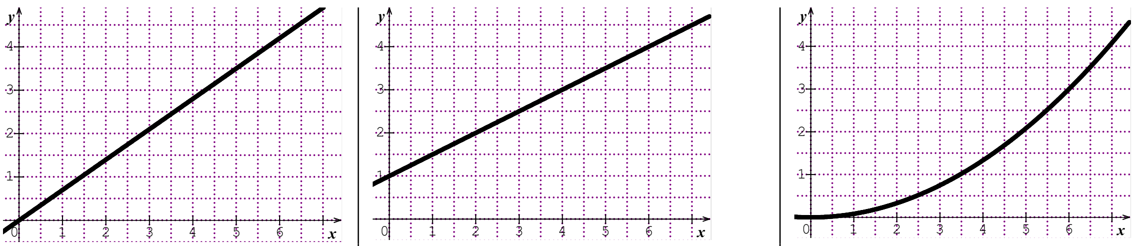
$\frac{5}{d} = \frac{7}{3}$ $\quad d = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7}$

Propriété – admise

La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

- une droite
- qui passe par l'origine du repère

Exemples



Une droite qui passe par l'origine — Situation de proportionnalité

Une droite qui ne passe pas par l'origine — Pas une droite

Pas une situation de proportionnalité

II – Vitesse, distance et temps

3,4h ≠ 3h 40 min

3,4 h = 3h + 0,40h = 3h 24min

$\times 60$

3h 18min ≠ 3,18h

3h 18 min = 3h + 0,30h = 3,3h

$\div 60$

Conversion avec la calculatrice

CASIO FX92	Texas Instruments
3,15 [EXE] [°'"]	3,15 [2nde] [π] [→DMS] [entrer]

3,15 h = 3h 9min

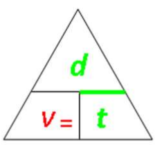
CASIO FX92	Texas Instruments
3 [°'"] 12 [°'"] [EXE] [°'"]	3 [2nde] [π] [°] 12 [2nde] [π] ['] [entrer]

3h 12min = 3,2h

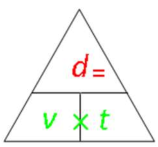
Propriétés admises

Si *d* est la distance, *t* le temps et *v* la vitesse moyenne on a alors

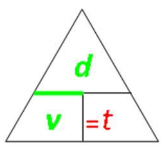
$v = \frac{d}{t}$



$d = v \times t$



$t = \frac{d}{v}$



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$$v = \frac{d}{t} = \frac{183}{3} = 61$$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

$\downarrow \div 3$

$$? = \frac{183 \times 1}{3} = 61$$

Sa vitesse moyenne est de $\boxed{\text{61 km/h}}$.

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

$\downarrow \times 3$

$$? = \frac{43 \times 3}{1} = 129$$

La distance parcourue est $\boxed{\text{129 km}}$.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4{,}5} = \frac{8}{3}$$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

$\rightarrow \div 4{,}5$

$$? = 12 \div 4{,}5 = \frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$h = $\boxed{\text{2h 40min}}$.

Exemple 4 : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km = 135 000 m	1 h = 3 600 s
?	1 s

$\downarrow \div 3\,600$

? = 135 000 ÷ 3 600 = 37,5

135 km/h = 37,5 m/s

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
? m = ? km	3 600 s = 1h

$\downarrow \times 3600$

? = 15 × 3600 = 54 000 m = 54 km

15 m/s = 54 km/h

III – Ratios

Remarque

Deux nombres a et b sont dans le *ratio* 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ | Trois nombres a, b, c sont dans le *ratio* 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$

Exemple

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{8}{12}$ donc 2, 10 et 8 sont dans le ratio 3 : 15 : 12

$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ donc 10, 5 et 15 sont dans le ratio 12 : 6 : 18

Exemple 1
La vinaigrette est faite avec de l'huile, de la moutarde et du vinaigre dans le ratio 6 : 1 : 3.
On veut utiliser 2 cuillers de moutarde.
Combien faut-il prévoir des autres ingrédients ?

Je calcule la part des ingrédients

Ingrédient	Huile	Moutarde	Vinaigre
Ratio	6	1	3
Nombre de cuillers	?	2	??

$\times 2$

Le coefficient de proportionnalité est 2 donc il faut 2×6 = **12 cuillers d'huile** et 2×3 = **6 cuillers de vinaigre**.

Exemple 1
La vinaigrette est faite avec de l'huile, de la moutarde et du vinaigre dans le ratio 6 : 1 : 3.
On veut Obtenir 5 litres de vinaigrette.
Combien faut-il prévoir de chaque ingrédient ?

Je calcule la part des ingrédients

Ingrédient	Huile	Moutarde	Vinaigre	Total
Ratio	6	1	3	10
Volume	?	?	?	5 litres

$\times 0{,}5$

Le coefficient de proportionnalité est 0,5 donc il faut 0,5×6 = **3 L d'huile** et 0,5×1 = **1,5 L de moutarde** et 0,5×3 = **1,5 L de vinaigre**.

IV – Echelles

Remarque

Pour représenter la réalité, il peut être nécessaire de l'agrandir ou de la réduire.
S'il s'agit d'un agrandissement, on multiplie les distances par un nombre supérieur à 1.
S'il s'agit d'une réduction, on multiplie les distances par un nombre entre 0 et 1.

Réduction

En bas à gauche, il est indiqué que l'échelle est de 1 : 10 000 ; on devrait écrire $\frac{1}{10\,000}$.

Cela signifie que pour passer de la réalité à la carte, on a multiplié les distances par $\frac{1}{10\,000}$.

Par exemple, si on cherche les points à 350 m de l'entrée du collège, on doit chercher la distance correspondante sur la carte, on calcule :

$$350 \times \frac{1}{10\,000} = 0{,}0350$$

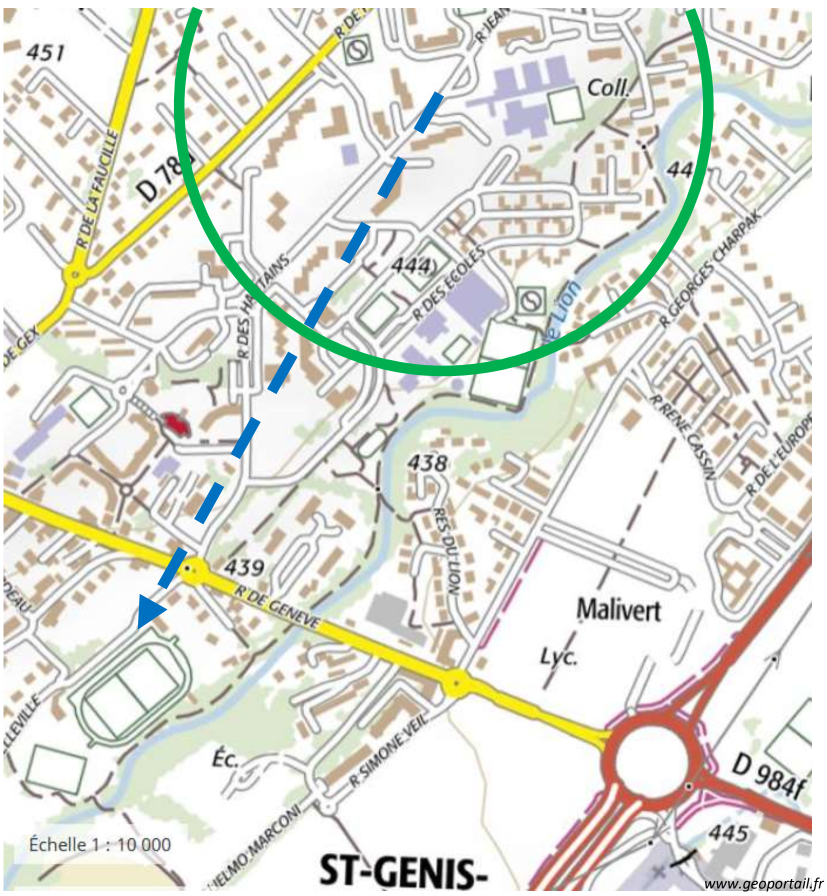
Sur la carte, cela correspond à 0,035 m = 3,5 cm
Ce sont donc tous les points sur le cercle vert.

L'échelle $\frac{1}{10\,000}$ signifie aussi que 1 cm sur la carte représente 10 00 cm = 100 m de la réalité.
On aurait aussi pu la trouver avec un tableau de proportionnalité en utilisant 350 m = 35 000 cm

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
?	35 000 cm

$$? = \frac{1 \times 35\,000}{10\,000} = 3{,}5$$

On retrouve le rayon de 3,5 cm.



Pour aller de l'entrée du collège au stade, il y a 8 cm (la flèche bleue pointillée). On peut déterminer la distance entre le collège et le stade :

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
8 cm	?

$$? = \frac{8 \times 10\,000}{1} = 80\,000$$

Il y a 80 000 cm = 800 m pour aller du collège au stade.

Agrandissement

L'échelle est ici de $\frac{20}{1}$. Cela signifie que pour passer de la réalité à la photo, on a multiplié les distances par $\frac{20}{1}$.
Cela signifie aussi que 20 cm sur la photo représentent 1 cm dans la réalité.

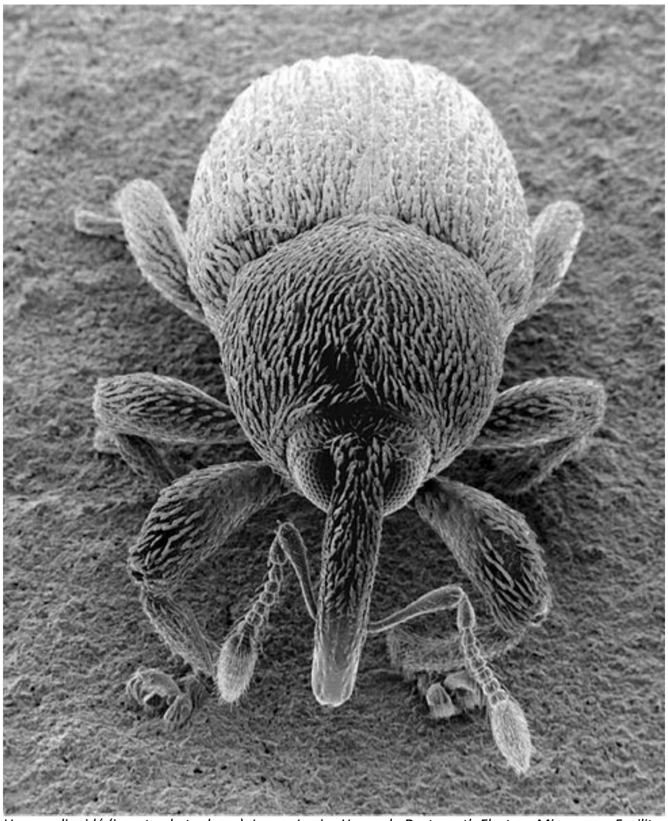
Pour connaître sa taille réelle, on la mesure sur la photo ; on trouve ici 8,6 cm.

Je calcule sa taille réelle :

Photo	Réalité
20 cm	1 cm
8,6 cm	?

$$? = \frac{8{,}6 \times 1}{20} = 0{,}43$$

La taille est donc de 0,43 cm = 4,3 mm.



Un curculionidé (insecte phytophage). Image Louisa Howard - Dartmouth Electron Microscope Facility.