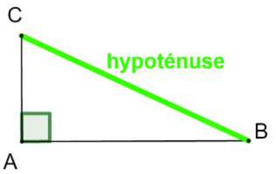
Triangles rectangles : PYTHAGORE

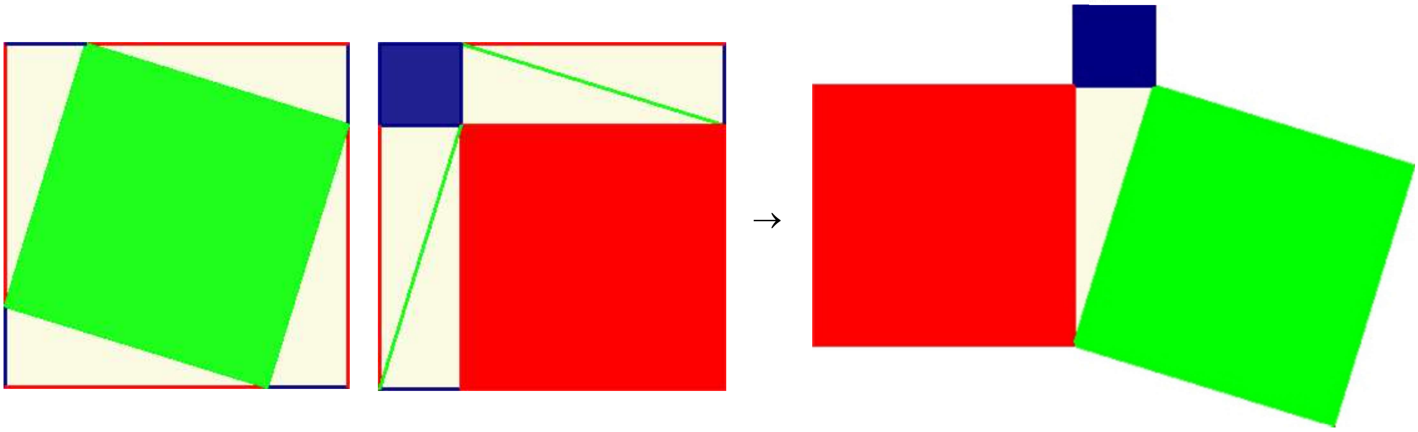


Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.

Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

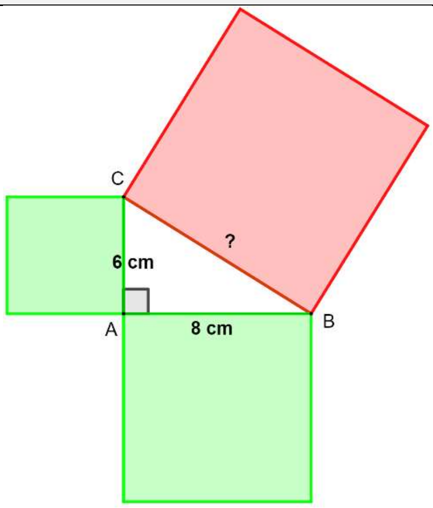
⚠ ***Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.***

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- AB = 6 cm
- AC = 8 cm

Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 6^2 + 8^2$

$BC^2 = 36 + 64$

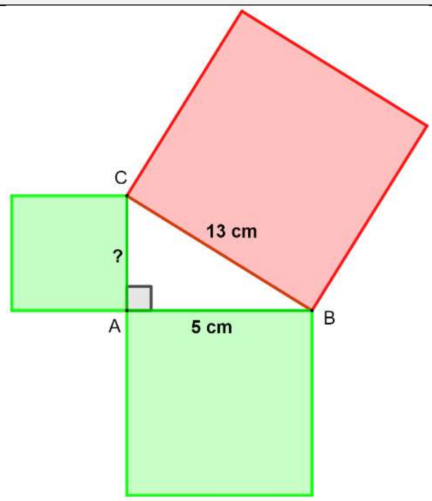
$BC^2 = 100$

$BC = \sqrt{100} = \boxed{10\text{ cm}}$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- AB = 5 cm
- BC = 13 cm

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$13^2 = 5^2 + AC^2$

$169 = 25 + AC^2$

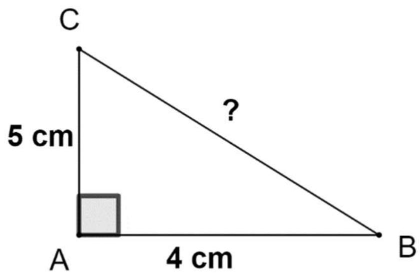
$-25 \qquad -25$

$144 = AC^2$

$AC = \sqrt{144} = \boxed{12\text{ cm}}$

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que AB = 4 cm et AC = 5 cm.
Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 5^2$
$BC^2 = 16 + 25$
$BC^2 = 41$
$BC = \sqrt{41}$ » 6,4 cm

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape	
6 [x^2] + 8 [x^2] [EXE]	6 [x^2] + 8 [x^2] =

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape	
[SECONDE] [x^2] 100 [EXE]	[SECONDE] [x^2] 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

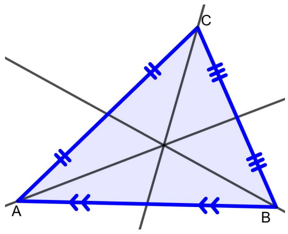
Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 3 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm. *Quelle est la nature de ABC ?*	*Soit ABC un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 7 cm et AC = 6 cm.* *Quelle est la nature de ABC ?*
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté. AC^2 | $AB^2 + BC^2$ $= 5^2$ | $= 3^2 + 4^2$ $= 25$ | $= 9 + 16$ | $= 25$ Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, **ABC est rectangle en B** *(car [AC] est l'hypoténuse)*.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté. BC^2 | $AB^2 + AC^2$ $= 7^2$ | $= 5^2 + 6^2$ $= 49$ | $= 25 + 36$ | $= 61$ Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors **ABC n'est pas rectangle**.

Définition

La *médiane* d'un triangle est la droite issue d'un sommet qui passe par le milieu du côté opposé.

Dans le triangle ABC, la médiane issue de A est la droite qui passe par A et par le milieu de [BC].



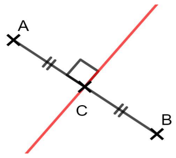
Propriété admise

Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre de gravité du triangle*.

Définition

La *médiatrice* d'un segment est la droite qui passe par le milieu d'un segment ET qui est perpendiculaire au support de ce segment.

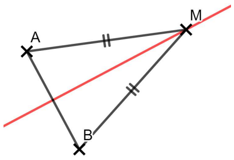
La médiatrice du segment [AB] est la droite qui passe par le milieu de [AB] et qui est perpendiculaire à (AB).



Propriétés admises

Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant (même distance) des extrémités de ce segment.

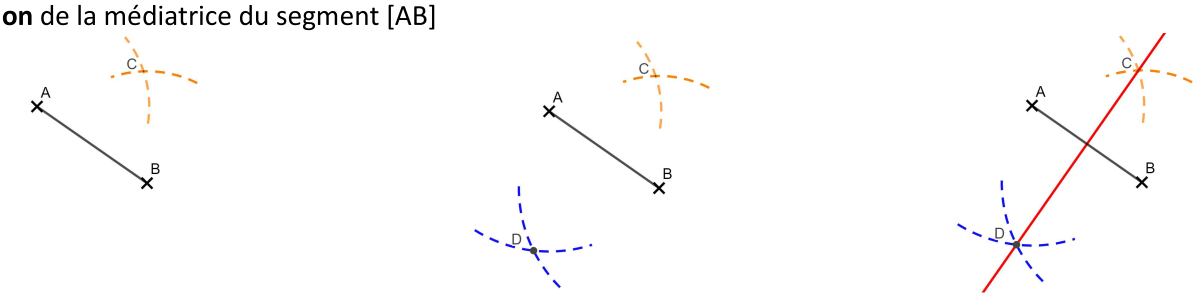
Si M est sur la médiatrice de [AB] alors MA = MB.



Si un point est équidistant (même distance) des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Si MA = MB alors M est sur la médiatrice de [AB].

Construction de la médiatrice du segment [AB]



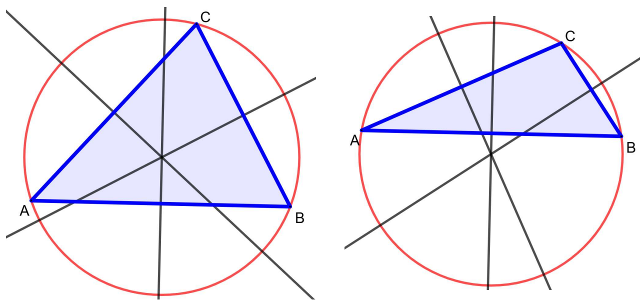
Tracer deux arcs de cercle de même rayon et de centres A et B. Ils se coupent en C.

Tracer deux autres arcs de cercle de même rayon et de centres A et B. Ils se coupent en D.

La médiatrice de [AB] est la droite (CD).

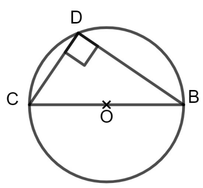
Propriété admise

Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre du cercle circonscrit au triangle*.



Propriétés admises

Si un triangle a ses 3 sommets sur un cercle et a un côté qui est un diamètre du cercle alors ce triangle est rectangle.



Si un triangle est rectangle alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.